Dokonalé a spriatelené čísla

3. kapitola. Pojem hustoty množiny v teorii čísel a dokonalé čísla

In: Tibor Šalát (author): Dokonalé a spriatelené čísla. (Slovak). Praha: Mladá fronta, 1969. pp. 33–46.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403670

3. kapitola

POJEM HUSTOTY MNOŽINY V TEORII ČÍSEL A DOKONALÉ ČÍSLA

POJEM HUSTOTY A HUSTOTY NIEKTORÝCH MNOŽÍN

Čitateľovi je možno známy pojem číselnej postupnosti. Tým máme na mysli funkciu definovanú na množine P všetkých prirodzených čísel. Ak označíme znakom a_n hodnotu tejto funkcie v čísle $n \in P$, potom túto funkciu (postupnosť) označujeme znakom

$$a_1, a_2, a_3, \dots a_n, \dots$$

alebo stručnejšie znakom $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$. Reálne čísla a_n ($n = 1, 2, \dots$) nazývame pritom členmi spomenutej postupnosti.

Zo strednej školy je známy pojem nulovej postupnosti (pozri učebnicu matematiky pre 3. roč. SVŠ). Pripomeňme si tento pojem. Postupnosť $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva nulová, ak ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje prirodzené číslo n_0 tak, že pre každé prirodzené číslo $n > n_0$ je $|a_n| < \varepsilon$. Na strednej škole sa dokazuje, že geometrická postupnosť $\left\{q^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je nulová, ak $|q| < 1$.

P36. Nech a je číslo a nech pre každé $n = 1, 2, 3, \dots$ je $a_n = a$ (postupnosť $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame v tomto prípade štacionárnou alebo konštantnou — spomeňte si na pojem konštantnej funkcie). Takto definovaná postupnosť je nulová vtedy a len vtedy, keď $a = 0$. Dokážte to!

Návod: Jediné číslo, ktorého absolutná hodnota je menšia než ľubovoľné kladné (reálne) číslo, je 0.

V18. Ak $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{b_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ sú dve nulové postupnosti a c je dané číslo, potom aj postupnosti $\left\{a_n + b_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{a_n - b_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{ca_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ sú nulové.

Dôkaz. Nech $\varepsilon > 0$. K číslu $\frac{\varepsilon}{2}$ existujú prirodzené čísla n_1 a n_2 tak, že pre každé $n > n_1$ je $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ a pre každé $n > n_2$ je $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pre $n > n_0 = \max(n_1, n_2)$ platia obe nerovnosti $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ a na základe známej vlastnosti absolutnej hodnoty je $|a_n \pm b_n| \leqq |a_n| + |b_n|$. Odtiaľ pre $n > n_1$ dostávame $|a_n \pm b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Ak $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je nulová a c je číslo, potom ako vieme zo strednej školy (pozri učebnicu pre 3. roč. SVŠ), je aj $\left\{c\, a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ nulová.

Pojem nulovej postupnosti použijeme v nasledujúcej definícii.

D9. Hovoríme, že číslo a je limitou postupnosti $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ (v stručnom zápise $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ alebo $a_n \to a$), ak postupnosť $\left\{a_n - a\right\}_{n=1}^{\infty}$ je nulová.

Ak a je limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, hovoríme tiež, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu a.

Z definície $\mathbf{D}_9$ ihneď je zrejmý tento poznatok: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nulová vtedy a len vtedy, keď má limitu 0.

Naskytá sa prirodzená otázka, koľko limít môže mať postupnosť. O tom pojednáva nasledujúca poučka.

$\mathbf{V}_{19}$. Každá postupnosť má najviac jednu limitu.

Dôkaz. Nech postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limity a, a'. Potom na základe definície $\mathbf{D}_9$ sú obe postupnosti $\{a_n - a\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n - a'\}_{n=1}^{\infty}$ nulové a preto v dôsledku $\mathbf{V}_{18}$ je aj postupnosť $\{a' - a\}_{n=1}^{\infty} = \{(a_n - a) - - (a_n - a')\}_{n=1}^{\infty}$ nulová. To je však konštantná postupnosť (každý jej člen je rovný číslu $a' - a$). Na základe $\mathbf{P}_{36}$ je $a' - a = 0$, $a' = a$. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemôže mať teda dve rôzne a teda ani viac rôznych limít.

Predošlá veta nezaručuje existenciu limity (to ani nie je možné — pozri $\mathbf{P}_{37}$), zaručuje len jednoznačnosť limity, tj. ak daná postupnosť má limitu, potom má jedinú limitu. Nie každá postupnosť má limitu. Ukazuje to aj nasledujúci príklad.

$\mathbf{P}_{37}$. Presvedčte sa, že postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá limitu.

Návod. Ukážte, že žiadne číslo a nemôže byť limitou tej postupnosti. Rozoznávajte pri tom prípady $a = 1$, $a = -1$, $a \neq 1, -1$.

$\mathbf{P}_{38}$. Každá konštantná postupnosť má limitu, rovnú ľubovoľnému členu tej postupnosti.

P_{39}. Dokážte, že $\left\{\frac{n}{n+3}\right\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu 1 a $\left\{\frac{2n+6)}{-3n+4}\right\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu $-\frac{2}{3}$.

V_{20}. Ak $a_n \to a$, $b_n \to b$, potom $a_n + b_n \to a + b$, $a_n - b_n \to a - b$.

Dôkaz. Postupnosti $\left\{a_n - a\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{b_n - b\right\}_{n=1}^{\infty}$ sú podľa predpokladu nulové. Na základe V_{18} sú aj $\left\{(a_n + b_n) - (a + b)\right\}_{n=1}^{\infty}$ a $\left\{(a_n - b_n) - (a - b)\right\}_{n=1}^{\infty}$ nulové.

P_{40}. Ak $a_n \to a$ a c je dané číslo, potom $ca_n \to ca$. Návod: Použite V_{18}!

V_{21}. Nech $0 \leqq a_n \leqq b_n$ pre každé $n = 1, 2, 3, \ldots$ Ak $\left\{b_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je nulová, je aj $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ nulová.

Dôkaz. Dôkaz vyplýva priamo z definície nulovej postupnosti.

P_{41}. Dokážte: $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je nulová vtedy a len vtedy, keď $\left\{|a_n|\right\}_{n=1}^{\infty}$ je nulová.

P_{42}. Nech $a_n \to a$, $b_n \to b$, nech c_1, c_2 sú dané čísla. Dokážte, že postupnosť $\left\{c_1 a_n + c_2 b_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu $c_1 a + c_2 b$.

Návod: Použite V_{20} a P_{40}!

P_{43}. Dokažte, že postupnosť $\left\{\frac{1}{\sqrt[k]{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (k je prirodzené, $k > 1$) je nulová.

Riešenie. K číslu $\varepsilon^k > 0$ existuje prirodzené číslo $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon^k}$. Potom pre $n > n_0$ je $\frac{1}{n} < \varepsilon^k$, odtiaľ $\frac{1}{\sqrt[k]{n}} < \varepsilon$.

Nasledujúcu vetu budeme často potrebovať v ďalších úvahách.

V22. Nech $a_n \to a$, $b_n \to b$ a nech pre každé n je $a_n \leqq b_n$. Potom $a \leqq b$.

Dôkaz. Postupujme nepriamo. Nech $a > b$. Potom $a - b > 0$ a tak na základe definície $\mathbf{D}_9$ existuje prirodzené číslo n_1 tak, že pre všetky prirodzené čísla $n > n_1$ je

$$|a_n - a| < \frac{a - b}{2}. \tag{26}$$

Podobne existuje n_2 tak, že pre každé $n > n_2$ je

$$|b_n - b| < \frac{a - b}{2}. \tag{27}$$

Pre $n > n_0 = \max(n_1, n_2)$ platia nerovnosti (26), (27) a ovšem aj

$$a_n \leqq b_n. \tag{28}$$

Nech $n > n_0$. Keďže $a - \frac{a - b}{2} = \frac{a + b}{2}$, vyplýva z (26) správnosť nerovnosti $a_n > \frac{a + b}{2}$ (načrtnite si). Podobne z (27) vyplýva $b_n < \frac{a + b}{2}$ a tak $a_n > \frac{a + b}{2} > b_n$, $a_n > b_n$. To je spor s (28).

D10. Nech $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ je nejaká postupnosť prirodzených čísel. Potom postupnosť $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots a_{n_k}, \ldots$ nazývame čiastočnou (vybranou) postupnosťou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Tak napr. $a_2, a_4, \ldots a_{2k}, \ldots$ je čiastočnou postupnosťou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

V23. Ak postupnosť $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu a, potom aj každá jej čiastočná postupnosť konverguje k číslu a.

Dôkaz. Nech $\left\{a_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ je nejaká čiastočná postupnosť postupnosti $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, nech $\varepsilon > 0$. Keďže $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu a, existuje n_1 tak, že pre $n > n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon$. Ďalej existuje k_0 tak, že pre $k > k_0$ je $n_k < n_0$. Potom pre $k > k_0$ je na základe predošlého $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$. Teda predošlá nerovnosť platí pre všetky členy postupnosti $\left\{a_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ od istého člena počínajúc. Teda postupnosť $\left\{a_{n_k} - a\right\}_{k=1}^{\infty}$ je nulová a tak a je limitou postupnosti $\left\{a_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$.

P44. Dokažte pomocou vety **V23**, že postupnosť $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{(-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ nemá limitu.

Návod: Vyšetrujte jej čiastočné postupnosti $\left\{a_{2k-1}\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\left\{a_{2k}\right\}_{k=1}^{\infty}$.

Pre ďalšie potreby bude účelné určiť limitu postupnosti $\left\{\frac{\log n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\log n$ je dekadický logaritmus čísla n. Ukážeme, že uvedená postupnosť je nulová.

V24. Pre každé celé $n \geqq 0$ je $2^n \geqq 1 + n$.

Dôkaz. Na základe binomickej vety je pre $n > 1$

$$2^n = (1+1)^n = 1 + n + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} \geqq 1 + n.$$

Pre $n = 0$ resp. $n = 1$ je správnosť tvrdenia zrejmá.

V_{25}. Pre každé reálne číslo a je $2^a > a$.

Dôkaz. Nech n je najväčšie zpomedzi všetkých tých celých čísel k, pre ktoré $k \leqq a$. Také číslo existuje na základe vlastností celých čísel spomínaných v úvode prvej kapitoly. Potom zrejme $n \geqq 0$, $n \leqq a < n + 1$. Keďže funkcia $y = 2^x$ je rastúca, je $2^a \geqq 2^n$ a podľa V_{24} je $2^n \geqq \geqq 1 + n > a$. Teda celkove

$$2^a \geqq 2^n \geqq 1 + n > a, \; 2^a > a.$$

V_{26}. Pre každé prirodzené n je $\log n < \sqrt{n}$.

Dôkaz. Na základe definície dekadického logaritmu máme $n = 10^{\log n}$, odtiaľ umocnením oboch strán na exponent $\frac{1}{2}$ dostaneme $\sqrt{n} = (\sqrt{10})^{\log n}$. Pretože $\sqrt{10} > 2$ a $\log n \geqq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, dostávame odtiaľ $\sqrt{n} \geqq 2^{\log n}$ a tak na základe V_{25} je $\sqrt{n} > \log n$.

V_{27}. Postupnosť $\left\{\frac{\log n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je nulová.

Dôkaz. Pre každé prirodzené číslo n platí na základe V_{26} $0 \leqq \frac{\log n}{n} \leqq \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ a teraz stačí použiť V_{21} a P_{43}.

Čitateľovi je iste dobre známy fakt, že v rovinnej geometrii možno niektorým množinám nachádzajúcim sa v rovine priradiť isté nezáporné čísla, nazývané plošné obsahy tých množín. Podľa veľkosti tohoto čísla možno usudzovať aj na „rozsiahlosť", „veľkosť" danej množiny. Pritom ak $A \subset B$ a množiny A, B majú plošný obsah, potom plošný obsah množiny A je nie väčší než plošný obsah množiny B. O niečo podobné sa pokúsime teraz v súvislosti so štúdiom podmnožín množiny P všetkých prirodzených čísel. Teda presnejšie pokúsime sa podmnožinám množiny P priradiť nezáporné čísla, ktoré budeme nazývať hustotami tých množín. Pomocou týchto čísel možno potom usudzovať na „veľkosť" podmnožín množiny P. Uvidíme, že hustota podmnožiny nemôže presiahnuť hustotu nadmnožiny.

D_{11}. Nech $A \subset P$, nech n je prirodzené číslo. Označme znakom $A(n)$ počet všetkých tých čísel $a \in A$, pre ktoré $a \leqq n$. Ak existuje limita postupnosti $\left\{\frac{A(n)}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, nazývame ju hustotou množiny A a označujeme $h(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{A(n)}{n}$.

Všimnime si bližšie uvedeného pojmu hustoty. Číslo $\frac{A(n)}{n}$ udáva „relatívnu početnosť" prvkov množiny A medzi prvými n prirodzenými číslami. Má aj jednoduchý pravdepodobnostný význam. Udáva pravdepodobnosť javu, ktorý spočíva v tom, že pri náhodnom výbere jedného zpomedzi čísel $1, 2, \dots n$ vyberieme číslo patriace do množiny A. Číslo $h(A)$ má potom význam akejsi asymptotickej pravdepodobnosti.

Keďže pre každé n je zrejme $0 \leqq A(n) \leqq n$, vyplýva odtiaľ $0 \leqq \frac{A(n)}{n} \leqq 1$ a tak na základe V_{22}, ak A má hustotu, je $0 \leqq h(A) \leqq 1$. Teda hustota množiny je vždy číslo z intervalu $< 0, 1 >$.

D_{12}. Ak $h(A) = 0$, potom množinu A nazývame riedkou množinou.

Poznamenajme, že nie každá podmnožina množiny P má hustotu. Ukážeme to na nasledujúcom príklade.

P_{45}a). Množinu A_k nech tvoria všetky čísla tvaru

$$(2k - 1)^{2k-1} + s, \quad s = 1, 2, \dots (2k)^{2k} - (2k - 1)^{2k-1}.$$

Znakom A označme zjednotenie všetkých množín A_k

($k = 1, 2, \ldots$). Teda množinu A tvoria práve tie prirodzené čísla a, ktoré majú tvar

$$a = (2k - 1)^{2k-1} + s, \ s = 1, 2, \ldots$$
$$\ldots (2k)^{2k} - (2k - 1)^{2k-1}; \ k = 1, 2, \ldots$$

Pretože medzi číslami, patriacimi do množiny A a nepresahujúcimi číslo $(2k)^{2k}$ sa nachádzajú čísla

$$(2k - 1)^{2k-1} + s, \ s = 1, 2, \ldots (2k)^{2k} - (2k - 1)^{2k-1},$$

je $A((2k)^{2k}) \geqq (2k)^{2k} - (2k - 1)^{2k-1}$ a tak

$$1 - \frac{(2k-1)^{2k-1}}{(2k)^{2k}} \leqq \frac{A((2k)^{2k})}{(2k)^{2k}} \leqq 1.$$

Keďže $\frac{(2k-1)^{2k-1}}{(2k)^{2k}} \leqq \frac{(2k)^{2k-1}}{(2k)^{2k}} = \frac{1}{2k}$, je postupnosť $\left\{\frac{(2k-1)^{2k-1}}{(2k)^{2k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ nulová (pozri $\mathbf{V}_{21}$) a tak v dôsledku $\mathbf{V}_{20}$ a $\mathbf{V}_{22}$ je limita postupnosti (29) $\left\{\frac{A((2k)^{2k})}{(2k)^{2k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ rovna 1.

Keďže čísla

$$(2k)^{2k} + s, \ s = 1, 2, \ldots (2k + 1)^{2k+1} - (2k)^{2k}$$

nepatria do množiny A, je $A((2k + 1)^{2k+1}) \leqq (2k)^{2k}$, odtiaľ ľahko zistíme, že limita postupnosti

$$\left\{\frac{A((2k+1)^{2k+1})}{(2k+1)^{2k+1}}\right\}_{k=1}^{\infty} \tag{30}$$

je rovna 0. No (29), (30), sú čiastočné postupnosti postupnosti $\left\{\frac{A(n)}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ a tak v dôsledku vety $\mathbf{V}_{23}$ nemôže mať táto postupnosť limitu.

P_{45}b). Dokážte, že každá konečná množina je riedka.

Návod. Nech A je konečná a má k prvkov. Potom pre každé prirodzené n je $\frac{A(n)}{n} \leqq \frac{k}{n}$, použite teraz V_{21} a P_{40}.

P_{46}a) Nech A je množina všetkých párnych čísel. Potom $h(A) = \frac{1}{2}$.

b) Nech A je množina všetkých nepárnych čísel. Potom $h(A) = \frac{1}{2}$.

Návod. Všetkých párnych čísel neprevyšujúcich číslo n je $\frac{n}{2}$, ak n je párne a $\frac{n}{2} - \frac{1}{2}$, ak n je nepárne. Pre každé n prirodzené teda platí $\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leqq \frac{A(n)}{n} \leqq \frac{1}{2}$. Použite teraz vetu V_{22}. Podobne postupujeme aj pri riešení časti b).

P47. Nech k je prirodzené, $k > 1$. Dokážte, že množina Q_k všetkých k-tych mocnín prirodzených čísel je riedka.

Návod. Nech s je najväčšie také prirodzené číslo, že s^k neprevyšuje n. Potom $Q_k(n) = s$ a z $s^k \leqq n$ vyplýva $s \leqq \sqrt[k]{n}$. Teda $\frac{Q_k(n)}{n} \leqq \frac{\sqrt[k]{n}}{n} \leqq \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Použite teraz V_{22}.

P48. Nech a, d sú celé čísla, $a \geqq 0$, $d > 0$. Nech A je množina členov aritmetickej postupnosti $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d, \dots a + kd, \dots$ Potom $h(A) = \frac{1}{d}$ (teda hustota množiny A sa rovná prevrátenej hodnote diferencie tej aritmetickej postupnosti — porovnaj s **P46**).

Návod. Nech s je najväčšie také prirodzené číslo, že

$a + sd \leqq n$. Potom $n < a + (s + 1).d$ a $A(n) = s$. Odtiaľ $\frac{n-a}{d} - 1 \leqq s \leqq \frac{n-a}{d}$ a teraz použite $\mathbf{V}_{22}$ a $\mathbf{P}_{42}$.

P49. Nech $P - A$ značí komplement množiny A v množine P, tj. množinu všetkých tých prirodzených čísel, ktoré nepatria do A. Dokážte: A má hustotu vtedy a len vtedy, keď $P - A$ má hustotu. Ak A má hustotu $\delta = h(A)$, potom $h(P - A) = 1 - \delta$. Špeciálne: $h(A) = 0$ vtedy a len vtedy, keď $h(P - A) = 1$.

V28. Ak A, B majú hustotu a $A \subset B$, potom $h(A) \leqq h(B)$.

Dôkaz. Pre každé n je $A(n) \leqq B(n)$, odtiaľ $\frac{A(n)}{n} \leqq \frac{B(n)}{n}$. Tvrdenie vyplýva z vety $\mathbf{V}_{22}$ už okamžite.

P50. Ak $A \subset B$ a B je riedka, potom aj A je riedka. Návod: použite $\mathbf{V}_{28}$ a $\mathbf{V}_{21}$.

V29. Nech A, B sú riedke množiny. Potom aj množina $A \cup B$ (zjednotenie množín A, B) je riedka.

Dôkaz. Množina $A \cup B$ pozostáva, ako je známe, zo všetkých tých prirodzených čísel, ktoré patria aspoň do jednej z množín A, B. Položme $C = A \cup B$. Potom z definície množiny C dostávame pre každé prirodzené $n = 1, 2, \ldots$ $C(n) \leqq A(n) + B(n)$. Odtiaľ $\frac{C(n)}{n} \leqq \frac{A(n)}{n} + \frac{B(n)}{n}$. Na základe predpokladu vety a na základe $\mathbf{V}_{18}$ je $\frac{A(n)}{n} + \frac{B(n)}{n} \to 0$ a tak podľa $\mathbf{V}_{21}$ je $\frac{C(n)}{n} \to 0$.

Označme znakom D množinu všetkých dokonalých čísel (prvého druhu). V druhej kapitole sme uviedli, že dodnes nie je známe, či množina D je konečná a či nekonečná. V ďalšom ukážeme, že v každom prípade je D „chudobná" množina, je to totiž riedka množina.

V_{30}. Množina D je riedka.

Dôkaz. Položme $D = D_1 \cup D_2$, kde D_1 značí množinu všetkých nepárnych a D_2 množinu všetkých párnych dokonalých čísel. Na základe $\mathbf{V}_{29}$ stačí dokázať, že obe množiny D_1, D_2 sú riedke.

Dokážeme napred, že D_1 je riedka. Na základe vety $\mathbf{V}_{13}$ je D_1 obsažená v množine A všetkých čísel tvaru $p^{4k+1}.N^2$, kde p je prvočíslo tvaru $4s + 1$ ($s \geq 1$), $k \geq 0$ je celé, N prirodzené a p nedelí N. Na základe $\mathbf{P}_{50}$ stačí dokázať, že A je riedka množina. Položme $A = A_1 \cup A_2$, kde A_1 je množina všetkých tých čísel z A, ktoré majú tvar $p.N^2$ a A_2 je množina všetkých ostatných čísel množiny A. Nech teraz v_1, $v_2 \in A_1$, $v_1 = p_1.N^2$, $v_2 = p_2.N^2$ (teda obe čísla v_1, v_2 majú tú istú „kvadratickú" časť N^2). Ukážeme, že potom $p_1 = p_2$. Naozaj, na základe $\mathbf{V}_{11}$ a na základe definície dokonalého čísla je

$$\sigma(v_1) = (p_1 + 1)\,\sigma(N^2) = 2p_1N^2,$$
$$\sigma(v_2) = (p_2 + 1)\,\sigma(N^2) = 2p_2N^2,$$

odtiaľ vydelením dostávame $\dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{p_1 + 1}{p_2 + 1}$ a odtiaľ jednoduchou úpravou $p_1 = p_2$. Teda ku každému kvadrátu N^2 prirodzeného čísla N existuje najviac jedno prvočíslo p tak, že $pN^2 \in A_1$. Odtiaľ vyplýva, že počet $A_1(n)$ prvkov množiny A_1 neprevyšujúcich číslo n je nie väčší než počet všetkých kvadrátov prirodzených čísel, neprevyšujúcich číslo n, teda $A_1(n) \leqq \sqrt{n}$ (pozri $\mathbf{P}_{47}$). Odtiaľ vyplýva $\frac{A_1(n)}{n} \leqq$ $\leqq \frac{1}{\sqrt{n}}$, teda A_1 je riedka množina.

Číslo $A_2(n)$ je zrejme nie väčšie než $B(n)$, kde B značí množinu všetkých čísel tvaru $p^j . N^2$, $j = 4, 8, \ldots 4l \ldots$, $N = 1, 2, 3, \ldots$. No každé číslo uvedeného tvaru patrí do množiny Q_2 kvadrátov všetkých prirodzených čísel, preto $B \subset Q_2$ a keďže Q_2 je riedka (pozri $\mathbf{P}_{47}$), je aj B riedka množina. Pretože $\frac{A_2(n)}{n} \leqq \frac{B(n)}{n}$ je na základe $\mathbf{V}_{21}$ aj A_2 riedka.

Z vety $\mathbf{V}_{29}$ vyplýva potom aj riedkosť množiny A a tým aj riedkosť množiny D_1.

Dokážeme teraz, že aj D_2 je riedka množina. Na základe $\mathbf{V}_{14}$ je D_2 podmnožinou množiny všetkých čísel tvaru $2^{s-1}.(2^s - 1)$, kde s je prvočíslo. Táto množina je zase podmnožinou množiny E všetkých čísel tvaru $2^{s-1}.(2^s - 1)$, $s = 1, 2, 3, \ldots$, preto $D_2 \subset E$. Stačí teda dokázať, že E je riedka množina. Označme znakom t najväčšie zpomedzi tých prirodzených čísel s, pre ktoré $2^{s-1} \leqq n$. Potom zrejme $E(n) \leqq t$ a $t - 1 \leqq \frac{\log n}{\log 2}$.

Odtiaľ $\frac{E(n)}{n} \leqq \frac{1}{n} + \frac{1}{\log 2} \frac{\log n}{n}$.

Na základe $\mathbf{V}_{27}$ je $\frac{\log n}{n} \to 0$ a tak v dôsledku $\mathbf{P}_{42}$ a $\mathbf{V}_{21}$ je $\frac{E(n)}{n} \to 0$. Teda E je riedka. Tým je dôkaz vety skončený.

Dá sa ukázať, že aj množina všetkých dokonalých čísel druhého druhu je riedka (o tejto množine vieme, že je nekonečná — pozri $\mathbf{V}_{16}$). Dôkaz tohoto výsledku však presahuje rámec možností metod použiteľných v tejto knižke.

Poznamenajme pre zaujímavosť, že aj množina všetkých prvočísel je riedka. Dôkaz tohoto faktu sa tiež vymyká našim možnostiam.

Spomeňme nakoniec, že aj množina všetkých spriatelených čísel je riedka. Zatiaľ čo riedkosť množiny všetkých dokonalých čísel prvého a dokonalých čísel druhého druhu je dávno známym faktom, je poznatok o riedkosti množiny všetkých spriatelených čísel novšieho data. Pochádza z r. 1955 od maďarského matematika *P. Erdősa* a jeho dôkaz je založený na použití istých pravdepodobných metod v teorii čísel.