Polynomy v moderní algebře

Výsledky cvičení a návody k jejich řešení

In: Karel Hruša (author): Polynomy v moderní algebře. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1970. pp. 94–[102].

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403718

VÝSLEDKY CVIČENÍ A NÁVODY K JEJICH ŘEŠENÍ

1. Operace v množině

1. Všechny jsou komutativní, ale žádná není asociativní. — 2. Všechny jsou komutativní i asociativní. — 3. Plyne ze vzorců $(xy)^z = x^z y^z$, $(x : y)^z = x^z : y^z$. — 4. Operace $\star$ není komutativní, je však asociativní. Při komutativnosti stačí najít jediný případ, kdy $\mathfrak{X} \star \mathfrak{Y} \neq \mathfrak{Y} \star \mathfrak{X}$; při asociativnosti můžeme označit například $\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ K & L & M \end{pmatrix}$, $\mathfrak{Y} = \begin{pmatrix} K & L & M \\ N & O & P \end{pmatrix}$, $\mathfrak{Z} = \begin{pmatrix} N & O & P \\ Q & R & S \end{pmatrix}$, kde KLM, NOP, QRS jsou permutace vrcholů A, B, C. — 5. a) M má 8 prvků; operace není komutativní, je však asociativní. b) M má 4 prvky; operace je komutativní i asociativní. — 6. a) Operace $\bigcirc$ není komutativní, ale je asociativní (ověřte konstrukčně i početně tak, že přímky p, q vezmete za osy souřadnic). b) Ověřte konstrukčně i početně. — 7. Je-li $O = [0, 0]$, $X = [x_1, y_1]$, $Y = [x_2, y_2]$, je $X \bigcirc Y = [x_1 + x_2, y_1 + y_2]$. — 8. Při komutativnosti je třeba odlišit případy $x \geqq y$, $y \geqq x$, při asociativnosti případy $x \geqq y \geqq z$, $x \geqq z \geqq y$, $y \geqq x \geqq z$, $y \geqq z \geqq x$, $z \geqq x \geqq y$, $z \geqq y \geqq x$. — 9. Použije se definice sjednocení a průniku (znázorněte Vennovými diagramy). — 10. Na základě rozkladu v prvočinitele a s využitím výsledku cvič. 8.

2. Neutrální a inverzní prvek. Grupa

11. Operace $\bigcirc$ má neutrální prvek $n = -1$ a inverzní prvek $\bar{x} = -x - 2$; operace $\star$ má neutrální prvek $n = 0$ a inverzní prvek

$\bar{x} = \dfrac{x}{x-1}$. V množině C existuje inverzní prvek operace $\star$ pouze k číslům 0 a 2, v množině R ke každému $x \neq 1$. — 12. Nemá neutrální prvek. — 13. Operace max má neutrální prvek $n \in$ M, jestliže pro každé $x \in$ M je $x \geqq n$; inverzní prvek existuje pouze k číslu n a je $\bar{n} = n$. Obdobně pro operaci min. — 14. Neutrální prvek operace $\cup$ je $\emptyset$ a pak $\bar{\emptyset} = \emptyset$, neutrální prvek operace $\cap$ je Z a pak $\bar{Z} = Z$; k jiným prvkům inverzní prvky neexistují. — 15. Operace D nemá neutrální prvek; operace n má neutrální prvek 1 a je $\bar{1} = 1$, inverzní prvky k ostatním prvkům neexistují. — 17. M je grupa, $n = a$, $\bar{a} = a$, $\bar{b} = c$, $\bar{c} = b$. — 18. M není grupa, $n = b$, $\bar{a}$ neexistuje, $\bar{b} = b$, $\bar{c} = d$, $\bar{d} = c$. — 19. Neutrální prvek je identické přemístění $\mathfrak{J}$ a mimoto a) každý prvek je sám k sobě inverzní, b) každý prvek je sám k sobě inverzní s výjimkou rotací $\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix}$, $\mathfrak{R}' = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \end{pmatrix}$, pro něž je $\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}'$, $\bar{\mathfrak{R}'} = \mathfrak{R}$. — 20. Je-li a neutrální prvek, je operace $\bigcirc$ dána tabulkou

	a	*b*
a	*a*	*b*
b	*b*	*a*

	a	*b*	*c*
a	*a*	*b*	*c*
b	*b*	*c*	*a*
c	*c*	*a*	*b*

	a	*b*	*c*	*d*
a	*a*	*b*	*c*	*d*
b	*b*	*a*	*d*	*c*
c	*c*	*d*	*a*	*b*
d	*d*	*c*	*b*	*a*

	a	*b*	*c*	*d*
a	*a*	*b*	*c*	*d*
b	*b*	*a*	*d*	*c*
c	*c*	*d*	*b*	*a*
d	*d*	*c*	*a*	*b*

Pro $M = \{a, b, c, d\}$ dostaneme další případy, zaměníme-li mezi sebou prvky b, c, popř. b, d.

3. Množiny se dvěma operacemi

21. a) Z podmínek $x + (-x) = 0$, $y + (-y) = 0$ plyne $(x + y) + [(-x) + (-y)] = 0$; b) z podmínek $x + (-x) = 0$, $(-y) + y = 0$ plyne $(x - y) + [(-x) + y] = 0$; c) z podmínky $x + (-x) = 0$ plyne $xy + (-x)y = 0$ a z podmínky $y + (-y) = 0$ plyne $xy + x(-y) = 0$; d) plyne z c). — 22. a) Je-li $y - z = u$, je $y = u + z$ a pak po úpravě $x + y = (x + u) + z$; b) je-li $x - (y + z) = u$, je po úpravě $x = y + (z + u)$; c) je-li $x - y = u$ a $y - z = v$, je $x = u + y$, $y = z + v$ a odtud $x = (u + z) + v$; d) je-li $x - y = u$, je $x = u + y$ a pak $x + z = u + (y + z)$; e) je-li $y - z = u$, je $y = u + z$ a pak $xy = xu + xz$. — 23. a), b) Obdobně jako 21 a), b); c), d) plyne z 21 c). — 24. Obdobně jako 22 a), b), c), d). — 25. a) Je-li $\frac{x}{u} = z$, $\frac{y}{v} = z$, je $x = uz$, $y = vz$ a $vx = vuz$, $uy = uvz$; b), c) je-li $\frac{x}{u} = z$, $\frac{y}{v} = t$, je $x = uz$, $y = vt$ a pak $vx = vuz$, $uy = uvt$, $vx \pm uy = vuz \pm uvt$; za týchž podmínek je d) $xy = uz . vt$, e) $x . vt = y . uz$. — 26. Podle definice 7 a 9. — 27. a) $\{0\}$; b) $\{1\}$; c) $-\{0\} = \{0\}$, $-\{1\} = \{6\}$, $-\{2\} = \{5\}$, $-\{3\} = \{4\}$; d) $\{0\}^{-1}$ neexistuje, $\{1\}^{-1} = \{1\}$, $\{2\}^{-1} = \{4\}$, $\{3\}^{-1} = \{5\}$, $\{6\}^{-1} = \{6\}$. — 28. a) $\{0\}$; b) $\{1\}$; c) $-\{0\} = \{0\}$, $-\{1\} = \{7\}$, $-\{2\} = \{6\}$, $-\{3\} = \{5\}$, $-\{4\} = \{4\}$; d) $\{1\}^{-1} = \{1\}$, $\{3\}^{-1} = \{3\}$, $\{5\}^{-1} = \{5\}$, $\{7\}^{-1} = \{7\}$, $\{0\}^{-1}$, $\{2\}^{-1}$, $\{4\}^{-1}$, $\{6\}^{-1}$ neexistují. — 29. Stačí ukázat, že $\{n^2 + n + 2\} = \{n\}^2 + \{n\} + \{2\} \neq \{0\}$ pro všecky zbytkové třídy podle modulu 3 i pro všecky zbytkové třídy podle modulu 5. — 30. Podle definice 7. — 31. Nulovým prvkem je číslo 0, jednotkovým prvkem číslo 10; polookruh M není okruhem, viz cvič. 13. — 32. Nulovým prvkem je $\varnothing$, jednotkovým prvkem je Z; M není okruh, viz cvič. 14. — 33. Nulový prvek neexistuje, jednotkovým prvkem je číslo 1,

viz cvič. 15. — 34. Podle definice 7, 8, 11; nulovým prvkem je číslo -1, jednotkovým prvkem číslo 0. — 35. Podle definice 7, 8, 11, 12; nulovým prvkem je číslo 1, jednotkovým prvkem číslo 0. — 36. Je-li a nulový prvek a b jednotkový prvek, pak

$x + y$:

	a	b
a	a	b
b	b	a

xy:

	a	b
a	a	a
b	a	b

— 37. Je-li a nulový prvek a b jednotkový prvek, pak

$x + y$:

	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

xy:

	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

Tabulku sčítání lze vyplnit jediným způsobem (viz cvič. 20), totéž platí pro první dva řádky a pro první dva sloupce tabulky pro násobení; nemůže být $c.c = a$, neboť M nemá dělitele nuly; nemůže být $c.c = c$, neboť pak by bylo $b = c$. — 38. Obdobně musí být

$x + y$:

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

xy:

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	d	b
d	a	d	b	c

První dva řádky a první dva sloupce tabulky pro násobení jsou zřejmé. Nemůže být $cd = a$, neboť neexistují dělitelé nuly; nemůže být $cd = c$, neboť $d \neq b$; nemůže být $cd = d$, neboť $c \neq b$; musí tedy být $cd = b$. Obdobně odvodíme, že $cc = d$, $dd = c$. První řádek a první sloupec tabulky pro sčítání je zřejmý. Nemůže být $b + c = a$, neboť pak by $bc + cc = ac$, čili $c + d = a$ a nevznikla by aditivní grupa. Není možné, aby $b + c = b$, neboť $c \neq a$; není možné, aby $b + c = c$, neboť $b \neq a$; musí tedy být $b + c = d$. Odtud $bc + cc = cd$, čili $c + d = b$ a obdobně $d + b = c$. — 39. Jsou splněny podmínky z definic 7, 8, 11. — 40. $(a + b\sqrt{2}) \pm (c + d\sqrt{2}) = (a \pm c) + (b \pm d)\sqrt{2}$, $(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (bc + ad)\sqrt{2}$,

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2} \cdot \sqrt{2}.$$

4. Vnější operace

41. $x \square 0 = 0 = x\sqrt{0}$, $x \square (r + 1) = (x \square r) \bigcirc x = \sqrt{x^2 r + x^2} = x\sqrt{r + 1}$. — 42. $x \square 1 = x$, $x \square (r + 1) = (x \square r) \bigcirc x = \frac{x^2}{r} : \left(\frac{x}{r} + x\right) = \frac{x}{r + 1}$. — 43. $x \square r = \frac{1}{x^r}$, $x \square (r + 1) = (x \square r) \bigcirc x = \frac{1}{x^r} : x = \frac{1}{x^{r+1}}$. — 44. $x \square r = -rx$, $x \square (r + 1) = (x \square r) \bigcirc x = -rx - x = -(r + 1)x$. — 45. $n\{0\} = \{0\}$ pro každé $n \in N_0$; $0\{1\} = \{0\}$, $1\{1\} = \{1\}$, $2\{1\} = \{2\}$, $3\{1\} = \{3\}$, $4\{1\} = \{4\}$; $0\{2\} = \{0\}$, $1\{2\} = \{2\}$, $2\{2\} = \{4\}$, $3\{2\} = \{1\}$, $4\{2\} = \{3\}$ atd.; pro každé $n \in N_0$ a pro každé $\{x\} \in C_5$ je $(n + 5)\{x\} = n\{x\}$; $\{0\}^0 = \{1\}$, $\{0\}^n = \{0\}$ pro každé $n \geqq 1$; $\{1\}^n = \{1\}$ pro každé $n \in N_0$; $\{2\}^0 = \{1\}$, $\{2\}^1 = \{2\}$, $\{2\}^2 = \{4\}$, $\{2\}^3 = \{3\}$, $\{2\}^{n+4} = \{2\}^n$ pro každé $n \in N_0$; $\{3\}^0 = \{1\}$, $\{3\}^1 = \{3\}$, $\{3\}^2 = \{4\}$, $\{3\}^3 = \{2\}$, $\{3\}^{n+4} = \{3\}^n$ pro každé $n \in N_0$; $\{4\}^0 = \{1\}$, $\{4\}^1 = \{4\}$, $\{4\}^{n+2} = \{4\}^n$ pro každé $n \in N_0$. — 46. $n\{0\} = \{0\}$ pro každé $n \in N_0$; $0\{1\} = \{0\}$, $1\{1\} = \{1\}$, $2\{1\} = \{2\}$, $3\{1\} =$

$= \{3\}, 4\{1\} = \{4\}, 5\{1\} = \{5\}, (n+6)\{1\} = n\{1\}$ pro každé $n \in \mathsf{N}_0$; $0\{2\} = \{0\}$, $1\{2\} = \{2\}$, $2\{2\} = \{4\}, (n+3)\{2\} = n\{2\}$ pro každé $n \in \mathsf{N}_0$; $0\{3\} = \{0\}, 1\{3\} = \{3\}, (n+2)\{3\} = n\{3\}$ pro každé $n \in \mathsf{N}_0$; $0\{4\} = \{0\}, 1\{4\} = \{4\}, 2\{4\} = \{2\}, (n+3)\{4\} = n\{4\}$ pro každé $n \in \mathsf{N}_0$; $0\{5\} = \{0\}, 1\{5\} = \{5\}, 2\{5\} = \{4\}, 3\{5\} = \{3\}, 4\{5\} = \{2\}, 5\{5\} = \{1\}, (n+6)\{5\} = n\{5\}$ pro každé $n \in \mathsf{N}_0$; $\{0\}^0 = \{1\}$, $\{0\}^n = \{0\}$ pro každé $n \geqq 1$; $\{1\}^n = \{1\}$ pro každé $n \in \mathsf{N}_0$; $\{2\}^0 = \{1\}$, $\{2\}^1 = \{2\}, \{2\}^2 = \{4\}, \{2\}^{n+2} = \{2\}^n$ pro každé $n \geqq 1$; $\{3\}^0 = \{1\}$, $\{3\}^n = \{3\}$ pro každé $n \geqq 1$; $\{4\}^0 = \{1\}, \{4\}^n = \{4\}$ pro každé $n \geqq 1$; $\{5\}^0 = \{1\}, \{5\}^1 = \{5\}, \{5\}^{n+2} = \{5\}^n$ pro každé $n \in \mathsf{N}_0$. — 47. $\{m - 1\}^2 = \{m^2 - 2m + 1\} = \{1\}$, $\{m-1\}^{2k} = (\{m-1\}^2)^k = \{1\}^k = \{1\}, \{m-1\}^{2k+1} = \{m-1\}^{2k}\{m-1\} = \{1\}\{m-1\} = \{m-1\}$. — 48. a) $\mathfrak{X} \square 0 = \mathfrak{I}, \mathfrak{X} \square 1 = \mathfrak{X}, \mathfrak{X} \square (n+2) = \mathfrak{X} \square n$ pro každé $n \in \mathsf{N}_0$. b) Pro každé $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{R}, \mathfrak{X} \neq \mathfrak{R}'$ je $\mathfrak{X} \square 0 = \mathfrak{I}, \mathfrak{X} \square 1 = \mathfrak{X}$, $\mathfrak{X} \square (n+2) = \mathfrak{X} \square n$; $\mathfrak{R} \square 0 = \mathfrak{I}, \mathfrak{R} \square 1 = \mathfrak{R}, \mathfrak{R} \square 2 = \mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R} \square 3 = \mathfrak{R}', \mathfrak{R} \square (n+4) = \mathfrak{R} \square n$ pro každé $n \in \mathsf{N}_0$ a obdobně pro $\mathfrak{R}'$; přitom $\mathfrak{R}'' = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix}$.

5. Polynomy jedné neurčité

49. a) 1; b) 2; c) 4; d) 2^r, neboť koeficient $a_r = \{1\}$, kdežto každé a_i pro $i < r$ může nabýt kterékoli z hodnot $\{0\}, \{1\}$. — 50. 2.3^r, neboť koeficient a_r může nabýt pouze hodnot $\{1\}, \{2\}$, kdežto každé a_i pro $i < r$ kterékoli z hodnot $\{0\}, \{1\}, \{2\}$. — 53. a) $y^4 - 3y^3 + 4y^2 - 2y + 1$; b) y^4. — 54. a) $1 - x + x^2, 0$; b) $-\frac{29}{27} - \frac{4}{9}x - \frac{2}{3}x^2, \frac{56}{27} - \frac{46}{27}x$; c) $0, 1 - 2x + 3x^2$. — 55. Je-li $A = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_rx^r$, kde $a_r = \pm 1$, $B = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_sx^s$, kde $b_s \neq 0$, a je-li $s \geqq r$, pak neúplný podíl $Q = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \ldots + q_{s-r}x^{s-r}$ a zbytek $R = z_0 + z_1x + z_2x^2 + \ldots + z_{r-1}x^{r-1}$. Pro neznámé koeficienty q_i dostaneme $s - r + 1$ rovnic tvaru $a_rq_{s-r} = b_s$, $a_rq_{s-r-1} + a_{r-1}q_{s-r} = b_{s-1}$, $a_rq_{s-r-2} + a_{r-1}q_{s-r-1} + a_{r-2}q_{s-r} = b_{s-2}, \ldots$, z nichž je mož-

no postupně vypočítat $q_{s-r}, q_{s-r-1}, q_{s-r-2}, \ldots$, neboť $a_r = \pm 1$. Pro koeficienty z_i dostaneme r rovnic tvaru $c_i + z_i = b_i$, kde $0 \leqq i < r$, přičemž výraz c_i je utvořen z koeficientů a_j a (již vypočtených) q_k. — 56. a) $(x - 6)(x - 9)$; b) $(x + 3)(x - 18)$; c) $(4x - 3)(3x - 4)$; d) $\left(x + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)$; jednoho činitele můžeme přitom ještě násobit libovolným (komplexním) číslem $k \neq 0$ a druhého číslem $\frac{1}{k}$. — 57. a) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$, b) $(x - 2)(x^2 + x + 1)$; c) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$; d) $(x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$. — 58. a) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$; b) $(x - 2)\left(x + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)$; c) $\left(x + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)$; d) $\left(x + \frac{1 + i}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1 - i}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1 + i}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1 - i}{\sqrt{2}}\right)$. — 59. Polynom $A + \bar{A}$ má koeficienty $a_i + \bar{a}_i$, kde $0 \leqq i \leqq r$, polynom $A\bar{A}$ má koeficienty $a_0\bar{a}_0, a_1\bar{a}_0 + a_0\bar{a}_1, a_2\bar{a}_0 + a_1\bar{a}_1 + a_0\bar{a}_2, \ldots$, což jsou reálná čísla. — 60. $\overline{a_0 + a_1 a + a_2 a^2 + \ldots + a_r a^r} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1\bar{a} + \bar{a}_2\bar{a}^2 + \ldots + \bar{a}_r\bar{a}^r$.

6. Polynomy více neurčitých

63. a) $(2x - 3y + 1)(3x + 2y - 1)$; b) $[(1 + \sqrt{2})x - y + (1 - \sqrt{2})][(-1 + \sqrt{2})x + y - (1 + \sqrt{2})]$; c) $(x + iy - 1 + i)(x - iy - 1 - i)$; jednoho činitele můžeme přitom násobit libovolným komplexním číslem $k \neq 0$ a druhého číslem $\frac{1}{k}$; d) nelze rozložit. — 64. $a = -6$, $(x + 2y - 3)(x + 3y + 2)$. — 65. $a = 2$, $[x - (1 - i)y + 1][x - (1 + i)y + 1]$; $a = 0$, $[x - (1 + i)y + i][x - (1 - i)y - i]$. — 66. b) Polynom dvou neurčitých má nejvýše $k + 1$ členů k-tého stupně s různými exponenty; polynom r-tého stupně má

tedy nejvýše $1 + 2 + 3 + \ldots + (r + 1) = \frac{(r+1)(r+2)}{2}$ členů s různými exponenty. c) Podle b) dostaneme $\frac{1.2}{2} + \frac{2.3}{2} + \frac{3.4}{2} + \ldots + \frac{(r+1)(r+2)}{2} = \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{6}$; jednotlivé členy upravíme podle vzorce $\frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3-k)}{6} = -\frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$. — 68. Položíme a) $x = a, y = b, z = -c$; b) $x = b, y = c, z = a$. — 70. Položíme a) $x = a, y = b, z = d, u = c$; b) $x = b, y = a, z = d, u = c$; c) $x = a, y = c, z = d, u = b$. — 71. Vychází se z nerovnosti $(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 \geqq 0$. — 72. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 - xy + y^2 - xz - yz + z^2)$ a dále podle cvič. 71. — 73. $(x + y + z)(x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z)(x + \varepsilon^2 y + \varepsilon z)$, kde $\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. — 74. $(x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(x - y - z)$.