Goniometrické funkce

Výsledky cvičení

In: Stanislav Šmakal (author); Bruno Budinský (author): Goniometrické funkce. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1968. pp. 134–144.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403646

VÝSLEDKY CVIČENÍ

1.1. Ze vzorce $|a| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}$ plyne $|a| = 1$.

1.2. $\sqrt{2}$. Nelekněte se, vyjde-li vám $\left(\sqrt{3} + 1\right)\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Upravujte dále.

1.3. a) $r = \cos\frac{\varphi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}$, kde $\varphi = \frac{\pi}{6}$,

$$r = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$

b) $r = \cos\frac{\varphi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}$, kde $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, $r = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$.

1.4. $a = \sqrt{3} - \mathrm{i}$.

1.8. a) $\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \dfrac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$,

b) $\operatorname{cotg} x \pm \operatorname{cotg} y = \dfrac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}$.

1.10. $\cos 7\alpha = \cos^7\alpha - 21 \cos^5\alpha \sin^2\alpha + 35 \cos^3\alpha \sin^4\alpha -$
$- 7 \cos\alpha \sin^6\alpha$,

$\sin 7\alpha = 7 \cos^6\alpha \sin\alpha - 35 \cos^4\alpha \sin^3\alpha +$
$+ 21 \cos^2\alpha \sin^5\alpha - \sin^7\alpha$.

2.2. 1.

2.3. $x = y + (2k + 1)\pi$, dále $x = (2k + 1)\pi$, y libovolné číslo a konečně $y = 2k\pi$, x libovolné číslo.

2.4. $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$.

2.5. $x = k\pi$.

2.6. $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

2.7. $x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}$.

2.8. $x = -\frac{\pi}{8} + k\pi$, $x = -\frac{3}{8}\pi + k\pi$.

2.9. $x = k\frac{\pi}{4}$.

2.10. a) $x = k\pi$, $x = \pm\frac{2}{3}\pi + k\pi$,

b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = (2k + 1)\pi$,

c) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = k\pi$,

d) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = 2k\pi$,

e) $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$,

f) nemá řešení,

g) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi$,

h) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$,

i) $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$,

j) $x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$,

k) pro všechna $x \neq k\frac{\pi}{2}$,

l) $x = k\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$.

2.11. $x = y = \frac{2}{3}\pi$.

2.12. a) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $y = -\frac{\pi}{3} - k\pi$,

b) $x = \frac{\pi}{4} - k\pi$, $y = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

2.13. a) Nemá řešení.

b) $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, \quad y = \frac{\pi}{3} - k\frac{\pi}{2}.$

2.14. $x = \frac{13}{12}\pi + k\pi, \quad y = \frac{5}{12}\pi - k\pi.$

2.15. $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, \quad y = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}.$

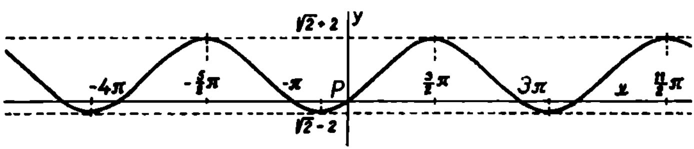
2.16. a) $x = k\pi, \quad y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,$

b) $x = k\pi, \quad y = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi,$

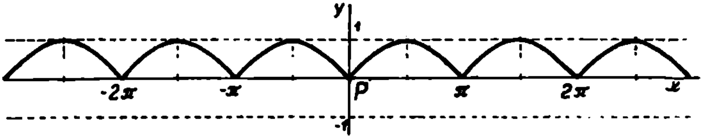
c) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,$

d) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad y = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi.$

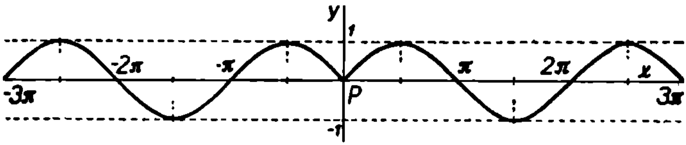
2.17. $x = y = \frac{\pi}{4} + k\pi.$



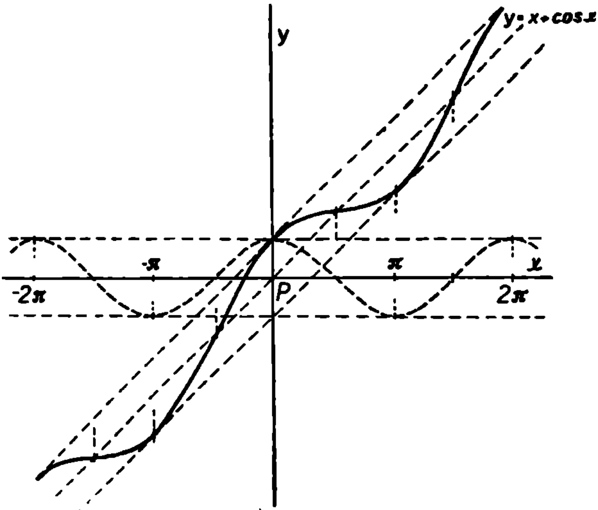
Obr. 32. Graf funkce $y = 2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 2.$



Obr. 33. Graf funkce $y = |\sin x|$.



Obr. 34. Graf funkce $y = \sin |x|$.



Obr. 35. Graf funkce $y = x + \cos x$.

2.19. $x = -\dfrac{2}{3}\pi + k\pi\,, \quad y = \dfrac{2}{3}\pi + k\pi\,.$

3.1. Obr. 32.

3.2. Obr. 33, 34.

3.3. Jestliže $x \geqq 0$, $\cos|x| = \cos x$;

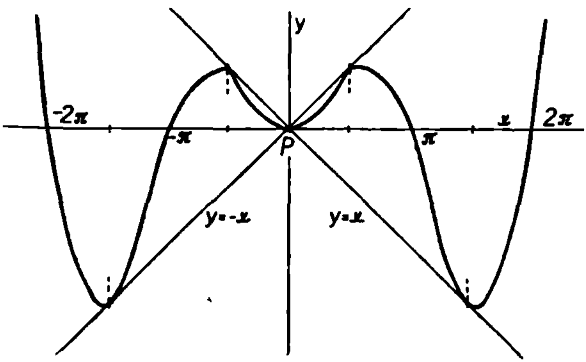
jestliže $x < 0$, $\cos|x| = \cos(-x) = \cos x$.

3.4. Obr. 35.

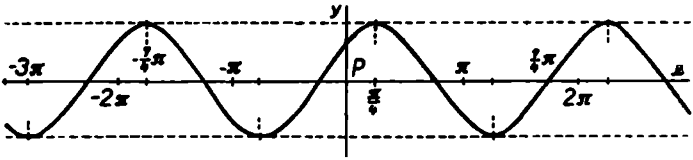
3.5. Obr. 36.

3.6. Obr. 37.

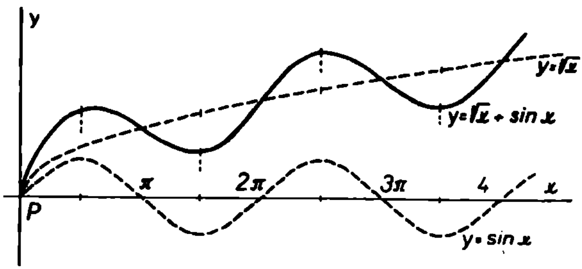
3.7. Obr. 38.



Obr. 36. Graf funkce $y = x \sin x$.



Obr. 37. Graf funkce $y = \sin x + \cos x$.



Obr. 38. Graf funkce $y = \sqrt{x} + \sin x$.

4.1. a) x je libovolné číslo z intervalů $\left\langle k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right\rangle$,

b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$,

c) x je libovolné číslo z intervalů

$(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5}{3}\pi + 2k\pi)$ s výjimkou všech čísel tvaru

$x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$,

d) x je libovolné číslo z intervalů

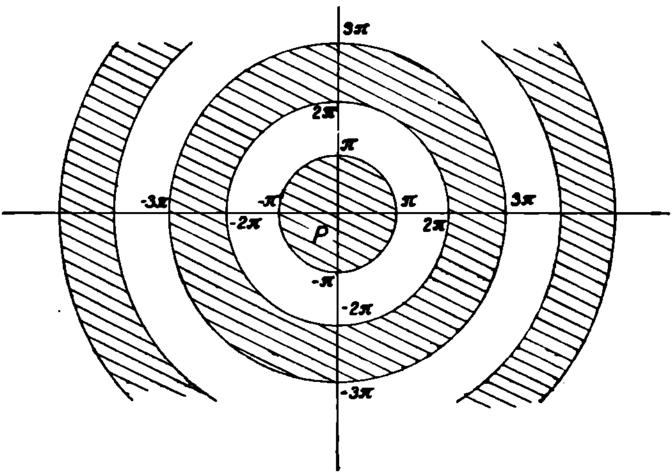
$\langle -\frac{5}{12}\pi + k\pi , \frac{\pi}{4} + k\pi \rangle$ s výjimkou všech čísel tvaru

$$x = \frac{3}{4}\pi + k\pi ,$$

e) x je libovolné číslo z intervalů $\langle -\frac{\pi}{4} + k\pi ,$

$\frac{\pi}{4} + k\pi \rangle$,

f) Nerovnost je splněna pro všechna $x \neq k\frac{\pi}{4}$.

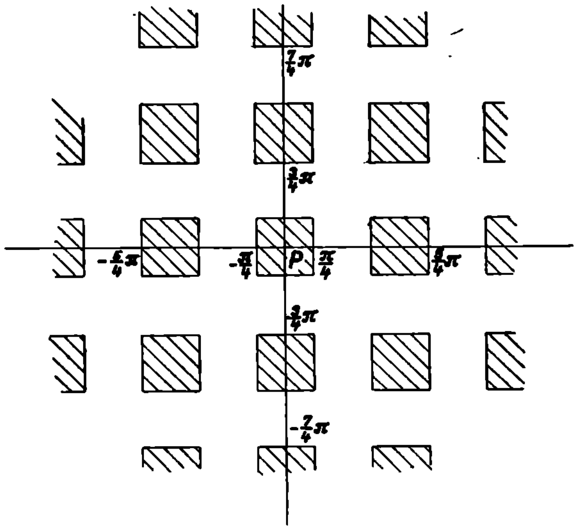


Obr. 39. Definiční obor funkce $z = \sqrt{\sin (x^2 + y^2)}$.

4.2. a) Funkce je definována pro všechny dvojice reálných čísel x, y, které splňují nerovnost

$$2k \leq x^2 + y^2 \leq (2k + 1)\,\pi\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Graficky jde o soustavu mezikruží (obr. 39).



Obr. 40. Definiční obor funkce $z = \sqrt{1 - \mathrm{tg}^2\, x} + \sqrt{1 - \mathrm{tg}^2\, y}$.

b) Funkce je definována pro každou dvojici reálných čísel. Grafickým řešením je proto každý bod roviny.

c) Funkce je definována pro každou dvojici reálných čísel x, y, která vyhovují nerovnostem

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi\,,$$

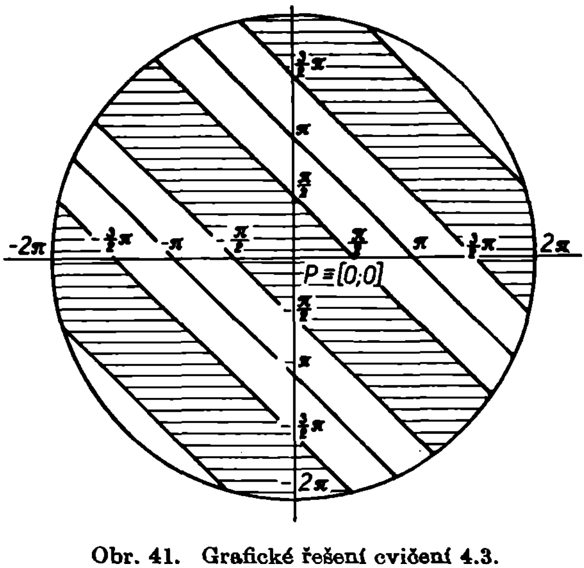
$$-\frac{\pi}{4} + k\pi \leqq y \leqq \frac{\pi}{4} + k\pi .$$

Grafické řešení ukazuje obr. 40.

4.3. Řešením je každá dvojice reálných čísel, která vyhovuje nerovnostem

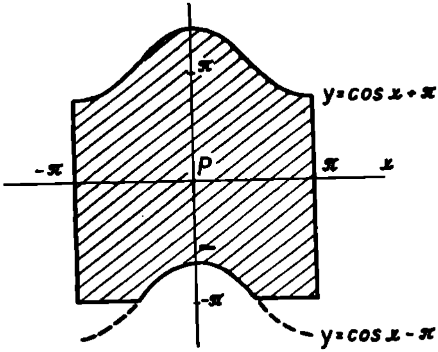
$$-x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi < y < -x + \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \text{ kde } k = -2, -1, 0, 1, \quad y \neq -x + \pi + 2k\pi .$$

Grafickým řešením jsou na obr. 41 bílé části uvnitř kruhu $k(P, 2\pi)$.



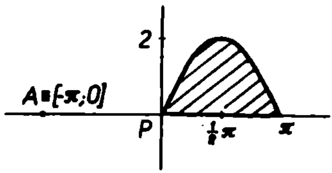
Obr. 41. Grafické řešení cvičení 4.3.

4.4. Obr. 42.



Obr. 42. Grafické řešení cvičení 4.4.

4.5. Obr. 43. K množině patří také bod $A \equiv [-\pi, 0]$.



Obr. 43. Výsledek cvičení 4.5.

4.6. a) Vyhovují všechna x z intervalů

$$\langle k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\rangle \text{ pro } k = 0, 1, 2, 3.$$

b) Řešením jsou všechna x z intervalů

$$\langle\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\rangle, \quad \langle\frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi\rangle.$$