2. kapitola

ÚLOHY Z TEÓRIE ČÍSEL

V teórii čísel možno použitím Dirichletovho princípu nájsť často neočakávané výsledky. Dirichlet sám s úspechom používal tento princíp v teórii čísel a odtiaľ má tento princíp svoje meno. Je však veľmi pravdepodobné, že bol niektorými matematikmi využívaný i pred tým. Možno, že nie tak výrazne a vedome.

Príklad 7. Dané je 82 prirodzených čísel. Treba dokázať, že sa medzi nimi dajú nájsť dve také, že ich rozdiel je deliteľný číslom 81.

Riešenie. Rozdelíme dané čísla do 81 skupín, podľa toho, aký zvyšok dávajú po delení číslom 81. Teda do prvej skupiny dáme tie, ktoré dávajú zvyšok 0 po delení 81, do druhej tie, ktoré dávajú zvyšok 1, do tretej tie, ktoré dávajú zvyšok 2, atď., až do osemdesiatej prvej dáme tie čísla, ktoré po delení číslom 81 dávajú zvyšok 80. Keďže skupín je menej ako čísel, aspoň v jednej skupine sa nachádzajú dve čísla. Teda medzi danými číslami sa dajú nájsť dve, ktoré po delení 81 dávajú rovnaký zvyšok. Ich rozdiel je deliteľný číslom 81.

Úloha 15. Ak je dané $n + 1$ prirodzených čísel, potom medzi nimi existujú dve, ktorých rozdiel je deliteľný číslom n. Dokážte!

Úloha 16. Ku každému prirodzenému číslu n existuje číslo zapísané v desiatkovej sústave v tvare 11...100...0, ktoré je deliteľné číslom n.

Úloha 17. Ku každému prvočíslu p rôznemu od 2,5 existuje číslo tvaru $111\dots1$ (t. j. zapísané v desiatkovej sústave iba pomocou cifry 1) deliteľné p.

Príklad 8. Je dané 67 prirodzených čísel. Dokážte, že možno spomedzi nich vybrať niekoľko tak, aby ich súčet bol deliteľný číslom 67.

Riešenie. Označme dané čísla $a_1, a_2, \dots, a_{67}$. Utvorme čísla $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, s_{67} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{66} + a_{67}$. Ak je niektoré z čísel $s_1, s_2, \dots, s_{67}$ deliteľné číslom 67, úloha je riešená. Ak nie je, čísla $s_1, s_2, \dots, s_{67}$ rozdelíme do 66 skupín a to tak, že do n-tej skupiny dáme tie, ktoré po delení číslom 67 dávajú zvyšok n ($n = 1, 2, \dots, 66$). Podľa Dirichletovho princípu aspoň v jednej skupine sa nájdu dve, označme ich s_k, s_h, $k < h$. Potom $s_h - s_k$ je deliteľné 67, pričom $s_h - s_k = a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_h$.

Úloha 18. Spomedzi n čísel sa dá vybrať niekoľko tak, že ich súčet je deliteľný n. Dokážte!

Podobným obratom, ako príklad 7 a predošlú úlohu, je možné riešiť nasledujúce úlohy.

Úloha 19. Ignác Kvantifikátor (syn známeho profesora Kvantifikátora) rieši po dobu troch mesiacov pred krajským kolom *MO* aspoň jednu úlohu denne. Pritom za kalendárny týždeň nerieši viac, ako 13 úloh. Dokážte, že sa dá nájsť niekoľko po sebe idúcich dní v uvedenom období, za ktoré rieši práve 33 úloh!

Úloha 20. Jeho priateľka v tom istom období rieši aspoň dve úlohy denne, ale za týždeň nie viac, ako 17. Dokážte, že buď existuje niekoľko po sebe idúcich dní, za ktoré rieši práve 23 úloh, alebo niekoľko po sebe idúcich dní, za ktoré rieši práve 46 úloh!

Úloha 21. Nech p a q sú nesúdeliteľné prirodzené čísla. Dokážte, že existuje prirodzené číslo n také, že číslo

$1 + q + q^2 + \ldots + q^n$ je deliteľné číslom p! Ak $1 + q + q^2 + \ldots + q^n$ je deliteľné číslom p a k je prirodzené číslo, potom aj číslo $1 + q + q^2 \ldots + q^{k(n+1)-1}$ je deliteľné číslom p. Dokážte!

Príklad 9. Dokážte, že dekadický zápis niektorej mocniny čísla 37 končí skupinou cifier 00001! (Tu i v ďalšom, tým myslíme, že dané číslo má v dekadickom zápise okrem cifry 1 na mieste jednotiek ešte aspoň jednu cifru rôznu od nuly. Teda napr. dekadický zápis čísla 1 nekončí skupinou cifier 00001.)

Riešenie. Vezmeme čísla $37, 37^2, 37^3$, atď., až $37^{100\,000}$. Ak niektoré z nich po vydelení číslom 100 000 dá zvyšok 1, sme hotoví, pretože jeho zápis v desiatkovej sústave končí 00001. Ak žiadne nedáva po delení 100 000 zvyšok 1, rozdelíme ich na skupiny tak, že do n-tej skupiny dáme tie čísla 37^k, ktoré dávajú po delení 100 000 zvyšok n, pričom $n = 0, 2, 3, \ldots, 99\,998, 99\,999$. Teda skupín je 99 999 a čísel 100 000. Existujú dve čísla h, $k$také, že $37^k - 37^h$ je deliteľné 100 000. Predpokladajme, že $k > h$. Keďže $37^k - 37^h = 37^h(37^{k-h} - 1)$ a 37 je nesúdeliteľné s číslom 100 000, je $37^{k-h} - 1$ deliteľné číslom 100 000, čiže 37^{k-h} dáva po delení číslo 100 000 zvyšok 1.

Úloha 22. Nech číslo p je nesúdeliteľné s číslom 100 000. Dokážte, že dekadický zápis niektorej mocniny čísla p končí skupinou cifier 00001! Dokážte tiež, že pre každé n prirodzené existuje také prirodzené číslo k, že p^k má dekadický zapis končiaci skupinou n núl a cifrou 1!

Úloha 23. Nech čísla p a q sú nesúdeliteľné. Dokážte, že niektorá kladná mocnina čísla p dáva po delení číslom q zvyšok 1.

Poznámka. Tzv. *Malá veta Fermatova* tvrdí, že tá mocnina čísla p je p^{q-1}. Jej dôkaz je však podstatne zložitejší.

Ak x je reálne číslo, znakom $[x]$ označujeme tzv. *celú* *časť* čísla x. Je to také celé číslo, že $[x] \leqslant x < [x] + 1$. Napr. $[3] = 3$, $[-7] = -7$, $[\sqrt{2}] = 1$, $[-7{,}2] = -8$ a pod.

Príklad 10. Dokážte, že existuje také prirodzené číslo $k \leqslant 100$, že rovnici $\left[\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right] = k$ vyhovuje aspoň 100 prirodzených čísel!

Riešenie. Pre x prirodzené, $x \leqslant 10\,000$ je $1 \leqslant \left[\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right] \leqslant$ $\leqslant 100$. Prirodzené čísla nie väčšie ako 10 000 rozdeľme do tried tak, že do k-tej triedy, $k = 1, 2, \ldots, 100$ dáme tie čísla, pre ktoré $\left[\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right] = k$. Aspoň jedna z týchto tried obsahuje nie menej než 100 čísel (podľa (D)). Príslušné k vyhovuje požiadavkám úlohy.

Úloha 24. Dokážte, že existuje také prirodzené číslo k

a) $k \leqslant 6000$, že rovnici $[\sqrt{x} \log x] = k$ vyhovuje aspoň 160 prirodzených čísel!

b) $k \leqslant 600$, že rovnici $[\sqrt{x} \log x] = k$ vyhovuje aspoň 1600 prirodzených čísel!

Príklad 11. Nech x je iracionálne číslo. Ak k je ľubovoľné prirodzené číslo, potom existujú také celé čísla m, n, že $0 < m + nx < \frac{1}{k}$. Dokážte!

Riešenie. Uvažujme o číslach $x_1 = x - [x]$, $x_2 = 2x - [2x]$, $\ldots$, $x_k = kx - [kx]$, $x_{k+1} = (k + 1)\,x - [(k + 1)\,x]$. Tieto všetky čísla sú kladné a menšie ako 1. Pre každé $i = 1, 2, \ldots, k, k + 1$ je $[ix] \leqslant ix < [ix] + 1$. Pritom nemôže byť $x_i = 0$, pretože by bolo $x = \frac{[ix]}{i}$ a keďže $[ix]$ je celé, bolo by x racionálne. Všetky čísla $x_1, x_2, \ldots,$

x_{k+1} sú navzájom rôzne. Keby totiž bolo $x_i = x_j$ pre $i \neq j$, bolo by $ix - [ix] = jx - [jx]$, odkiaľ $x = \dfrac{[ix] - [jx]}{i - j}$, čo je spor.

Interval $\langle 0,1)$ rozdelíme na k rovnakých častí, t. j. uvažujeme intervaly $\langle 0,\frac{1}{k})$, $\langle \frac{1}{k},\frac{2}{k})$, $\langle \frac{2}{k},\frac{3}{k})$, $\ldots$, $\langle \frac{k-1}{k},\frac{k}{k})$. Podľa (d) aspoň do jedného z týchto intervalov padnú aspoň dve z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$. Nech sú to čísla x_i, x_j a nech je $x_i < x_j$. Potom je $0 < x_j - x_i < \frac{1}{k}$, čiže $0 < jx - [jx] - (ix - [ix]) < \frac{1}{k}$. Ak položíme $m = [ix] - [jx]$ a $n = j - i$, bude $0 < m + nx < \frac{1}{k}$.

Poznámka. Z príkladu 11 vyplýva, že medzi každými dvoma číslami a, b existuje číslo tvaru $m + nx$. Podrobnejšie: ak $a < b$ a ak x je iracionálne číslo, potom existujú celé čísla m, n tak, že $a < m + nx < b$.

Dôkaz. Nájdeme prirodzené číslo k tak, aby bolo $\frac{1}{k} < b - a$. Podľa príkladu 11 existujú celé čísla m_0, n_0 tak, že $0 < m_0 + n_0 x < \frac{1}{k}$. Nech h je najmenšie celé číslo, pre ktoré $a < h(m_0 + n_0 x)$, teda $h = \left[\dfrac{a}{m_0 + n_0 x}\right] + 1$. Potom je aj $h(m_0 + n_0 x) < b$. Keby totiž bolo $h(m_0 + n_0 x) \geq b$, bolo by $(h - 1)(m_0 + n_0 x) = h(m_0 + n_0 x) - (m_0 + n_0 x) \geq b - \frac{1}{k} > a$. Stačí teda zvoliť $m = hm_0$, $n = hn_0$ a bude $a < m + nx < b$.

Úloha 25. Nech $x \neq 0$ je racionálne číslo, ktoré sa dá písať v tvare $x = \frac{p}{q}$, kde p je celé, q prirodzené a p, q sú nesúdeliteľné. Ak k je prirodzené číslo, $k < q$, potom existujú také celé čísla m, n že $0 < m + nx < \frac{1}{k}$. Dokážte!

Poznámka 1. Ak x je racionálne číslo, $x \neq 0$, $x = \frac{p}{q}$, kde p je celé a q prirodzené číslo a α, β sú také čísla, že $\beta - \alpha < \frac{1}{q}$, potom existujú celé čísla m a n tak, že $\alpha < < m + nx < \beta$.

2. Ak $k \geq q$ potom neexistujú také celé čísla m a n, aby $0 < m + nx < \frac{1}{k}$.

Úloha 26. Dokážte tvrdenie v poznámke 1.

Úloha 27. Dokážte tvrdenie v poznámke 2.

Nasledujúci príklad a úlohy využívajú skôr myšlienku dôkazu Dirichletovho princípu, než princíp sám. Taká situácia sa často vyskytuje bez toho, že by sme si ju uvedomovali. Nie je to potrebné si uvedomovať, ale je vhodné nacvičiť sa pohotovo myšlienku tohoto typu využívať. Je samozrejmé, že uvedené úlohy možno riešiť i priamo použitím Dirichletovho princípu, avšak za cenu väčšej ťažkopádnosti.

Hovoríme, že prvočísla p, q nasledujú po sebe, ak $p < q$ a ak neexistuje také prvočíslo r, že $p < r < q$. Ak p, q sú prvočísla, ktoré nasledujú po sebe a $q - p = 2$, hovoríme, že p, q je *pár dvojičiek.*

Príklad 12. Ak je známe, že existuje práve 7 prvočísel nie menších než 1061 a nie väčších než 1097 a existujú medzi nimi dve prvočísla p, q nasledujúce po sebe a také, že $p - q = 18$, treba dokázať, že existujú aspoň dva páry dvojičiek medzi 1061 a 1097.

Riešenie. Označíme $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7$ prvočísla medzi 1061 a 1097 usporiadané podľa veľkosti. Teda $1061 \leqslant p_1 < p_2 < \ldots < p_6 < p_7 \leqslant 1097$. Podľa zadania existuje také i (i je niektoré z čísel 1, 2, ..., 6), že $p_{i+1} - p_i = 18$. Žiaden z rozdielov $p_{j+1} - p_j$ nemôže byť nepárny. Ale $(p_2 - p_1) + (p_3 - p_2) + \ldots + (p_7 - p_6) \leqslant 36$. Keďže jeden z týchto rozdielov je 18, súčet piatich rozdielov neprevyšuje 18. Ak medzi týmito rozdielmi je jeden väčší alebo rovný 6, potom medzi zbývajúcimi štyrmi musia byť aspoň dva, ktoré sa rovnajú 2 (lebo ich súčet neprevyšuje 12). Ale, ak by každý rozdiel bol menší ako 6, t. j. neprevyšoval by 4 a neexistovali by dva rovnajúce sa dvom, potom by uvedené rozdiely museli byť 2, 4, 4, 4, 4 (prípadne v inom poradí). Máme teda jeden rozdiel 2, štyri rozdiely 4 a jeden rozdiel 18. Teda aspoň dva rozdiely 4 musia ísť po sebe (Dirichletov princíp), t. j. nastáva situácia $p_j < p_{j+1} < p_{j+2}$, pričom $p_{j+1} = p_j + 4$, $p_{j+2} = p_j + 8$. Ale to je spor, lebo p_j nie je deliteľné tromi, dáva teda po delení zvyšok 1 alebo 2, potom však buď $p_j + 4$ alebo $p_j + 8$ je deliteľné tromi, lebo dávajú zvyšok postupne 2,0 alebo 0,1.

Úloha 28. Medzi číslami 3 907 a 3 947 je 9 prvočísel a rozdiel dvoch z nich po sebe idúcich je 12. Dokážte, že medzi 3 907 a 3 947 sú aspoň 2 páre dvojičiek!

Úloha 29. Ak medzi číslami a, b je $k \geq 2$ prvočísel, $a < b$ a rozdiel dvoch z nich po sebe nasledujúcich je h, potom existuje medzi a a b aspoň $\left[2(k-1) - \frac{b-a-h}{2}\right]$ párov dvojičiek. Dokážte!

Takto získaný odhad je veľmi slabý. Porovnajte ho napr. s tvrdením úlohy 28!