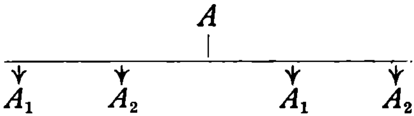
1. kapitola

AXIOMATIZOVANÁ TEÓRIA A JEJ MODEL

1.1. Pojem základný a pojem odvodený

Začneme s príkladom zo života. Často se nám stane, že niekto nám, alebo my niekomu vysvetľujeme, či ozrejmujeme nejaký pojem. Napríklad pojem „aorta" vysvetlíme vetou „je to hlavná tepna vedúca priamo zo srdca". Tak sme neznámy pojem aorta (označme ho symbolom A) objasnili použitím štyroch ďalších pojmov: „hlavná tepna", „viesť", priamo" a „srdce" (označme ich v poradí symbolmi A_1, A_2, A_3, A_4). Schématický zápis takéhoto vysvetľovania vyzerá nasledovne



(1)

Vysvetľovanie je ukončené, ak ten, ktorému sme pojem A ozrejmovali pozná význam pojmov $A_1 - A_4$. Ak náhodou dotyčný nevie čo je to „hlavná tepna $= A_1$", potom pokračujeme vo vysvetľovaní vetou „je to najväčšia cieva, ktorou prúdi okysličená krv". Nových päť pojmov: „najväčší $= A_{11}$", „cieva $= A_{12}$", „prúdiť $= A_{13}$", „krv $= A_{14}$" a „okysličený $= A_{15}$" rozšíri schemu (1) na tvar

$$
\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\
 & A_1 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drr] \arrow[drrr] & A_2 & A_3 & A_4 \\
A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15}
\end{tikzcd}
\tag{2}
$$

Dajme tomu, že osoba, ktorej sme pojem „aorta“ vysvetľovali pozná už význam pojmov A_{11} — A_{15} ako aj A_2, A_3, A_4. Vysvetľovanie je ukončené.

Pri systematickom vyučovaní, napríklad v škole, postupujeme pri vysvetľovaní práve naopak. Začíname od jednoduchých, všeobecne známych pojmov a pomocou týchto zavádzame (učíme) pojmy čoraz zložitejšie. Zápis takéhoto postupu sa od schémy (2) odlišuje len zmenenou orientáciou šipiek. Presne určiť, či dokonca vymenovať všetky „všeobecne známe pojmy“ je však v oboroch ako sú história, medicína, právo atď. asi nemožné. No v exaktných disciplínach je možné postupovať tak, že začíname vymenovaním „všeobecne známych pojmov“ a na týchto postupne staviame celú teóriu. Miesto označenia „pojem všeobecne známy“ budeme užívať termín *pojem základný*; niekedy sa tiež hovorí *pojem primárny*. Pojem definovaný pomocou pojmov základných nazveme *pojmom odvodeným*; niekedy sa tiež hovorí *pojem sekundárny*. Okrem pojmov základných a odvodených vystupujú v reči exaktnej disciplíny ešte dva druhy slov. Sú to termíny prevzaté z inej exaktnej disciplíny, tieto nazveme *pojmy doplnkové* a konečne slová typu „nech“, „môžem nájsť“, „v tom prípade“, atď., ktoré spolu s gramatickou stavbou slovenčiny nazveme *prirodzeným jazykom*.

Každé slovo jazyka, ktorým hovorí presne budovaná exaktná disciplína patrí do jednej a len jednej zo skupín:

1.) pojmy základné,

2.) pojmy odvodené,
3.) pojmy doplnkové,
4.) prirodzený jazyk.
Ilustrujme túto klasifikáciu na príklade.

Príklad 1. Za základné pojmy planimetrie volíme tri termíny

$$\text{bod, priamka, ležať na.} \tag{3}$$

V tvrdení: „Nech *a*, *b* sú dve rovnobežné priamky a nech priamka *c* je rôznobežná s priamkou *a*, potom priamka *c* je rôznobežná aj s priamkou *b*" je 19 slov (symboly *a*, *b*, *c* nie sú slová). Tieto patria v poradí skupinám: 4, 4, 3, 2, 1, 4, 4, 1, 4, 2, 4, 1; 4, 1, 4, 2, 4, 4, 1. Pojmy „rovnobežné" a „rôznobežné" sa dajú definovať pomocou pojmov (3). Pojem „dve" patrí do aritmetiky, ktorá vystupuje ako doplnková disciplína ku planimetrii.

Úloha 1. Rovnako ako v príklade 1. preveďte slovný rozbor vety z planimetrie: Nech *A*, *B*, *C* sú tri body neležiace na priamke, potom existuje aspoň jedna priamka *a* rovnobežná s priamkou *BC* a obsahujúca bod *A*.

1.2. Axiomatizovaná teória

Hlbšie preskúmame termín „pojem základný". Je to asi taký pojem, o ktorom majú všetci ľudia rovnakú predstavu. Tento názor, bežný a oprávnený v humánnych vedách v matematike neobstojí.

Keď povieme, že pojem „srdce" je v medicíne všeobecne známy, máme na mysli fakt, že každý lekár pozná tvar, uloženie, funkciu a mnohé vlastnosti srdca. Presnejšie povedané, lekár pozná väzby medzi telom a srdcom. Pritom ani najväčší odborník nepozná tieto väzby všetky, lebo je to nemožné. V matematike úslovie „pojmy (3) sú všeobecne známe" precizujeme tak, že udáme *všetky* základné väzby medzi pojmami (3). Tieto väzby nazveme *axiomy*, niekedy tiež *postuláty*. Súhrn všetkých axiom menujeme *axiomatická sústava*. Súbor základných pojmov, odvodených pojmov, všetkých axiom a všetkých tvrdení z axiom vyplývajúcich nazveme *axiomatizovaná teória*.

Axiomy sú také výroky o základných pojmoch, ktoré prehlásime za pravdivé. Pritom nás okolnosť názornosti axiom vôbec nezaujíma. V tejto knižke sa čitateľ dozvie, že práve názornosť stála ako hlavná prekážka pri poznaní neeuklidovskej geometrie. Existuje mnoho príkladov v histórii matematiky a fyziky, kde naše vrodené predstavy brzdili hlbšie preniknutie k podstate veci. V nasledujúcom, hodne obšírnom príklade sa pokúsime oboznámiť čitateľa s jednoduchou, ale veľmi dôležitou axiomatizovanou teóriou.

Príklad 2. Axiomatizovaná teória $\mathfrak{S}$ nech je daná a.) troma základnými pojmami

$$\text{chlapec, dievča, páčiť sa} \tag{4}$$

a ďalej b.) skupinou piatich axiom:

S$_1$ Existuje aspoň jedno dievča.

S$_2$ Ak A, B sú dvaja chlapci, potom existuje aspoň jedno dievča c, ktoré sa páči aj chlapcovi A, aj chlapcovi B.

S$_3$ Ak A, B sú dvaja rôzni chlapci, potom existuje najviac jedno dievča c, ktoré sa páči aj chlapcovi A, aj chlapcovi B.

S$_4$ Ak a je dievča, potom existujú aspoň dvaja rôzni chlapci B, C, ktorým (obidvom) sa dievča a páči.

S$_5$ Ak a je dievča, potom existuje aspoň jeden chlapec B tak, že nie je pravda, že sa dievča a páči chlapcovi B.

Na základe pojmov (4) a axiom

$$\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, \mathbf{S}_4, \mathbf{S}_5 \tag{5}$$

rozvinieme teóriu $\mathfrak{S}$. Čitateľovi doporučujeme, aby niektoré z axiom rozobral podľa vzoru príkladu 1 a úlohy 1.

Dohovor 1. S. Chlapcov budeme označovať veľkými latinskými písmenami A, B, C, X, atď., dievčatá malými a, b, c, y, atď. Symbolom Ch označíme množinu chlapcov, symbolom D množinu dievčat. Základný pojem „páčiť sa" označíme symbolom ε v nasledovnom zmysle:

dievča y se páči chlapcovi X označíme $X \varepsilon y$.

Poznámka 1. S. Úslovie „dvaja chlapci A, B" nehovorí ešte, že chlapci A a B sú rôzni. Fakt, že A je chlapec môžeme zapísať tiež symbolicky $A \in \mathrm{Ch}$. Podobne a, $b \in \mathrm{D}$ značí, že a, b sú dievčatá.

Veta 1.S. Ak A, B sú dvaja rôzni chlapci, potom existuje jedno a len jedno dievča c, ktoré sa obidvom chlapcom páči.

Dôkaz. Existencia dievčaťa c vyplýva z $\mathbf{S}_2$, jeho jednoznačnosť z $\mathbf{S}_3$.

Dohovor 2.S. Dievča c z vety 1. S označíme tiež AB resp. BA. Upozorňujeme, že symbol AB je zavedený len ak $A \neq B$.

Veta 2.S. Množina Ch má aspoň tri rôzne prvky.

Dôkaz. Podľa $\mathbf{S}_1$ existuje $a \in \mathrm{D}$, podľa $\mathbf{S}_4$ existujú potom B, $C \in \mathrm{Ch}$ tak, že $B \neq C$ a $B \varepsilon a$, $C \varepsilon a$. Z axiomy $\mathbf{S}_5$ vyplýva existencia takého chlapca A, ktorému sa dievča a nepáči. Preto je $A \neq B$, $A \neq C$ a A, B, C sú tri rôzne prvky množiny Ch. Veta je dokázaná.

Úloha 2. V dôkaze vety 2. S je nezmyselný pojem. Nájdite ho a opravte dôkaz!

Definícia 1.S. Povieme, že dievča a se nepáči chlapcovi B práve vtedy, ak nie je pravda, že dievča a sa chlapcovi B páči. Značíme $B \not\varepsilon a$.

Veta 3.S. Nech a, $b \in D$ a symbolom $a \cap b$ označme množinu všetkých chlapcov X pre ktorých platí $X \varepsilon a$ a $X \varepsilon b$. Potom nastáva jeden a len jeden z prípadov

1.) $a \cap b \equiv \emptyset$,
2.) $a \cap b$ je jednoprvková,
3.) $a \equiv b$.

Dôkaz. Pretože prípady 1.), 2.) sa navzájom vylučujú, treba dokázať dve tvrdenia: $a \cap b$ je aspoň dvojprvková $\Rightarrow$ $\Rightarrow a \equiv b$; $a \equiv b \Rightarrow a \cap b$ je aspoň dvojprvková. Prvé tvrdenie vyplýva z $\mathbf{S}_3$, druhé z $\mathbf{S}_4$.

Definícia 2.S. Ak neexistuje chlapec, ktorému sa páčia dané dve rôzne dievčatá a, b, potom tieto dievčatá nazveme priateľkami. V opačnom prípade hovoríme, že a, b sú nepriateľky. Teda dievčatá $a \not\equiv b$ sú priateľkami (resp. nepriateľkami) práve keď pre ne nastáva prípad 1.) (resp. 2.) vety 3.S.

Dohovor 3.S. Budeme hovoriť tiež, že „dievča a je (ne)priateľkou dievčaťa b“ namiesto úslovia „dievčatá a, b sú (ne)priateľky“. Podobne budeme hovoriť „dievča x má (ne)priateľku namiesto „existuje dievča, ktoré je (ne)priateľkou dievčaťa x“.

Veta 4.S. Každé dievča má aspoň dve rôzne nepriateľky.

Dôkaz. Nech a je dievča a A, B, C chlapci z dôkazu vety 2.S. Označme $b \equiv AB$, $c \equiv AC$. Zo vzťahov $A \not\varepsilon a$, $A \varepsilon b$, $A \varepsilon c$ vyplýva $b \not\equiv a \not\equiv c$*). Sporom dokážeme vzťah $b \not\equiv c$. Z $b \equiv c$ vyplýva $C \varepsilon b$ a preto množina $a \cap b$ obsahuje aspoň dva prvky a to B a C, lebo $B \not\equiv C$. Pôdla vety 3.S je potom $a \equiv b$ čo je spor. Dievčatá $b \not\equiv c$ sú hľadané dve nepriateľky dievčaťa a. Dôkaz je prevedený.

Veta 5.S. Existujú tri rôzne dievčatá tak, že každé dve z nich sú nepriateľky.

Dôkaz. Existencia dievčaťa (označme ho a) vyplýva z $\mathbf{S}_1$.

---

*) Namiesto $a \not\equiv b$, $a \not\equiv c$ píšeme stručne $b \not\equiv a \not\equiv c$; podobne i ďalej.

Teraz stačí vziať dievčatá a, b, c z dôkazu predošlej vety.

Dôsledok. Množina D má aspoň tri rôzne prvky.

Veta 6.S. Ku každému chlapcovi X existuje aspoň jedno dievča x, ktoré sa mu nepáči.

Dôkaz. Podľa dôsledku existujú dve rôzne dievčatá a, b. Ak je $X \notin a$, alebo $X \notin b$, potom sme hotoví. Nech teda $X \in a$, $X \in b$. Podľa $\mathbf{S}_4$ existujú chlapci A, B tak, že $A \not\equiv X \not\equiv B$, $A \in a$, $B \in b$. Potom je $A \not\equiv B$, lebo inak by vzhľadom na vetu 3.S bolo $a \equiv b$. Dievča $x \equiv AB$ sa chlapcovi X nepáči, lebo inak by bolo podľa $\mathbf{S}_3$ $a \equiv x$ aj $b \equiv x$. Tým je dôkaz prevedený.

Veta 7.S. Každému chlapcovi X sa páčia aspoň dve rôzne dievčatá.

Dôkaz. Podľa vety 6.S existuje dievča x tak, že $X \notin x$. Podľa axiomy $\mathbf{S}_4$ existujú $B \not\equiv C$ ktorým sa x páči. Potom XB a XC sú hľadané rôzne dievčatá páčiace sa chlapcovi X.

Axiomatizovaná teória $\mathfrak{S}$ postavená na troch základných pojmoch a piatich axiomach v tomto štádiu obsahuje tri definované odvodené pojmy: nepáčiť sa, priateľky, nepriateľky a sedem tvrdení. Príklad 2. je skončený.

Úloha 3. Dokážte vetu 8.S: Existujú traja chlapci A, B, C tak, že pre každé dievča x platí $A \in x$, $B \in x \Rightarrow C \notin x$.

Úloha 4. Dokážte vetu 9.S: Ak existuje chlapec C, ktorému sa žiadna z nepriateliek a, b nepáči, potom existuje chlapec X, ktorému sa páčia aspoň tri rôzne dievčatá.

1.3. Modely axiomatizovanej teórie

Pri čítaní príkladu 2. sme si pod pojmami (4) mohli predstavovať to, čo oni označujú v skutočnosti. Rovnako dobre sme si ale pod uvedenými termínmi mohli predstavovať množstvo iných objektov, poprípade sme na pojmy (4) mohli nazerať len ako na symboly — ako by to boli slová z cudzieho, nám neznámeho jazyka. V takom prípade hovoríme, že sme s teóriou $\mathfrak{S}$ pracovali abstraktne. Ak však sme pri čítaní príkladu 2. mali pod pojmami (4) na mysli konkrétne objekty (napr. „body", „priamky", vzťah „leží na" z planimetrie), potom hovoríme, že sme teóriu $\mathfrak{S}$ modelovali. Abstraktná teória aplikovaná na špeciálnu situáciu sa menuje *modelom*. Poslednú vetu budeme znovu ilustrovať na príklade: udáme päť modelov teórie $\mathfrak{S}$. Udať model teórie $\mathfrak{S}$ značí: Udať množiny Ch a D a udať vzťah „páčiť sa" tak, aby boli splnené axiomy (5).

Príklad 3. Každý z nasledujúcich modelov S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 je modelom abstraktnej teórie $\mathfrak{S}$.

S_1 : Ch je trojprvková, skladá sa z mien Orfeus, Rómeo, Tristan, D je trojprvková, skladá sa z mien Euridika, Júlia, Izolda. Vzťah páčiť sa je definovaný takto: Euridika sa páči Rómeovi a Tristanovi, Júlia sa páči Orfeovi a Tristanovi, Izolda sa páči Orfeovi a Rómeovi. Iné vzťahy typu „páčiť sa" neexistujú. Veľmi názorne je možné model S_1 popísať tabuľkou, ktorú nazveme *tabuľka incidencie* pre model S_1. Čítanie v tabuľke je očividné: dievča x sa páči chlapcovi Y, ak v štvorčeku, ktorý je v stĺpci x a riadku Y je číslo 1; ak v tomto štvorčeku je číslo 0, potom je $Y \notin x$. Poznamenajme, že spôsobom incidenčnej tabuľky môžeme popísať len tie modely pre ktoré Ch a D majú konečný počet prvkov.

Úloha 5. Overte, že model S_1 spĺňa axiomy (5.) V modeli S_1 neexistujú priateľky. Tento fakt platí v každom modeli, kde D je trojprvková. Dokážte!

S_2: Ch je šesťprvková, skladá sa z písmien: a, e, i, o, u, y; D je desaťprvková, skladá sa zo slov: Bolyai, Descartes, Dupin, Euler, Gauss, Klein, Ludolf, Newton, Study, Sylvester.

Vzťah páčiť sa je daný predpisom: slovo (= dievča) z D sa páči písmenu (= chlapcovi) z Ch práve vtedy, keď

		D		
		Izolda	Júlia	Euridika
Ch	Orfeus	0	1	1
	Rómeo	1	0	1
	Tristan	1	1	0

Tabulka incidencie pre model S_1

toto slovo obsahuje dané písmeno. Napríklad Newton sa páči písmenu *e* aj písmenu *o*, nie však písmenu *y*.

Model S_2 je popísaný. Overte preň platnosť aspoň niektorých z axiom (5).

Úloha 6. V reči modelu S_2 vyslovte vetu 7.S.

Úloha 7. Napíšte tabuľku incidencie pre model S_2. V reči tejto tabuľky vyslovte axiomy $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$ a $\mathbf{S}_5$.

S_3: Ch je (nekonečná) množina všetkých bodov v rovine α,
D je (nekonečná) množina všetkých priamok v rovine α.

Vzťah páčiť sa je daný predpisom: priamka (= dievča) $x \in$ D sa páči bodu (= chlapcovi) $Y \in$ Ch práve keď Y leží na x.

Model S_3 je popísaný. Overte preň platnosť všetkých axiom (5). Ukážte, že termín *priateľky* či *nepriateľky* sa v tomto modeli kryje s termínom *nesplývajúce rovnobežky* či *rôznobežky*.

S_4: Nech h je pevne daná kružnica. Položíme:
Ch je množina všetkých bodov ležiacich vnútri h,
D je množina všetkých tetív kružnice h.
Vzťah páčiť sa je rovnako ako v modeli S_3 totožný s incidenciou.

Model S_4 je popísaný. Overte platnosť všetkých axiom (5).

Úloha 8. Zistite či nasledujúci výrok **V** je pravdivý v modeli a.) S_1, b.) S_2, c.) S_3, d.) S_4.

V: Ak sa dievča p nepáči chlapcovi P, potom existuje najviac jedno dievča q, ktoré je priateľkou p a zároveň sa páči chlapcovi P.

S_5: Nech λ je otvorená polrovina vyťatá danou priamkou h^* v rovine.
Ch je množina všetkých bodov polroviny λ,
D je množina jednak všetkých otvorených polpriamok so začiatkom na h^*, ležiacich v λ a kolmých na h^* a jednak všetkých otvorených polkružníc so stredom na h^* ležiacich v λ.

Vzťah páčiť sa je znovu incidenciou, tj. ε je $\in$. Model S_5 je popísaný. Overte platnosť axiom (5) a ukážte, že výrok **V** z úlohy 8. je v modeli S_5 nepravdivý. Príklad 3. je ukončený.

Dalšie precvičenie modelov dáme do úloh. Prosíme čitateľa, aby všetky úlohy dôkladne rozriešil skôr, ako pristúpi k ďalšiemu textu.

Úloha 9. Dokážte, že existujú práve dva rôzne (čo do počtu prvkov množiny D) modely teórie $\mathfrak{S}$ pre ktoré je množina Ch štvorprvková. Pre tieto modely nájdite tabuľky incidencie.

Úloha 10. Nájdite model S_8 (teórie $\mathfrak{S}$) s čo najmenším počtom prvkov Ch tak, aby v ňom výrok **V** bol nepravdivý.

Úloha 11. Popíšeme model $\mathfrak{M}$ operujúci na pojmoch (4). Zistite či $\mathfrak{M}$ je modelom teórie $\mathfrak{S}$.

$\mathfrak{M}$: Nech je v rovine daný pevný bod *S*. Ch je množina všetkých bodov v rovine okrem bodu *S*. D je množina všetkých kružníc idúcich bodom *S*. Relácia páčiť sa je reláciou incidencie.

Úloha 12. V modeli $\mathfrak{M}$ pridajte ku množine D ďalšie prvky tak, aby vzniklý model S_{10} bol modelem teórie $\mathfrak{S}$.

V článku 1.3., ktorý práve končíme sme sa oboznámili s pojmom modelu abstraktnej teórie. Článok 1.4. bude venovaný historickej väzbe modelu a teórie; možno ho pri čítaní vypustiť.

1.4. Od modelu k axiomatizovanej teórii

Každá vedecká teória vzniká v dôsledku dlhodobého hromadenia poznatkov, ich porovnávania a triedenia. V procese tvorenia teórie nachádzame štyri významné obdobia:

I. Je známy jeden, či viacero modelov budúcej teórie, zatiaľ nie je známy súvis medzi modelmi.

II. Známy je súvis medzi modelmi a niektoré z nich sa stávajú univerzálnymi tj. situácie všetkých modelov sú riešené na univerzálnom modeli.

III. Od univerzálneho modelu sa abstrakciou dochádza ku abstraktnej teórii, zatiaľ intuitívnej tj. neaxiomatizovanej.

IV. Intuitívna teória sa stáva axiomatizovanou, keď sa nájde vhodný axiomatický systém.

Ako príklad uvedieme vývoj teórie prirodzených čísel.

Spôsob prvých počtových výkonov ľudstva je možné len tušiť, pretože spadá do doby, ktorá bola veľmi skúpa na suveníry pre potomstvo. Je veľmi dobre prijateľná téza, že človek sa najprv naučil sčítať malé čísla (povedzme do päť). Vedel, že dva kone a tri kone je päť koňov, dva prsty a tri prsty je päť prstov, dvaja synovia a tri dcéry je päť detí. Je to prvé obdobie vývoja — existujú oddelené modely (kone, prsty, členovia rodiny).

Neskôr si ľudia všimli, že spočítať dva kone a tri kone môžeme pomocou prstov na rukách bez toho, že by bolo treba vidieť skutočné kone. Prsty sa stávajú jedným z hlavných univerzálnych modelov — sme v období II.

Trvalo to isto nejaké tisícročie, pokiaľ si ľudia uvedomili, že ku sčítaniu dvoch a troch koňov netreba ani prsty, že stačí vedieť: „dve a tri je päť“ a tento fakt platí bez ohľadu na predmet (model) na ktorý ho aplikujeme. Abstrakciou vzniká nový pojem, pojem mnohosti, prirodzené číslo — budúci primitívny pojem celej teórie prirodzených čísiel. No vzniklá teória je a dlho ostáva teóriou intuitívnou. Fakty ako: $2 + 3 = 5$, $a + b = b + a$, ... sú považované za samozrejmé, prirodzené à priorné. Samozrejmosť komutatívnosti $a + b = b + a$ však netkvie v „podstate aritmetiky“ (veď existujú aj nekomutatívne operácie: rozdiel, podiel, mocnenie), ale v ľudskom vedomí, ktoré po dlhé tisícročia navyknuté brať komutatívnosť sčítania za pravdivú, zdogmatizovalo si túto do „samozrejmosti“. Dokonca ešte v polovici minulého storočia, keď už axiomatika geometrie absolvovala dvetisícročnú púť a matematické myslenie dosiahlo vysoký stupeň abstrakcie, žiaden z matematikov necítil potrebu axiomatizovať aritmetiku — tak silná bola ľudská viera v „à priornosť“ zákonov aritmetiky.

Až druhá polovica minulého storočia mení intuitívnu teóriu na axiomatizovanú. Hlavnú zásluhu na tomto čine majú traja matematici: H. Grassmann (1861), R. Dedekind (1888) a G. Peano (1891). Axiomatickú stavbu teórie prirodzených čísiel tu uvádzať nemôžeme. Záujemcov odkazujeme na literatúru: K. Hruša: Elem. aritmetika (PV Praha, 1953).

Ukázali sme na historický vzťah modelu a axiomatizovanej teórie. Logickým závislostiam medzi teóriou a modelmi venujeme článok 1.6.

1.5. Sústava axiom axiomatizovanej teórie

Vrátime sa k axiomatizovanej teórii popísanej v článku 1.2. Nech je daná sústava základných pojmov $a_1, \ldots, a_m$ a sústava axiom $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ istej axiomatizovanej teórie $\mathfrak{A}$. Počet základných pojmov je m, počet axiom n. V prípade teórie $\mathfrak{S}$ (príklad 2) je $m = 3$, $n = 5$. Vysvetlíme si tri najdôležitejšie vlastnosti sústavy axiom: *bezospornosť*, *nezávislosť* a *úplnosť*.

Hovoríme, že skupina výrokov $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ je *sporná*, ak je z nej možné logickou cestou vyvodiť dve navzájom si odporujúce tvrdenia. V opačnom prípade danú skupinu výrokov menujeme *bezospornou.*

Príklad 4. Ak k výrokom (5) pridáme doleuvedený výrok $\mathbf{S}_6$, dostaneme spornú skupinu výrokov.

$\mathbf{S}_6$: Existujú chlapci $A \not\equiv B$ tak, že pre každé dievča x platí $A \varepsilon x \Rightarrow B \varepsilon x$.

Z $\mathbf{S}_3$ a $\mathbf{S}_6$ vyplýva, že existuje jediné dievča pre ktoré $A \varepsilon x$ a to dievča $x \equiv AB$. Z výrokov (5) vyplýva veta 7.S., ktorá je v spore s práve dokázaným tvrdením. Teda skupina výrokov $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_6$ je sporná.

Hovoríme, že skupina výrokov $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ je *závislá*, ak niektorý z nich je logickým dôsledkom ostatných. V opačnom prípade danú skupinu výrokov menujeme *nezávislou*.

Príklad 5. Ak k výrokom (5) pridáme doleuvedený výrok $\mathbf{S}_7$, dostaneme závislú skupinu výrokov.

$\mathbf{S}_7$: Ku každým dvom rôznym chlapcom A, B existuje dievča x tak, že $A \varepsilon x$ a $B \not\varepsilon x$.

Skutočne z (5) vyplýva veta 7.S. podľa ktorej existujú dve rôzne dievčatá a, b tak, že $A \varepsilon a$, $A \varepsilon b$. Pretože $a \neq b$, môže sa chlapcovi B páčiť najviac jedno z dievčat a, b a teda existuje $x \in \mathrm{D}$ tak, že $A \varepsilon x$ a $B \not\varepsilon x$. Dokázali sme, že výrok $\mathbf{S}_7$ je dôsledkom výrokov (5) a preto skupina výrokov $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_5, \mathbf{S}_7$ je závislá.

Hovoríme, že sústava axiom $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ je *úplná* vzhľadom na sústavu základných pojmov $a_1, \ldots, a_m$, ak každý výrok X vypovedajúci len o týchto pojmoch, prípadne pojmoch skupín 2, 3, 4 klasifikácie v 1.1. strana 4., sa alebo dá na základe $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ dokázať, alebo vyvrátiť. V opačnom prípade sústavu axiom $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ menujeme *neúplnou* vzhľadom na sústavu základných pojmov $a_1, \ldots, a_m$.

Príklad 6. Sústava axiom (5) je neúplnou vzhľadom na sústavu základných pojmov (4), pretože výrok $\mathbf{V}$ (úloha 8. článok 1.3.) sa na základe axiom (5) nedá ani dokázať, ani vyvrátiť. Ku dôkazu posledného tvrdenia použijeme modelov.

Predpokladajme, že platí

$$\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_5 \Rightarrow \mathbf{V}. \tag{6}$$

Ak (6) platí v abstraktnej teórii, platí nutne aj v každom jej modeli, špeciálne v modeli S_4, čo však nie je pravda.

Výrok **V** teda nie je možné dokázať z axiom $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_5$. Rovnako výrok **V** sa z axiom $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_5$ nedá ani vyvrátiť, pretože v modeli S_3 je ako $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_5$ tak aj **V** pravdivý. Pretože výrok **V** sa z axiom $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_5$ nedá ani dokázať, ani vyvrátiť, hovoríme, že **V** *je nezávislý na sústave axiom* (5). Tento príklad si dobre premyslite, lebo je dôležitý.

Poukázali sme na tri základné vlastnosti sústavy axiom: bezospornosť, nezávislosť a úplnosť. Bezospornosť je najdôležitejšia vlastnosť axiomatickej sústavy vôbec. Zatiaľ čo štúdium závislej, či neúplnej sústavy axiom zmysel má, je sporná axiomatická sústava bez zmyslu a jediné čo s ňou možno múdreho urobiť je: zahodiť ju.

Najmenej dôležitou z horeuvedených vlastností sústavy axiom je nazávislosť. Zo sústavy axiom, ktorá je závislá môžeme vytvoriť sústavu nezávislú spôsobom veľmi jednoduchým: postupne vypúšťame tie axiomy, ktoré sú dôsledkom tých, čo v sústave ostali. Požiadavka nezávislosti axiom je požiadavkou estetiky a nezasahuje podstatu budovanej teórie. Z povedaného vyplýva, že každú axiomatickú sústavu môžeme predpokladať nezávislou.

Konečne pár slov o úplnosti sústavy axiom. Fakt, či daná sústava axiom $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ je, alebo nie je úplnou je podstatný, no má zmysel študovať teóriu postavenú ako na úplnom, tak aj na neúplnom axiomatickom systéme. V tejto súvislosti povieme niečo o príbuzných teóriách a o stupňovom budovaní teórie.

Predstavme si, že $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ sú dve rôzne teórie, majúce spoločné niektoré (poprípade aj všetky) základné pojmy $c_1, \ldots, c_k$ a niektoré axiomy $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_r$. Také teórie budeme menovať príbuzné. Nech $\mathfrak{C}$ je teória určená systémom základných pojmov $c_1, \ldots, c_k$ a sústavou axiom $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_r$. Potom každé tvrdenie teórie $\mathfrak{C}$ je pravdivé aj v teórii $\mathfrak{A}$, aj v teórii $\mathfrak{B}$. Teóriu $\mathfrak{A}$ resp. $\mathfrak{B}$ získame z teórie $\mathfrak{C}$ pridaním zvyšných základných pojmov a axiom. Popísané stupňovité budovanie teórií má veľký význam v praxi pri konkrétnom rozpracovávaní príbuzných teórií.

1.6. Axiomatizovaná teória a jej modely

V tomto článku ukážeme na dôležitosť modelov. V predchádzajúcom článku sme zaviedli pojmy bezospornosť, nezávislosť a úplnosť sústavy axiom a na príkladoch sme ilustrovali, ako na konkrétnej sústave možno poznať jej spornosť (príklad 4.), závislosť (príklad 5.) a neúplnosť (príklad 6.). Otázka znie: *Ako na konkrétnej sústave určíme jej a.) bezospornosť, b.) nezávislosť?* Kritérium úplnosti je obtiažne a preto ho vypustíme z úvah. Je zrejmé, že dokázať spornosť, či závislosť nejakej sústavy výrokov je jednoduchšie, ako dokázať jej bezospornosť, či nezávislosť. Čitateľ sa môže sám pokúsiť o riešenie problému skôr, ako bude ďalej čítať.

Kritérium bezospornosti sústavy výrokov. *Sústava výrokov je bezosporná, ak existuje aspoň jeden jej model.*

Úskalie posledného tvrdenia spočíva v slove „model", ktorým tu operujeme intuitívne. Precízne vyjadrovanie však možné nie je, lebo tento pojem siaha veľmi hlboko do logiky. Mierne upresnenie horného kritéria bezospornosti dáva nasledujúce tvrdenie.

Nech $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ je sústava výrokov a $\mathfrak{B}$ axiomatizovaná teória, ktorej bezospornosť je dokázaná. Ak existuje model sústavy výrokov $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ v rámci teórie $\mathfrak{B}$, potom je táto sústava výrokov bezosporná.

Príklad 7. Máme dokázať bezospornosť sústavy axiom (5). Podľa uvedeného kritéria stačí nájsť model teórie $\mathfrak{S}$. V článku 1.3. bolo podaných modelov päť. Uvážme napr. model S_3. Je to príklad modelovania teórie $\mathfrak{S}$ v rámci rovinnej euklidovskej geometrie. Existenciu poslednej teórie dokázal Hilbert.

Kritérium nezávislosti sústavy výrokov. *Sústava výrokov* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ *je nezávislá, ak pre každé* $i = 1, \ldots, n$ *existuje aspoň jeden model* $\mathfrak{A}_i$ *splňujúci výroky* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ *okrem výroku* $\mathbf{A}_i$, *pričom pre* $\mathbf{A}_i$ *platí* $\neg\, \mathbf{A}_i$. (Pozri dodatok A.)

Príklad 8. Máme dokázať nezávislosť sústavy axiom (5). Podľa uvedeného kritéria treba udať päť modelov, ktoré označíme $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}_3$, $\mathfrak{Q}_4$, $\mathfrak{Q}_5$. V modeli $\mathfrak{Q}_1$ budú pravdivé výroky $\neg\, \mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$, $\mathbf{S}_5$; v modeli $\mathfrak{Q}_2$ budú pravdivé výroky $\mathbf{S}_1$, $\neg\, \mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$, $\mathbf{S}_5$;... Tu udáme modely $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}_4$ a modely $\mathfrak{Q}_3$ a $\mathfrak{Q}_5$ prenecháme čitateľovi (pozri úlohu 13.).

$\mathfrak{Q}_1$: Nech $\mathsf{Ch} = \mathsf{D} = \emptyset$. Potom zrejme platí $\neg\, \mathbf{S}_1$ a platnosť $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$, $\mathbf{S}_5$ je zrejmá, lebo predpoklady sú nepravdivé. (Dodatok A.)

$\mathfrak{Q}_2$: Z modelu S_1 vypustíme prvok množiny D „Júlia". Platí $\neg\, \mathbf{S}_2$, lebo chlapcom Orfeus a Tristan neexistuje dievča, ktoré sa obidvom páči. Pravdivosť axiom $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$ a $\mathbf{S}_5$ je očividná.

$\mathfrak{Q}_4$: K modelu S_2 do množiny D pridáme prvok „Čech" a ostatné prvky, ako aj reláciu ε necháme bezo zmeny. Platí $\neg\, \mathbf{S}_4$, lebo dievča „Čech" sa páči jedinému chlapcovi, chlapcovi „*e*". Pravdivosť zvyšných axiom sa overí jednoducho.

Úloha 13. Podľa príkladu 8. udajte modely $\mathfrak{Q}_3$ a $\mathfrak{Q}_5$. Riešení je samozrejme nekonečne mnoho.

Úloha 14. Ak ku axiomam $\mathbf{S}_2$ — $\mathbf{S}_5$ pridáme axiomu $\mathbf{S}_8$: Existuje dievča x majúce najviac jednu nepriateľku, potom sústava výrokov $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$, $\mathbf{S}_5$, $\mathbf{S}_8$ je sporná. Dokážte!

Úloha 15. Dokážte, že sústava výrokov $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$, $\mathbf{S}_5$, $\mathbf{V}$ je bezosporná. To isté dokážte pre sústavu výrokov $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$, $\mathbf{S}_5$, $\neg\, \mathbf{V}$.

Úloha 16. Napíšte výrok $\neg$ **W**, ak **W** je výrok: Ak sa dievča *p* nepáči chlapcovi *P*, potom existuje aspoň jedno dievča *q* tak, že *q* sa páči chlapcovi *P* a je priateľkou dievčaťa *p*. Podobne napíšte aj výrok $\neg$ **V** a snažte sa o maximálnu stručnosť zápisu.

Úloha 17. Posúďte bezospornosť sústavy výrokov a.) $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$, $\mathbf{S}_5$, **W**; b.) $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$, $\mathbf{S}_5$, $\neg$ **W**; c.) $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$, $\mathbf{S}_5$, $\neg$ **V**, **W**; d.) $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$, $\mathbf{S}_5$, **V**, **W**.

Úloha 18. Dokážte nasledovné implikácie: $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$, $\neg\neg$ $\mathbf{S}_5$ $\Rightarrow$ D je jednoprvková $\Rightarrow$ **V**, **W**.

Úloha 19. Posúďte, či sústava axiom $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$, $\mathbf{S}_5$, **V**, **W** je nezávislá.