Goniometrické funkce

3. kapitola. Grafy goniometrických funkcí

In: Stanislav Šmakal (author); Bruno Budinský (author): Goniometrické funkce. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1968. pp. 90–108.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403644

3. kapitola

GRAFY GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ

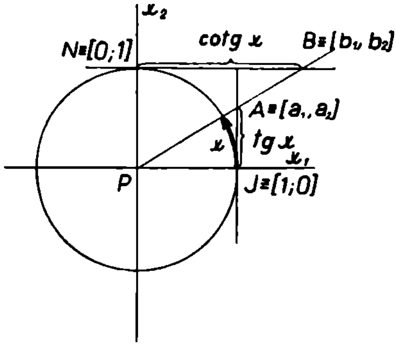
3.1. Základní grafy. V prvých dvou kapitolách jsme mluvili stále o goniometrických funkcích, aniž jsme zdůraznili, že jde skutečně o funkce, přesněji o reálné funkce jedné reálné proměnné. Nebude jistě na škodu krátké zdůvodnění.

Předpis, který každému reálnému číslu x z nějaké množiny reálných čísel M přiřazuje právě jedno reálné číslo y, nazýváme *reálnou funkcí jedné reálné proměnné.* Určité číslo y_0, které odpovídá číslu $x_0 \in M$, nazýváme *hodnotou funkce* v bodě x_0. Funkci obecně zapisujeme ve tvaru

$$y = f(x)\,, \quad x \in M\,.$$

Množinu M *nazýváme definičním oborem funkce.* Nejširší definiční obor, v němž daný funkční předpis má smysl, nazýváme obvykle *existečním oborem. Grafem funkce* rozumíme množinu všech bodů $[x, y]$ v rovině, jejichž souřadnice vyhovují rovnici $y = f(x)$, $x \in M$. Rovina, v níž provádíme grafické zobrazení funkce, je euklidovská rovina E_2 (tedy nikoliv Gaussova rovina).

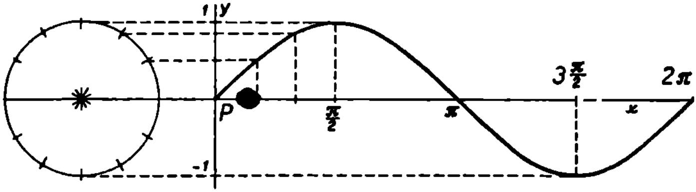
Každé reálné číslo x můžeme považovat za velikost nějakého orientovaného úhlu v základní poloze v Gaussově rovině. Na základě definice 1.1. je přiřazeno každému orientovanému úhlu o velikosti x jediné číslo $\sin x$. Ukázali jsme také, že hodnota $\sin x$ závisí pouze na velikosti argumentu x. Předpis $y = \sin x$ je tedy reálnou funkcí jedné reálné proměnné, neboť přiřazuje každému reálnému číslu x jedinou hodnotu $\sin x$. Existenčním oborem je interval $(-\infty, \infty)$. Podobným způsobem snadno ukážeme, že předpisy $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{cotg} x$ jsou reálnými funkcemi reálné proměnné. Přitom existenčním oborem funkce $y = \cos x$ je množina všech reálných čísel, existenčním oborem funkce $y = \operatorname{tg} x$



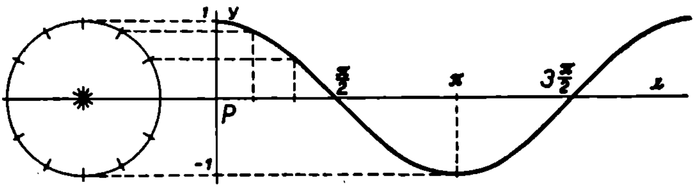
Obr. 11. Obrazy tangenty a kotangenty na jednotkové kružnici.

je množina všech reálných čísel s výjimkou čísel tvaru $(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$. Konečně existenčním oborem funkce $y = \operatorname{cotg} x$ je množina všech reálných čísel s výjimkou čísel tvaru $k\pi$. Dodejme ještě, že funkce $\sin x$ a $\cos x$ nabývají všech hodnot z intervalu $\langle -1, 1\rangle$, funkce $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ pak všech hodnot z intervalu $(-\infty, \infty)$.

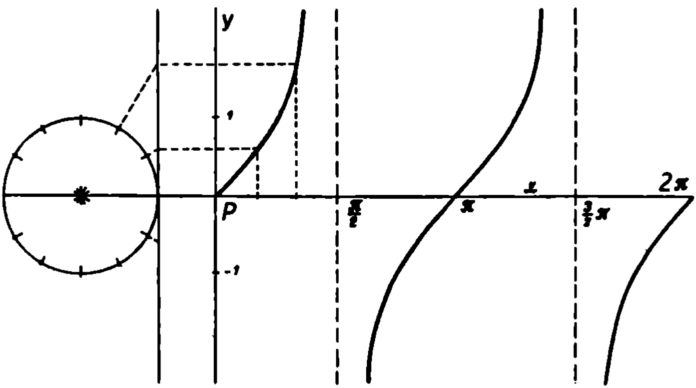
Pro úplnost ještě poznamenejme, že geometrický způsob, kterým jsme zavedli goniometrické funkce, není



Obr. 12. Graf funkce $y = \sin x$.



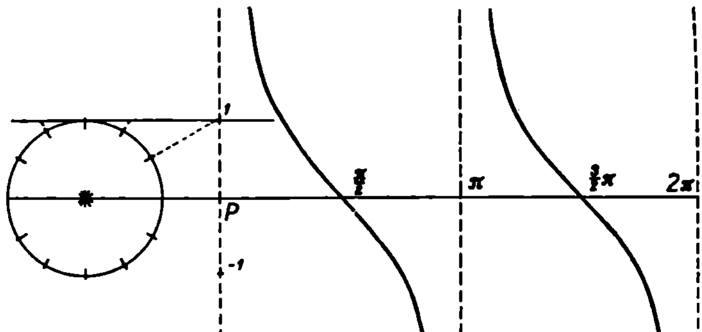
Obr. 13. Graf funkce $y = \cos x$.



Obr. 14. Graf funkce $y = \text{tg } x$.

jediný. Ve vyšší matematice se obvykle zavádějí pomocí tzv. *funkcionálních rovnic* nebo na podkladě *integrálního počtu*. Podrobnější výklad přesahuje rámec naší publikace.

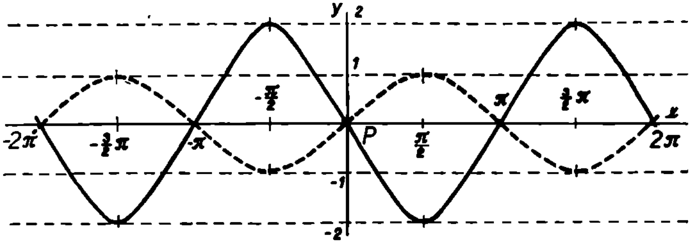
Grafy funkcí, o nichž jsme nyní hovořili, zná čtenář jistě ze školy. Jsou sestrojeny na obr. 12—15. Při sestrojení grafů funkcí se obvykle opíráme o tabulku hodnot. U goniometrických funkcí nám místo tabulky výhodně poslouží jednotková kružnice. Doplňme pouze, že hodnota tg x je pro každé přípustné x určena graficky souřadnicí a_2 průsečíku koncového ramene (nebo jeho prodloužení) s tečnou jednotkové kružnice, sestrojenou v bodě $J \equiv [1, 0]$. Podobně je pro každé x funkční hodnota cotg x dána souřadnicí b_1, průsečíku koncového ramene úhlu s tečnou jednotkové kružnice v bodě $N \equiv [0, 1]$. Srovnej obr. 11.



Obr. 15. Graf funkce $y = \text{cotg}\, x$.

3.2. Graf funkce $y = a\,f(bx + c) + d$. V obecném zápise znamená f libovolnou goniometrickou funkci, prakticky však vystačíme s funkcemi $\sin x$ a $\operatorname{tg} x$, neboť $\cos x$ a $\operatorname{cotg} x$ nahrazujeme obvykle kofunkcemi. Čísla a, b, c, d jsou reálná, $a \cdot b \neq 0$.

Nejdříve si všimneme rozdílu mezi grafy některých funkcí.

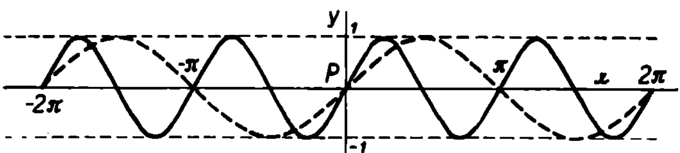


Obr. 16. Graf funkce $y = -2 \sin x$ sestrojený pomocí grafu funkce $y = \sin x$.

PŘÍPAD 1. Graf funkce $y = a\,f(x)$, kde $a \neq 0$, dostaneme z grafu funkce $y = f(x)$ zřejmě tak, že funkční hodnotu v každém bodě vynásobíme číslem a. Obě funkce mají stejné nulové body, tj. body, v nichž graf protíná osu x. Leží-li v nějakém intervalu graf funkce $y = f(x)$ nad osou (pod osou) x, pak pro $a > 0$ leží v tomto intervalu nad osou x (pod osou x) také graf funkce $y = a\,f(x)$, pro $a < 0$ leží naopak pod osou (nad osou). Na obr. 16 jsou sestrojeny grafy funkcí $y = \sin x$, $y = -2 \sin x$.

PŘÍPAD 2. Jaká je souvislost mezi grafy funkcí $y = f(x)$ a $y = f(x + c)$? Množina funkčních hodnot je v obou případech táž. Nabývá-li funkce $y = f(x)$ nějaké funkční hodnoty v bodě x_1, nabývá téže funkční hodnoty funkce $y = f(x + c)$ v bodě x_2, pro který platí $x_2 + c = x_1$, neboli $x_2 = x_1 - c$. Můžeme tedy říci, že graf funkce $y = f(x + c)$ vznikne z grafu funkce $y = f(x)$ posunutím o $|c|$ ve směru osy x. Jestliže $c > 0$, jedná se o posunutí „doleva", jestliže $c < 0$, jde o posunutí „doprava". Kupř. graf funkce $y = \cos x$ můžeme sestrojit z grafu funkce $y = \sin x$ pomocí identity $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ posunutím o $\frac{\pi}{2}$ „doleva".

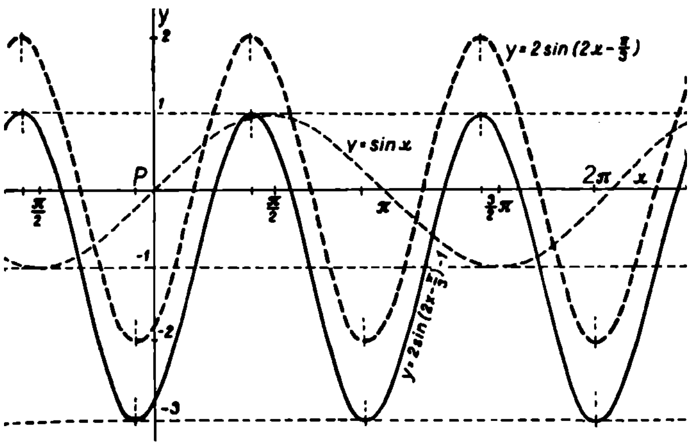
PŘÍPAD 3. Také v případě funkcí $y = f(x)$ a $y = f(bx)$, kde $b \neq 0$, je množina funkčních hodnot stejná. Nabývá-li však funkce $y = f(x)$ nějaké hodnoty v bodě x_1, nabývá téže funkční hodnoty funkce $y = f(bx)$ v bodě $x_2 = \frac{x_1}{b}$. Zatímco kupř. funkce $y = \sin x$ vyčerpá všechny své hodnoty v intervalu $\langle 0, 2\pi)$ stane se tak u funkce $y = \sin 2x$ v intervalu poloviční délky, tj. $\langle 0, \pi)$. Grafy těchto funkcí jsou na obr. 17. U funkcí periodických (jmenovitě goniometrických) má tedy číslo b vliv na zvětšení ($|b| < 1$, $b \neq 0$) nebo zmenšení ($|b| > 1$) periody.



Obr. 17. Graf funkce $y = \sin 2x$ v porovnání s grafem funkce $y = \sin x$.

PŘÍPAD 4. Graf funkce $y = f(x) + d$ vznikne zřejmě z grafu funkce $y = f(x)$ posunutím ve směru osy y o $|d|$. Číslo $d > 0$ určuje posunutí ve směru kladné poloosy y, $d < 0$ ve směru záporné poloosy y.

POZNÁMKA 3.1. Došlo by k omylu, kdybychom graf funkce $y = f(bx + c)$, kde $b \neq 1$, chtěli získat z grafu funkce $y = f(x)$ mechanickým spojením případů 2. a 3. Nabývá-li totiž funkce $y = f(x)$ nějaké hodnoty v bodě x_1, nabývá téže hodnoty funkce $f(bx + c)$ v bodě x_2, který je vázán rovnicí $bx_2 + c = x_1$, neboli $x_2 = \frac{x_1}{b} + \frac{c}{b}$. U funkcí goniometrických nejenže se změní perioda, ale v témž poměru se změní také velikost vektoru posunutí ve směru osy x.



Obr. 18. Graf funkce $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$.

V dosavadním rozboru jsme uvedli příklady některých funkcí, které jsou dílčím případem funkce

$$y = a\,f(bx + c) + d\,. \tag{3,1}$$

Z toho, co bylo dosud řečeno, můžeme graf funkce (3,1) sestrojit z grafu funkce $y = f(x)$ tak, že nejprve sestrojíme graf funkce $y = f(bx)$, ten posuneme o $\left|\frac{c}{b}\right|$ „doleva“ $\left(\frac{c}{b} > 0\right)$ nebo „doprava“ $\left(\frac{c}{b} < 0\right)$, potom provedeme graficky násobení každé funkční hodnoty číslem a (pozor na znaménko čísla a!). Dostaneme tak graf funkce $y = a\,\cancel{\sin}\,f(bx + c)$, který posunut o d ve směru kladné poloosy y pro $d > 0$ nebo ve směru záporné poloosy y pro $d < 0$ udává graf funkce (3,1). Na obr. 18 je tímto způsobem sestrojen graf funkce

$$y = 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1\,.$$

Graf funkce (3,1) můžeme však sestrojit přímo. V tom případě je důležitá znalost některých význačných bodů. Takovými jsou především nulové body. U funkce sinus jsou to dále body, v nichž nabývá své největší a nejmenší hodnoty, u funkce tangens pak takové body, v nichž není definována. Je-li číslo p periodou funkce, potom $f(bx + c + kp) = f(bx + c)$.

Příklad 3.1. Sestrojíme graf funkce

$$y = \frac{3}{2} \cos \left(\frac{4}{3}x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{3}{4}\,.$$

Na základě identity $\cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right)$ můžeme přejít ke kofunkci a danou funkci psát ve tvaru

$$y = \frac{3}{2}\sin\left(\frac{4}{3}x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{3}{4}.$$

Nulové body určíme z rovnice

$$\frac{3}{2}\sin\left(\frac{4}{3}x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{3}{4} = 0.$$

Dostaneme tak

$$x = -\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}k\pi, \quad x = -\frac{3}{4}\pi + \frac{3}{2}k\pi.$$

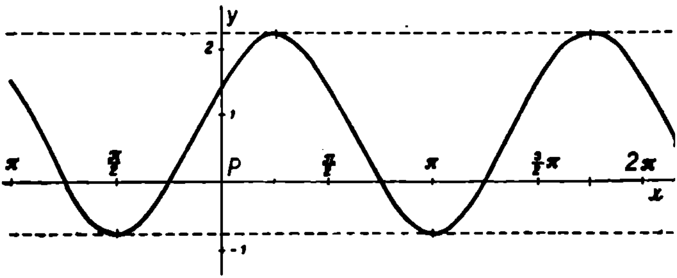
Jelikož $\sin z$ nabývá všech hodnot z intervalu $\langle -1, 1\rangle$, nabývá daná funkce všech hodnot z intervalu $\langle -\frac{3}{4}, \frac{9}{4}\rangle$, jak se snadno přesvědčíme třeba dosazením krajních bodů intervalu $\langle -1, 1\rangle$ do funkčního předpisu. Graf funkce leží proto v pásu ohraničeném přímkami o rovnicích $y = -\frac{3}{4}$, $y = \frac{9}{4}$. Své největší hodnoty nabývá funkce v těch bodech x, které vyhovují rovnici

$$\sin\left(\frac{4}{3}x + \frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

Řešením dostaneme body $x = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}k\pi$. Podobně je tomu s body, v nichž daná funkce nabývá své nejmenší hodnoty, tj. $-\frac{3}{4}$. Získáme je v tomto případě řešením rovnice

$$\sin\left(\frac{4}{3}x + \frac{\pi}{6}\right) = -1.$$

Jsou to čísla $x = -\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}k\pi.$



Obr. 19. Graf funkce $y = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{4}{3}x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{3}{4}$.

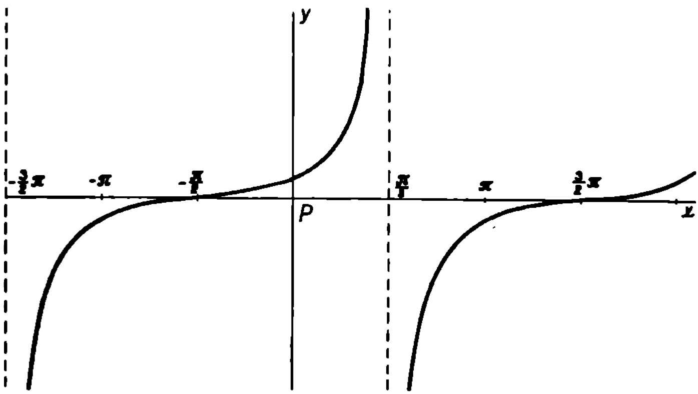
K náčrtku nám zjištěné údaje stačí. Dokonce stačí znát jediný bod, v němž funkce nabývá maximální nebo minimální hodnoty, neboť tyto hodnoty se střídají a leží vždy uprostřed mezi sousedními nulovými body.

Pro přesnější sestrojení grafu využijeme opět jednotkové kružnice. Každou hodnotu musíme však násobit číslem $\frac{3}{2}$ a zvětšit o $\frac{3}{4}$. Graf je na obr. 19.

Příklad 3.2. Máme-li sestrojit graf funkce

$$y = \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

určíme nejprve definiční obor. Podle vzorců (1,11) $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, neboli $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Čísla $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, která jsou řešením rovnice $\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, dávají nulové body. V každém intervalu délky 2π má graf stejný průběh. Stačí proto sestrojit kupř. tu část grafu, která leží v intervalu $\left(-\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}\right)$. Graf je na obr. 20.



Obr. 20. Graf funkce $y = \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

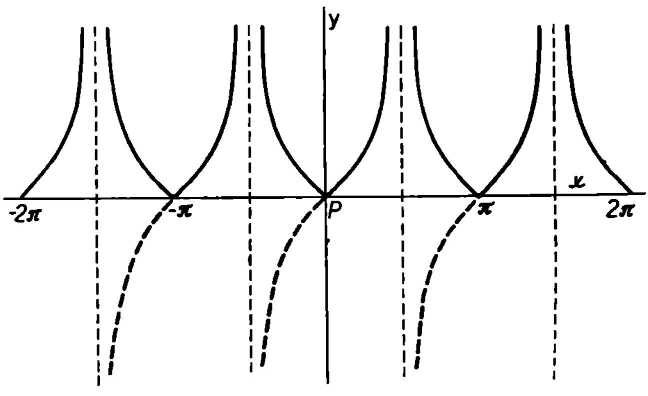
3.3. Některé další grafy. V tomto odstavci uvedeme příklady grafů některých dalších funkcí, v nichž se vyskytují funkce goniometrické. Nepůjde o žádný systém, neboť takový systém není ani možné udat. Půjde spíše o návod, jak postupovat v obdobných případech.

Příklad 3.3. Sestrojíme grafy funkcí

$$\text{a) } y = |\mathrm{tg}\, x|$$

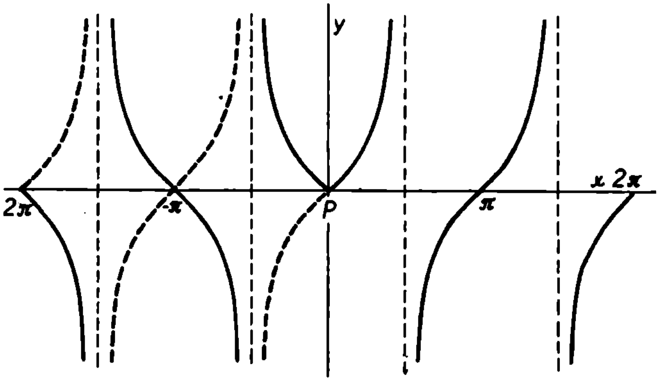
$$\text{b) } y = \mathrm{tg}\, |x| .$$

a) Graf funkce $y = |\mathrm{tg}\, x|$ je sestrojen na obr. 21.a. V intervalech $\langle k\pi, (2k+1)\frac{\pi}{2})$, v nichž je $\mathrm{tg}\, x \geqq 0$, mají funkce $y = |\mathrm{tg}\, x|$ a $y = \mathrm{tg}\, x$ stejný průběh. Množina nulových bodů je stejná, neboť $|\mathrm{tg}\, x| = 0$ tehdy



Obr. 21a. Graf funkce $y = |\mathrm{tg}\, x|$.

a jen tehdy, jestliže $\operatorname{tg} x = 0$. V intervalech $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi\rangle$ je $\operatorname{tg} x < 0$ a proto $|\operatorname{tg} x| = -\operatorname{tg} x$. Každá funkční hodnota je tudíž číslo opačné k $\operatorname{tg} x$, grafy $\operatorname{tg} x$ a $|\operatorname{tg} x|$ jsou v těchto intervalech souměrně sdružené podle osy x (srovnejte případ 1, odst. 3.2).



Obr. 21b. Graf funkce $y = \operatorname{tg} |x|$.

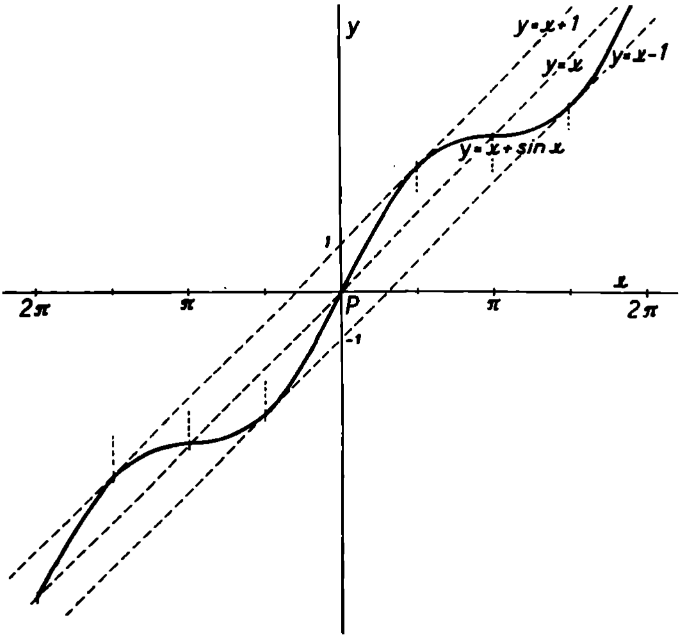
b) Funkce $y = \operatorname{tg} |x|$ nabývá stejných hodnot jako funkce $y = \operatorname{tg} x$, jestliže $x \geqq 0$. Je-li $x < 0$, potom $\operatorname{tg} |x| = \operatorname{tg} (-x) = -\operatorname{tg} x$. Pro $x < 0$ je tedy graf funkce $y = \operatorname{tg} |x|$ souměrně sdružený podle osy x s grafem funkce $y = \operatorname{tg} x$. Graf je na obr. 21b.

Příklad 3.4. Sestrojme graf funkce

$$y = x + \sin x .$$

Graf dané funkce leží v pásu určeném přímkami o rovnicích $y = x - 1$, $y = x + 1$, neboť z nerovnosti $-1 \leqq$

$\leqq \sin x \leqq 1$ plyne bezprostředně $x - 1 \leqq x + \sin x \leqq \leqq x + 1$. Přitom body grafu, jejichž x-ové souřadnice vyhovují podmínce $\sin x = -1$, leží na přímce $y = x - 1$, body, jejichž x-ové souřadnice vyhovují podmínce $\sin x = 1$, leží na přímce $y = x + 1$. V prvém případě jde o body, pro které $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, v druhém případě pak $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Přímku $y = x$ protíná

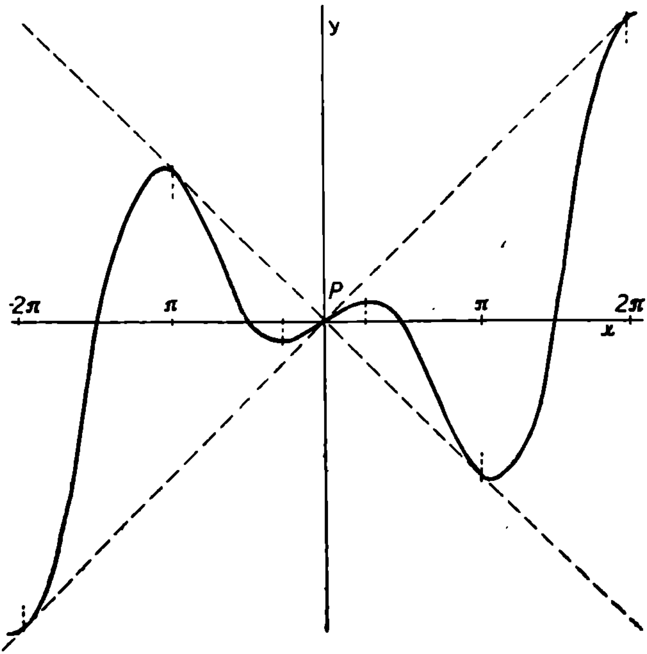


Obr. 22. Graf funkce $y = x + \sin x$.

graf dané funkce v těch bodech, jejichž x-ové souřadnice jsou kořeny rovnice $\sin x = 0$, to znamená $x = k\pi$. Další body grafu si můžeme opatřit prostým grafickým součtem s použitím jednotkové kružnice (obr. 22).

Příklad 3.5. Dále sestrojíme graf funkce

$$y = x \cos x \ .$$



Obr. 23. Graf funkce $y = x \cos x$.

Po vynásobení známé nerovnosti $-1 \leqq \cos x \leqq 1$ číslem x snadno dojdeme k těmto závěrům:

a) jestliže $x > 0$, potom $-x \leqq x \cos x \leqq x$;
b) jestliže $x < 0$, potom $x \leqq x \cos x \leqq -x$;
c) jestliže $x = 0$, potom také $x \cos x = 0$.

Graf funkce $y = x \cos x$ leží proto v obou vrcholových úhlech, sevřených přímkami o rovnicích $y = x$, $y = -x$, které obsahují osu x. Hledáme-li (podobně jako v příkladě 3.4) body grafu, které leží na přímkách $y = x$, $y = -x$, vidíme, že jde o body, jejichž x-ové souřadnice vyhovují pořadě podmínkám $x \cos x = x$, $x \cos x = -x$. Prvá rovnice má kořeny $x = 2k\pi$, druhá $x = 0$, $x = (2k + 1)\pi$. Leží tedy na přímkách $y = x$, $y = -x$ body grafu, pro které $x = k\pi$. Nulové body jsou kořeny rovnice $x \cos x = 0$, tj. $x = 0$, $x = (2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$. Graficky můžeme získat libovolný počet dalších funkčních hodnot (obr. 23).

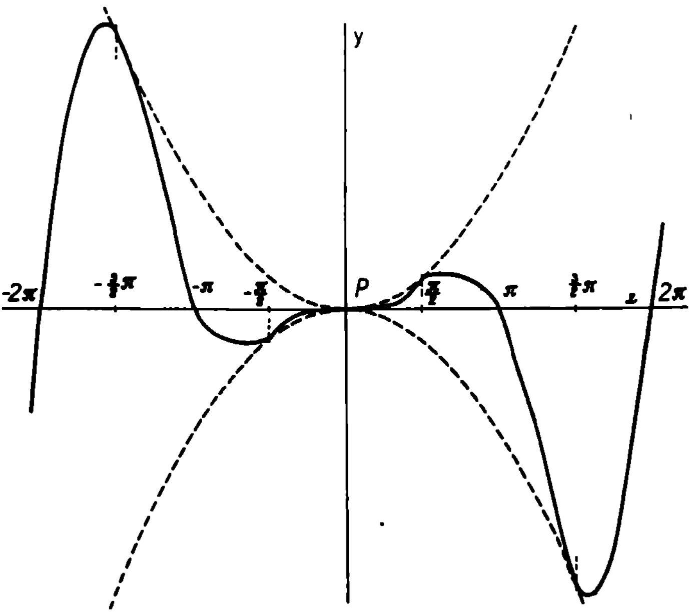
Příklad 3.6. Graf funkce

$$y = \frac{1}{4} x^2 \sin x$$

sestrojíme podobně. Z nerovnosti $-1 \leqq \sin x \leqq 1$ plyne pro každé x:

$$-\frac{1}{4} x^2 \leqq \frac{1}{4} x^2 \sin x \leqq \frac{1}{4} x^2.$$

Graf je tudíž v části roviny, která obsahuje osu x a je omezena parabolami o rovnicích $y = -\dfrac{1}{4} x^2$, $y = \dfrac{1}{4} x^2$. Nulové body obdržíme řešením rovnice $x^2 \sin x = 0$, která má kořeny $x = k\pi$ (číslo $x = 0$ je zahrnuto v zápise pro $k = 0$). Jestliže $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, nabývá funkce hodnoty $\frac{1}{4}x^2$, příslušné body grafu leží proto na parabole $y = \frac{1}{4}x^2$. Jestliže $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, leží příslušné body grafu na parabole $y = -\frac{1}{4}x^2$. (Obr. 24.)

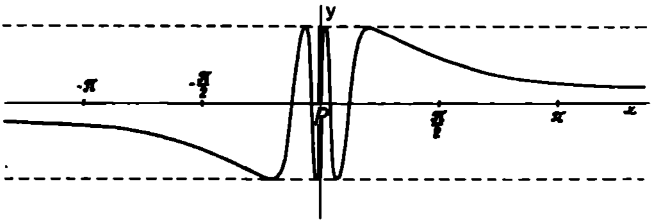


Obr. 24. Graf funkce $y = \frac{1}{4}x^2 \sin x$.

Příklad 3.7. V obr. 25 je sestrojen graf funkce

$$y = \sin \frac{1}{x}.$$

S touto funkcí se často setkáváme ve vyšší matematice. Všimněme si, že funkce je definována pro všechna $x \neq 0$. Funkční hodnoty probíhají interval $\langle -1, 1 \rangle$.



Obr. 25. Graf funkce $y = \sin \frac{1}{x}$.

Nulové body této funkce jsou řešením rovnice $\sin \frac{1}{x} = 0$. Můžeme je proto vyjádřit vztahem $\frac{1}{x} = k\pi$, čili $x = \frac{1}{k\pi}$. Odtud plyne, že zkoumaná funkce má nekonečně mnoho nulových bodů. Všechny tyto body leží v intervalu $\langle \frac{1}{\pi}, -\frac{1}{\pi} \rangle$. Přitom $-\frac{1}{\pi}$ je prvním nulovým bodem zleva, $\frac{1}{\pi}$ prvním nulovým bodem zprava.

Cvičení

3.1. Sestrojte graf funkce $y = 2 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}$.

3.2. Sestrojte grafy funkcí

a) $y = |\sin x|$,

b) $y = \sin |x|$.

3.3. Proč funkce $y = \cos x$ a $y = \cos |x|$ mají týž graf?

3.4. Sestrojte graf funkce $y = x + \cos x$.

3.5. Sestrojte graf funkce $y = x \sin x$.

3.6. Vyjádřete funkci $y = \sin x + \cos x$ ve tvaru (3,1) a sestrojte graf. (Návod: Užijte identity z příkladu 2.13.)

3.7. Sestrojte graf funkce

$$y = \sqrt{x} + \sin x .$$