Dirichletov princíp

1. kapitola. Dirichletov princíp

In: Lev Bukovský (author); Igor Kluvánek (author): Dirichletov princíp. (Slovak). Praha: Mladá fronta, 1969. pp. 5–11.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403700

1. kapitola

DIRICHLETOV PRINCÍP

Pod menom „*Dirichletov princíp*" sa obyčajne uvádza nasledujúce tvrdenie:

(d) Ak je viac než n predmetov rozdelené do n skupín (n je prirodzené číslo), potom aspoň v jednej skupine sa nachádzajú aspoň dva predmety.

V konkrétnych situáciách tvrdenie (d) hovorí napr. toto: Profesor Kvantifikátor nemôže rozmiestniť svojich päť detí do štyroch izieb svojho bytu tak, aby v každej izbe bolo najviac jedno dieťa, tj. nutne musia aspoň v jednej izbe byť aspoň dve deti.

Ak má profesor Kvantifikátor deväť fajok svojej zbierky v zásuvkách písacieho stola a stôl má osem zásuviek, potom aspoň v jednej zásuvke je viac než jedna fajka.

Tvrdenie (d) sa niekedy nazýva „*zásuvkový princíp*". V literatúre sa stretneme i s označením „*holubníkový princíp*". Autori, ktorí dávajú tento názov tvrdeniu (d), majú na mysli holuby profesora Kvantifikátora (vo voľnom čase sa venuje chovu ušľachtilých holubov). Má totiž n holubníkov, ale viac než n holubov. Potom aspoň v jednom holubníku musí mať dvoch, alebo viac holubov.

Tvrdenie (d) nie je ťažké **dokázať**.

Nech k_i je počet predmetov v i-tej skupine ($i = 1, 2, \ldots, n$). Keby v každej skupine bol naviac jeden predmet (tj. žiaden, alebo iba jeden), čiže k_i je menšie, alebo rovné jednej, pre $i = 1, 2, \ldots, n$, potom všetkých predmetov by bolo $k_1 + k_2 + \ldots + k_n \leqslant 1 + 1 + \ldots + 1 = n$.

Jedná sa teda o tvrdenie na pohľad veľmi jednoduché, ale vhodným použitím môžeme dostať veľmi silné výsledky. Obyčajne pomocou Dirichletovho princípu dokazujeme existenciu takých objektov, ktoré nemožno (alebo je veľmi ťažké) efektívne skonštruovať.
Uveďme príklad.

Príklad 1. Podľa antropológie neexistujú ľudia s väčším počtom vlasov, ako 500 000. Dokážeme, že v Prahe existujú dvaja ľudia s rovnakým počtom vlasov.

Riešenie. Najskôr uvážime, že Praha má vyše milión obyvateľov. Obyvateľov Prahy rozdelíme do skupín tak, že do n-tej dáme všetkých obyvateľov Prahy, ktorí majú práve n vlasov ($n = 0, 1, 2, \ldots, 500\,000$). Podľa tvrdenia antropológov, každý obyvateľ Prahy padne do niektorej z tých skupín. Pretože Pražanov je viac ako skupín, aspoň v jednej skupine je viac ako jeden Pražan, tj. existujú dvaja obyvatelia Prahy s rovnakým počtom vlasov.

Uvedený príklad je typický tým, že efektívne nájsť dvoch Pražanov s rovnakým počtom vlasov je z pochopiteľných dôvodov prakticky nemožné.

Bezprostredné použitie Dirichletovho princípu si možno overiť na nasledujúcich úlohách.

Úloha 1. Súkromná knižnica má 1100 sväzkov, pričom žiaden z nich nemá viac ako 1000 strán. Dokážte, že v knižnici existujú dve knihy s rovnakým počtom strán.

Úloha 2. Na vysokú školu prijali do prvého ročníka 120 poslucháčov, ktorí maturovali na 84 stredných školách. Potom sa v prvom ročníku nájdu aspoň dvaja poslucháči, kterí sa poznajú zo strednej školy. Dokážte!

Úloha 3. Neporiadny študent mal v zásuvke ponožky piatich farieb (z každej farby aspoň dve). Koľko kusov ponožiek musí po tme vybrať, aby bol istý, že mezdi nimi budú dve rovnakej farby?

Úloha 4. Hádžeme dvoma kockami. Koľkokrát treba hodiť, aby sme mali zaručené, že dvakrát padol rovnaký súčet bodov na kockách?

Dirichletov princíp možno formulovať i všeobecnejšie:

(D) Ak je viac než mn predmetov rozdelených do n skupín, potom aspoň v jednej skupine je viac ako m predmetov.

Dôkaz je rovnaký ako prv. Nech k_i je počet predmetov v i-tej skupine ($i = 1, 2, \ldots, n$). Keby v každej skupine bolo najviac m predmetov, tj. $k_i \leqslant m$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$, potom všetkých predmetov by bolo $k_1 + k_2 + \ldots + k_n \leqslant m + m + \ldots + m = mn$.

Príklad 2. Konferencie sa zúčastnilo 40 delegátov z 13 krajín. Dokážte, že delegácia aspoň jednej krajiny mala viac ako troch členov!

Riešenie. Rozdelíme delegátov do skupín podľa krajín, tj. v každej skupine sú všetci delegáti istej krajiny. Keďže skupín je 13 a delegátov je viac ako $3 . 13 = 39$, musia byť aspoň v jednej skupine viac ako traja delegáti.

Úloha 5. Koľkokrát treba hodiť troma kockami, aby bolo zistené, že aspoň štyrikrát padol rovnaký súčet bodov na kockách?

Úloha 6. Koľkokrát treba hodiť dvoma kockami, aby trikrát padla tá istá dvojica čísel? Úlohu riešte a) v prípade, že kocky sú rovnaké (t. j. dvojice (2,1) a (1,2) pokladáme za rovnaké); b) v prípade, že kocky sú rôzne (napr. rôznej farby; v tomto prípade dvojice (2,1) a (1,2) považujeme za rôzne).

Predošlé príklady a úlohy sa dali riešiť bezprostredným použitím Dirichletovho princípu. Stačilo vhodne zvoliť rozdelenie do skupín, čo obyčajne vyplynulo zo zadania úlohy. Často sa však stáva, že k riešeniu nedôjdeme takto bezprostredne, ale sme nútení využiť i iné okolnosti, ktoré vyplývajú zo zadania úlohy.

Príklad 3. Daný je vypuklý štrnásťstěn s 9 vrcholmi. Dokážte, že existuje na ňom vrchol, z ktorého vychádza aspoň 5 hrán.

Riešenie. Ako vieme, pre počet s stien, počet v vrcholov a počet h hrán vypuklého mnohostena platí *Eulerov vzťah*

$$s + v = h + 2.$$

Teda náš 14-sten má $14 + 9 - 2 = 21$ hrán. Rozdeľme každú hranu napoly, dostaneme 42 polhrán. Tieto rozdeľme do 9 skupín, podľa toho, z ktorého vrcholu vychádzajú. Podľa (D) v jednej skupine je viac ako 4 t. j. aspoň 5 polhrán. Teda z jedneho vrcholu vychádza aspoň 5 polhrán, čiže aj hrán.

Úloha 7. Daný je vypuklý sedmisten so 6 vrcholmi. Dokážte, že práve jedna stena toho sedmistena je štvoruholník.

Niekedy vedie k cieľu použitie Dirichletovho princípu niekoľkokrát za sebou.

Príklad 4. Konferencie sa zúčastnilo 70 delegátov, ktorí hovoria 11 rôznymi jazykmi. Jedným jazykom hovorí najviac 15 delegátov. Organizačný výbor rozhodol, že za oficiálny bude považovať taký jazyk, ktorým hovorí najmenej 5 delegátov. Dokážte, že na konferencii boli aspoň 3 oficiálne jazyky.

Riešenie. Keďže delegátov je 70 a hovoria 11 jazykmi, iste jedným jazykom hovorí nie menej, ako 5 delegátov. Teda existuje jeden oficiálny jazyk, nazvime ho jazyk A. Jazykom A hovorí najviac 15 delegátov, t. zn., že ostatnými 10 jazykmi hovorí aspoň 55 delegátov. Teda medzi týmito 10 jazykmi sa musí nájsť jazyk (označme ho B), ktorým hovorí najmenej 5 delegátov. To je druhý oficiálny jazyk. Jazykom B hovorí najviac 15 delegátov, teda zbývajúcimi 9 jazykmi hovorí aspoň 40 delegátov. Zasa podľa

Dirichletovho princípu možno spomedzi týchto 9 jazykov vybrať jeden oficiálny.

Existenciu štyroch oficiálnych jazykov nie je možné dokázať (protipríkladom je napríklad nasledovná situácia: tromi jazykmi hovorí po 15 delegátov, siedmimi jazykmi hovorí po 3 delegátov a jedným jazykom hovoria 4 delegáti).

Iné podobné ukážky sú napr. v kapitole V.

Uvedieme ešte niekoľko rôznych, prípadne i náročnejších príkladov a úloh.

Príklad 5. Treba dokázať, že spomedzi ľubovoľne zvolených 13 (reálnych) čísel možno vybrať dve, označme ich x, y, také, že

$$0 < \frac{y - x}{1 + xy} < 2 - \sqrt{3}.$$

Riešenie. Označme dané čísla $a_1, a_2, \ldots, a_{13}$. Nech b_1, $b_2, \ldots, b_{13}$ sú také čísla ležiace medzi $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$, že $a_1 = \operatorname{tg} b_1$, $a_2 = \operatorname{tg} b_2, \ldots, a_{13} = \operatorname{tg} b_{13}$. (Také čísla určitě existujú. Spomeňte si, že funkcia $y = \operatorname{tg} x$ nadobúda v intervale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ všetky reálne hodnoty). Rozdelíme interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ na 12 rovnakých častí. Podľa (d) aspoň v jednej z týchto častí existujú dve z čísel $b_1, b_2, \ldots, b_{13}$, nech sú to napr. α, β (napr. $\alpha = b_3$, $\beta = b_7$, alebo podobne). Nech naviac $\alpha < \beta$ (t. j. označili sme α menšie a β väčšie z nich). Potom $0 < \beta - \alpha < \frac{\pi}{12}$. Označme $x = \operatorname{tg} \alpha$, $y = \operatorname{tg} \beta$. Teda x je niektoré z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{13}$, a y tiež.

Keďže funkcia tg x je v intervale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ rastúca, máme

$$\frac{y-x}{1+xy} = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}(\beta-\alpha) < \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3},$$

a naše tvrdenie je dokázané.

Úloha 8. Spomedzi $n+1$ ľubovoľne zvolených čísel možno vždy vybrať dve tak, že ak ich označíme x, y, bude

$$0 < \frac{y-x}{1+xy} < \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}.$$

Dokážte!

Úloha 9. Spomedzi ľubovoľne zvolených 11 čísel intervalu (1,100) sa vždy dajú vybrať dve tak, že ich podiel je menší než 1,6 a väčší než 1. Dokážte!

Príklad 6. V záhrade tvaru obdĺžnika o rozmeroch 20 m × 15 m musí byť menej než 26 stromov, ak má byť zachované pravidlo, že vzdialenosť dvoch stromov nie je menšia než 5 m. Dokážte!

Riešenie. Pripusťme, že by v záhrade bolo viac, než 25 stromov. Rozdelíme záhradu na obdĺžniky rozmerov 4 m × 3 m. Takých obdĺžnikov sa do našej záhrady vmestí práve 25. Teda podľa (d) aspoň v jednom z týchto obdĺžnikov musia byť aspoň dva stromy. Keďže uhlopriečka obdĺžnika má dĺžku 5 m, vzdialenosť týchto stromov je menšia než 5 m.

Úloha 10. V záhrade o rozmeroch 35 m × 42 m je 100 stromov. Dá sa v nej nájsť obdĺžnik o rozmeroch 3 m × 5 m taký, aby na ňom rástli aspoň dva stromy?

Úloha 11. Ak je na štvorci rozmerov 10 × 10 umiestené 101 bodov, potom možno vybrať taký trojuholník o plošnom obsahu 1 cm², že na ňom sú aspoň dva spomedzi daných bodov.

Úloha 12. V záhrade o rozmeroch 80 m $\times$ 90 m rastie 365 stromov. Dá sa nájsť časť záhrady tvaru obdĺžnika o rozmeroch 5 m $\times$ 8 m, na ktorej rastú aspoň 3 stromy?

Úloha 13. Na obdĺžniku rozmerov 27 m $\times$ 36 m je umiestené 1945 bodov. Dokážte, že aspoň 7 z nich možno naraz pokryť trojuholníkom plošného obsahu $3\,\cancel{\mathrm{c}}\mathrm{m}^2$.

Úloha 14. Ak je v štvorci o strane 1 umiestené ľubovoľne 51 bodov, potom možno niektoré tri spomedzi nich pokryť kruhom o polomere $\frac{1}{7}$.