Goniometrické funkce

2. kapitola. Goniometrické rovnice a úpravy goniometrických výrazů

In: Stanislav Šmakal (author); Bruno Budinský (author): Goniometrické funkce. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1968. pp. 42–89.

2. kapitola

GONIOMETRICKÉ ROVNICE A ÚPRAVY GONIOMETRICKÝCH VÝRAZŮ

2.1. Základní goniometrická rovnice. Vrátíme se úvodem k jednotkové kružnici, abychom si připomněli, při kterých velikostech orientovaného úhlu nabývají funkce $\sin x$ a $\cos x$ nulové hodnoty. Touto otázkou jsme se z nutnosti zabývali už v 1. kapitole při stanovení existenčních oborů funkcí $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ (srovnejte příslušný rozbor na str. 21, který předcházel definičním vztahům (1,11)). Dospěli jsme tam k závěru, že $\sin x$ je roven nule právě pro každý celočíselný násobek čísla π, $\cos x$ pak pro každý lichý násobek čísla $\frac{\pi}{2}$. Řešili jsme tím vlastně zvláštní případy tzv. *goniometrických rovnic*

$$\sin x = 0 , \quad \text{respektive} \quad \cos x = 0 ,$$

a zjistili jsme, že všechna řešení těchto rovnic můžeme zapsat ve tvaru

$$x = k\pi , \quad \text{respektive} \quad x = (2k + 1) \frac{\pi}{2} . \qquad (2,1)$$

Často se při řešení úloh setkáme s následujícím problémem: Známe hodnotu některé goniometrické funkce, ale neznáme velikost úhlu, pro niž příslušná funkce známé hodnoty nabývá. Takovou závislost píšeme obecně ve tvaru

$$f(x) = c , \qquad (2,2)$$

kde c je nějaké známé číslo a $f(x)$ je goniometrická funkce s argumentem x, jehož velikost neznáme. Kupř. $\sin x = \frac{1}{2}$, $\cotg x = 1$ jsou příkladem takových závislostí. Rovnice tvaru (2,2) se nazývá *základní goniometrická rovnice* nebo *goniometrická rovnice v základním tvaru.* Řešením takové rovnice rozumíme zpravidla libovolnou velikost orientovaného úhlu, která po dosazení převádí rovnici v rovnost. V praktických úlohách z planimetrie, stereometrie a podobně se přirozeně omezíme pouze na ty velikosti, které mají pro danou úlohu význam. Jestliže najdeme všechna řešení dané rovnice, potom množinu všech těchto řešení nazýváme *obecným řešením.*

Každá rovnice tvaru (2,2) nemusí mít ovšem řešení. Např. rovnice $\cos x = 2$ řešení nemá, neboť $\sin x$ a $\cos x$ nabývají (podle věty 1.2) pouze hodnot z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Má-li však rovnice řešení, potom jich má nekonečně mnoho. Tato skutečnost je přímým důsledkem periodičnosti goniometrických funkcí.

Všimneme si nejprve rovnice

$$\sin x = c\,, \tag{2,3}$$

kde c je libovolné, ale pevně zvolené číslo z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Předpokládejme, že jedno řešení rovnice (2,3) je α. Položme si otázku, zda existují ještě nějaká další řešení. V tom případě by muselo platit $\sin x = \sin \alpha$. Převedeme-li $\sin \alpha$ na levou stranu a použijeme vzorců (1,34a), dostaneme postupně

$$\sin x - \sin \alpha = 0\,,$$

$$2 \cos \frac{x + \alpha}{2} \sin \frac{x - \alpha}{2} = 0\,.$$

Aby byla splněna poslední rovnice, musí platit buď

$$\sin \frac{x - \alpha}{2} = 0\,, \quad \text{nebo} \quad \cos \frac{x + \alpha}{2} = 0\,.$$

Dostáváme tak nové dvě dílčí rovnice, jejichž všechna řešení nám dávají celkové řešení původní rovnice. Abychom toto řešení nalezli, upravíme obě poslední dílčí rovnice pomocí vztahu (2,1). Dostáváme tak

$$\frac{x - \alpha}{2} = k\pi\,, \qquad \frac{x + \alpha}{2} = (2k + 1)\,\frac{\pi}{2}\,.$$

Odtud již snadno vypočteme konečný výsledek

$$x = \alpha + 2k\pi\,, \quad x = (\pi - \alpha) + 2k\pi\,. \qquad (2,4)$$

Všechna řešení rovnice (2,3) můžeme tedy zapsat ve tvaru (2,4). Jestliže $\alpha = \frac{\pi}{2}$ nebo $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, říkají oba zápisy totéž a vystačíme pouze s jedním z nich.

Příklad 2.1. a) Řešme rovnici

$$\sin x = \frac{1}{2}\,.$$

Jedno řešení známe. Je to číslo $\frac{\pi}{6}$. Podle (2,4) zapíšeme obecné řešení ve tvaru

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\,, \quad x = \frac{5}{6}\,\pi + 2k\pi\,.$$

b) Obecné řešení rovnice $\sin x = 1$ zapíšeme však takto:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\,.$$

Máme-li určit všechny kořeny rovnice

$$\cos x = c\,, \qquad (2,5)$$

kde c je libovolně, ale pevně zvolené číslo z intervalu $\langle -1, 1\rangle$, zvolíme obdobný postup jako u rovnice (2,3). Je-li jedno známé řešení α, potom další možná řešení musí splňovat rovnici $\cos x = \cos \alpha$. Obdobnou úpravou jako u rovnice (2,3) za použití vzorců (1,34b) dostaneme postupně vztahy

$$\cos x - \cos \alpha = 0 \,,$$

$$-2 \sin \frac{x + \alpha}{2} \sin \frac{x - \alpha}{2} = 0 \,.$$

Odtud plyne, že

$$\frac{x - \alpha}{2} = k\pi \,, \quad \frac{x + \alpha}{2} = k\pi \,.$$

Konečný výsledek můžeme zapsat ve tvaru

$$x = \alpha + 2k\pi \,, \quad x = -\alpha + 2k\pi \,, \tag{2,6}$$

který nám představuje obecné řešení rovnice (2,5). Zápis (2,6) je jednoduchý a snadno se pamatuje.

Příklad 2.2. Řešme rovnici

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \,.$$

Jak plyne z předcházejících úvah, je obecné řešení této rovnice dáno vztahem

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi \,.$$

Rovnice

$$\operatorname{tg} x = c \tag{2,7}$$

má řešení pro každé reálné číslo c. Jedno její známé řešení označme opět α. Případná další řešení musí vyhovovat rovnici $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha$, kterou upravíme tak, že převedeme $\operatorname{tg} \alpha$ na levou stranu a nahradíme sinem a kosinem. Dostáváme tak rovnici

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \alpha = 0 ,$$

kterou uvedeme na tvar

$$\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 0 .$$

Zde ovšem předpokládáme, že $\cos x \cos \alpha \neq 0$, neboť jinak by $\operatorname{tg} x$ neexistovala a daná rovnice by neměla smysl. Násobíme-li tedy obě strany rovnice nenulovým výrazem $\cos x \cos \alpha$, obdržíme

$$\sin x \cos \alpha - \cos x \sin \alpha = 0$$

a podle (1,25b)

$$\sin (x - \alpha) = 0 .$$

S přihlédnutím k výsledku (2,1) můžeme obecné řešení poslední rovnice a tím také obecné řešení rovnice (2,7) zapsat souhrnně

$$x = \alpha + k\pi . \tag{2,8}$$

Příklad 2.3. Všechny kořeny rovnice $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ jsou dány zápisem $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

POZNÁMKA 2.1. Obdobným způsobem jako u rovnice (2,7) bychom dospěli k závěru, že všechna řešení rovnice $\operatorname{cotg} x = c$ mají rovněž tvar (2,8).

Při hledání obecného řešení základních goniometrických rovnic jsme vycházeli z předpokladu, že známe jedno řešení. Jak je vidět z výsledků (2,4), (2,6), (2,8) a z poznámky 2.1, stačí nám jedno takové řešení ke znalosti všech kořenů goniometrické rovnice. Proto je dobré hodnoty goniometrických funkcí některých úhlů znát zpaměti. Uvádíme je v přehledné tabulce.*).

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\, x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0		0
$\mathrm{cotg}\, x$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0		0	

V obecných postupech jsme pro c žádali jen taková omezení, aby byla zajištěna existence řešení. Pozornému čtenáři však jistě neušlo, že v příkladech, které jsme dosud uvedli, bylo číslo c kladné. Jestliže totiž $c > 0$, leží vždy jedno řešení takové rovnice v prvém kvadrantu a k jeho určení nám poslouží buď paměť, nebo tabulky

*) Prázdná místa v tabulce odpovídají argumentu, pro který není příslušná goniometrická funkce definována.

hodnot goniometrických funkcí. Jestliže $c < 0$, pomůže nám přechod k zápornému argumentu u funkcí $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ dosáhnout toho, aby hodnotou funkce bylo číslo kladné. Poslouží nám vzorce (1,24a), (1,24b). Řešení se tedy opírá i v tomto případě o 1. kvadrant. Ukážeme si příklad.

Příklad 2.4. Rovnici $\operatorname{cotg} x = -\sqrt{3}$ násobíme číslem (-1) a použijeme vzorce $\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$. Získáme tak rovnici $\operatorname{cotg}(-x) = \sqrt{3}$.

Tabulka na str. 47 nám říká, že funkce kotangens nabývá hodnoty $\sqrt{3}$ pro úhel velikosti $\frac{\pi}{6}$. Na základě výsledku (2,8) a poznámky 2.1 je obecné řešení dáno ve formě $-x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, neboli $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$.

POZNÁMKA 2.2. Prakticky můžeme tedy základní goniometrické rovnice pro $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ s pravou stranou zápornou řešit jako odpovídající rovnici s pravou stranou kladnou s tím, že před výsledky připíšeme minus.

Příklad 2.5. Kořeny rovnice $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ určíme tedy následovně: V rovnici $\sin z = \frac{\sqrt{3}}{2}$ má kořen, který leží v 1. kvadrantu, hodnotu $\frac{\pi}{3}$. Poznámka 2.2. nám dovoluje zapsat kořeny dané rovnice takto:

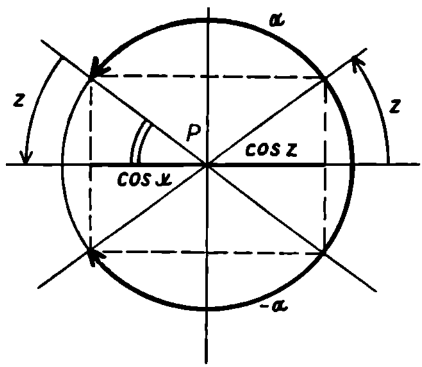
$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\,, \quad x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi\,.$$

Ve shodě s obecným řešením (2,4) můžeme ovšem při známé hodnotě $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ použít jiného zápisu

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi.$$

Oba zápisy jsou přirozeně ekvivalentní a dají se vzájemně převést. Čtenář si jistě sám zvolí způsob, který mu lépe vyhovuje.

Uvedený postup selže v případě goniometrické rovnice $\cos x = c$, kde $c < 0$. Věnujme jí proto chvíli pozornost. Funkce $\cos x$ nabývá záporných hodnot ve 2. a 3. kvadrantu (obr. 9). Při řešení dané rovnice využijeme opět 1. kvadrant, jen cesta bude trochu jiná. Jelikož jedno řešení, které označíme opět α, leží ve 2. kvadrantu, můžeme je jistě psát ve formě $\alpha = \pi - z$, kde $z \in \langle 0, \frac{\pi}{2})$. Dále, poněvadž α je předpokládaný kořen rovnice,



Obr. 9. K řešení rovnice $\cos x = c$, $c < 0$.

musí platit $\cos(\pi - z) = c$. Úprava levé strany podle příslušného vzorce (1,25b) vede k rovnici $\cos z = -c$. Tato rovnice má pravou stranu kladnou, neboť z předpokladu $c < 0$ plyne, že $-c > 0$. Umíme proto určit z a tím i hodnotu α, pro kterou platí vztah $\alpha = \pi - z$. Ostatní kořeny rovnice vypočteme pak na základě (2,6).

Příklad 2.6. Řešme rovnici

$$\cos x = -\frac{1}{2}.$$

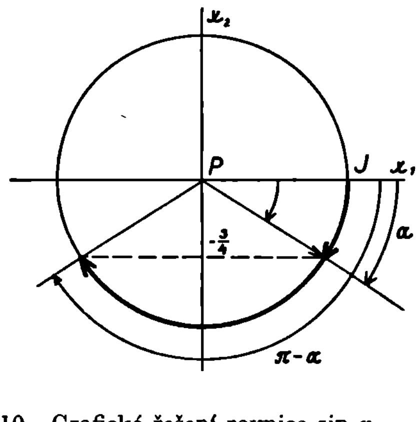
Pomocnou hodnotu z získáme řešením rovnice $\cos z = \frac{1}{2}$. Stačí, určíme-li jeden kořen, který leží v 1. kvadrantu. Tímto kořenem je zřejmě číslo $\frac{\pi}{3}$. Potom ovšem $\alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ a hledané obecné řešení je dáno podle (2,6) vztahem

$$x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \quad x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi.$$

POZNÁMKA 2.3. Kořeny rovnic $\sin x = 0$ a $\cos x = 0$ byly uvedeny v (2,1). Stejné kořeny jako rovnice $\sin x = 0$ má také rovnice $\operatorname{tg} x = 0$, neboť zlomek $\frac{\sin x}{\cos x}$ nabývá hodnoty 0 tehdy a jen tehdy, jestliže $\sin x = 0$. Totéž platí o rovnicích $\cos x = 0$ a $\operatorname{cotg} x = 0$.

POZNÁMKA 2.4. Souvislost mezi goniometrickými funkcemi a jednotkovou kružnicí nám umožňuje bezpečnou kontrolu, zda nalezená řešení leží v příslušném kvadrantu. Podle (1,8) víme, že $\sin x$ je imaginární složka, $\cos x$ pak reálná složka komplexní jednotky s argumentem x. Je-li c libovolné číslo z intervalu $(-1, 1)$, existují vždy právě dvě různé komplexní jednotky tak, že jejich imaginární složka má hodnotu c. Jestliže $c > 0$, leží příslušné jednotkové vektory, které jsou obrazy těchto jednotek, nad osou x_1 a kořeny rovnice $\sin x = c$ musí ležet v 1. a 2. kvadrantu. Jestliže $c < 0$, obrazy obou jednotek leží pod osou x_1 a hledané kořeny se musí nacházet ve 3. a 4. kvadrantu. Obr. 10 ukazuje grafické řešení rovnice $\sin x = -\dfrac{3}{4}$.

Podobně jako se sinem je tomu i s kosinem. Naše znalosti o sinu a kosinu nám také v plné míře stačí, máme-li rozhodnout, v kterém kvadrantu leží kořeny rovnic $\operatorname{tg} x = c$ a $\operatorname{cotg} x = c$, jak plyne z definičních vztahů (1,11).



Obr. 10. Grafické řešení rovnice $\sin x = -\dfrac{3}{4}$.

Uvedeme ještě dva příklady goniometrických rovnic, v nichž argument bude mít poněkud složitější formu, než tomu bylo dosud.

Příklad 2.7. Řešme rovnici

$$\operatorname{tg} 2x = -1 .$$

Užijeme-li substituce $y = 2x$, dostáváme novou rovnici $\operatorname{tg} y = -1$, která má kořeny $y = -\frac{\pi}{4} + k\pi$. Po návratu k neznámé x snadno určíme vztah

$$x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} ,$$

kterým je dáno obecné řešení rovnice dané.

Základní goniometrické rovnice s vícenásobným argumentem nám tedy nečiní žádné potíže. V praxi nepoužíváme zpravidla ani substituce, nýbrž výpočet provádíme přímo. Obdobný je výpočet kořenů goniometrických rovnic, v nichž argument má tvar součtu nebo rozdílu, jak ukazuje další příklad.

Příklad 2.8. Řešme rovnici

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Substitucí $y = \frac{\pi}{6} - 2x$ ji převeďme na tvar

$$\cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Podobně jako v příkladu 2.6 vypočtěme jeden kořen pomocné rovnice $\cos z = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tímto kořenem je zřejmě číslo $\frac{\pi}{6}$. Má proto jedno řešení rovnice $\cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ hodnotu $\alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$. Potom podle (2,6)

$$y = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\,, \quad y = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi\,.$$

Vrátíme-li se k neznámé x, snadno dostaneme výsledek

$$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi\,, \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,,$$

který je obecným řešením původní rovnice.

Shrneme-li dosavadní výsledky, můžeme říci:

Je-li α libovolné jedno řešení rovnice

a) $\sin x = c$,

b) $\cos x = c$,

c) $\operatorname{tg} x = c$,

d) $\operatorname{cotg} x = c$,

potom obecné řešení této rovnice můžeme zapsat ve tvaru

a) $x = \alpha + 2k\pi\,, \quad x = (\pi - \alpha) + 2k\pi$,

b) $x = \alpha + 2k\pi\,, \quad x = -\alpha + 2k\pi$,

c) $x = \alpha + k\pi$,

d) $x = \alpha + k\pi$.

Jak určíme jedno řešení goniometrické rovnice v základním tvaru, bylo vyloženo výše.

2.2. Goniometrická rovnice tvaru $af^2(x) + bf(x) + c = 0$. Často se setkáme s rovnicí, která je kvadratická vzhledem k některé funkci. Tento tvar má kupř. rovnice $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$. Obecně můžeme takovou rovnici zapsat ve tvaru

$$af^2(x) + bf(x) + c = 0 ,$$

kde $f(x)$ je některá goniometrická funkce. Rovnici rozřešíme nejprve vzhledem k příslušné funkci (v našem případě ke $\cos x$). Tím získáme základní tvar goniometrické rovnice, který již umíme řešit. Výpočet ukážeme na příkladě.

Příklad 2.9. Při řešení rovnice

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

použijeme substituce $y = \cos x$. Získáme novou rovnici $2y^2 - y - 1 = 0$. Jejími kořeny jsou čísla $1, -\frac{1}{2}$. Jelikož $y = \cos x$, mají obě hledané základní goniometrické rovnice tvar

$$\cos x = 1, \quad \cos x = -\frac{1}{2}.$$

Kořeny první z nich jsou $x = 2k\pi$, kořeny druhé podle příkladu 2.6

$$x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi , \quad x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi .$$

Tím jsme získali všechny kořeny čili obecné řešení dané rovnice.

Příklad 2.10. Podobně řešíme rovnici

$$\operatorname{tg}^2 x = \sqrt{3} \operatorname{tg} x .$$

Jde o kvadratickou rovnici bez absolutního členu. Řešení je patrné ze zápisu:

$$\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x = 0 ,$$
$$\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0 .$$

Odtud plyne, že $\operatorname{tg} x = 0$ nebo $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$. Obecné řešení původní rovnice můžeme psát ve tvaru

$$x = k\pi , \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi .$$

2.3. Úpravy goniometrických výrazů. V další části této kapitoly se věnujeme úpravám goniometrických výrazů. Víme, že mezi goniometrickými funkcemi platí celá řada vztahů. Budeme se o ně přirozeně opírat. Čtenář si jistě právem položí otázku, k čemu je dobré zabývat se úpravou goniometrických výrazů. Pro odpověď nemusíme daleko. Při výpočtech, v nichž se vyskytují goniometrické funkce, dospějeme obvykle k výrazům, které jsou značně složité a nepřehledné a vhodnou úpravou je můžeme často zjednodušit. Případný rozbor jednoduššího výrazu je vždycky přehlednější a hlavně bezpečnější. Úpravy nám také umožňují převést složitější goniometrické rovnice na základní tvar.

Příklad 2.11. Máme upravit výraz

$$\frac{\cos^2 2\alpha + 1}{\cos 2\alpha + 1} - \cos 2\alpha$$

a stanovit, pro které hodnoty α má smysl.

Jmenovatel zlomku, který se v daném výraze vyskytuje, musí být rozdílný od nuly. Jinak řečeno, musíme vyloučit všechny kořeny rovnice $\cos 2\alpha = -1$. Výpočet kořenů ponecháme čtenáři, zapíšeme pouze výsledek $\alpha = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$. Daný výraz má proto smysl, jestliže $\alpha \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$. Prvním krokem při úpravě bude převod na společného jmenovatele. Sloučíme-li poté členy v čitateli, můžeme s přihlédnutím k vzorci (1,30) psát

$$\frac{\cos^2 2\alpha + 1}{\cos 2\alpha + 1} - \cos 2\alpha =$$

$$= \frac{\cos^2 2\alpha + 1 - \cos^2 2\alpha - \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha + 1} =$$

$$= \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha .$$

Potíž při úpravě goniometrických výrazů spočívá jednak v tom, že způsobů, které vedou k cíli, je zpravidla několik a nevíme předem, který z nich je nejvýhodnější, dále pak v tom, že vztahů, které platí mezi goniometrickými funkcemi, je značné množství a je proto nutná jejich bezpečná znalost.

Příklad 2.12. Máme zjednodušit výraz

$$\frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^3 x} + \operatorname{tg} x .$$

Daný výraz má smysl, jestliže $\cos x \neq 0$, to znamená, jestliže $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$. To však není žádná nová podmínka, neboť zjištěným omezením je už vázána funkce tg x.

Uvědomíme-li si, že $\frac{\sin x}{\cos^3 x}$ můžeme psát ve tvaru tg x $\frac{1}{\cos^2 x}$, je potom možno z celého výrazu vytknout tg x. Dostaneme tak vztah

$$\frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^3 x} + \operatorname{tg} x =$$

$$= \operatorname{tg} x \left[\operatorname{tg}^2 x \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} + 1\right].$$

Jelikož (podle př. 1.1) platí identita $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ pro $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, můžeme pokračovat v úpravě s tou výhodou, že daný výraz bude vyjádřen jedinou funkcí:

$$\operatorname{tg} x \left[\operatorname{tg}^2 x \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} + 1\right] =$$

$$= \operatorname{tg} x \,[\operatorname{tg}^2 x(1 + \operatorname{tg}^2 x) - (1 + \operatorname{tg}^2 x) + 1] =$$

$$= \operatorname{tg} x[\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x - 1 - \operatorname{tg}^2 x + 1] = \operatorname{tg}^5 x\,.$$

Postup, kterým jsme výraz zjednodušili, není však typický. Častěji totiž postupujeme tak, že výraz, v němž se kromě funkcí sin x a cos x vyskytuje také funkce tg x nebo cotg x (případně obě), vyjádříme pomocí sin x a cos x. To je vždycky možné, někdy však zdlouhavé. Zkuste tímto způsobem upravit výraz z př. 2.12.

Pro součet sin x $\pm$ sin y a cos x $\pm$ cos y jsme odvodili vzorce (1,34a), (1,34b). Výrazy tvaru $\sin x \pm \cos y$ nebo $\cos x \pm \sin y$ převádíme, pokud je to účelné, na vzorce (1,34a), (1,34b) pomocí vztahů (1,27). Významný je případ, kdy $y = x$.

Příklad 2.13. Vyjádřete pomocí jediné goniometrické funkce výraz $\sin x + \cos x$. Jelikož podle (1,27) platí identita $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ pro každé x, můžeme výraz $\sin x + \cos x$ upravit takto:

$$\sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$$

$$= 2 \sin\frac{\pi}{4} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Chceme-li mít ve výsledku funkci sinus, použijeme při úpravě vzorce $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Analogickým způsobem pak snadno zjistíme, že

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Poznamenejme ještě, že užitím vzorců (1,34a), (1,34b) můžeme upravit také výrazy $1 \pm \sin x$, $1 \pm \cos x$ a to tak, že použijeme vztahů $1 = \sin\frac{\pi}{2}$, $1 = \cos 0$.

Příklad 2.14. Upravme zmíněným způsobem rozdíl $1 - \cos x$. Zřejmě můžeme psát

$$1 - \cos x = \cos 0 - \cos x =$$

$$= -2 \sin\frac{x}{2} \sin\left(-\frac{x}{2}\right) = 2 \sin^2\frac{x}{2}.$$

Stejný výsledek dostaneme bezprostředně ze vzorce (1,29b).

Příklad 2.15. Podobně

$$1 + \sin x = \sin \frac{\pi}{2} + \sin x =$$

$$= 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) =$$

$$= 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

Při úpravě jsme použili identity

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

Někdy jsme naopak nuceni převést na součet součiny tvaru siň α sin β, sin α cos β, cos α cos β. To nám umožní vzorce (1,25a) a (1,25b).

Příklad 2.16. Platí vztahy:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)] ,$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)] ,$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)] .$$

Ověření těchto identit je snadné. Ponecháme je čtenáři.

Pokud výraz obsahuje vedle funkcí s jednoduchým argumentem také funkce s argumentem vícenásobným nebo lomeným, upravíme jej zpravidla nejdříve tak, aby obsahoval jen funkce téhož argumentu.

Příklad 2.17. Upravme výraz

$$\left(1 - \frac{\cos x}{1 + \cos x} - 2 \sin^2 \frac{x}{2}\right) \frac{\cos 2x - 1}{2 \cos^2 x}.$$

Vyšetřit existenční podmínky je snadné. Aby měl uvedený výraz smysl, musí platit, že

$$x \neq (2k + 1) \pi, \; x \neq (2k + 1) \frac{\pi}{2}.$$

Funkce $\sin^2 \frac{x}{2}$ a $\cos 2x$ vyjádříme nejprve jako funkce jednoduchého argumentu. Stačí si uvědomit, že platí

$$1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \sin^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} =$$
$$= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos x .$$

Použili jsme příslušný vzorec (1,28a). Tentýž vzorec nám poslouží také při úpravě čitatele zlomku, který stojí za závorkou.

$$\cos 2x - 1 = \cos^2 x - \sin^2 x - 1 =$$
$$= -(1 - \cos^2 x) - \sin^2 x = -2 \sin^2 x .$$

Po dosazení do výrazu máme

$$\left(\cos x - \frac{\cos x}{1 + \cos x}\right) \frac{-\sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

Jelikož se v celém výrazu vyskytuje téměř výhradně funkce $\cos x$, vyjádříme $\sin x$ pomocí $\cos x$ a rozložíme. Další ekvivalentní úpravy jsou zřejmé:

$$\left(\cos x - \frac{\cos x}{1 + \cos x}\right) \frac{-(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{\cos^2 x} =$$

$$= -\frac{\cos x + \cos^2 x - \cos x}{1 + \cos x} \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{\cos^2 x} =$$

$$= 1 - \cos x\,.$$

Jiný tvar výsledku udává příklad 2.14.

Příklad 2.18. Upravme výraz

$$\frac{-\cos^2 x}{\sin x - \cos^2 x - 1} \frac{\sin x + 2}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}.$$

Jmenovatele prvého zlomku můžeme uvést na kvadratický trojčlen $\sin^2 x + \sin x - 2$, který je rozložitelný na součin $(\sin x - 1)(\sin x + 2)$. Výraz $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$ můžeme pak nahradit ekvivalentním výrazem $1 + \sin x$ podle př. 2.15. Odtud dostáváme hledané existenční podmínky

$$\sin x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi\,,$$

$$\sin x \neq -1 \Rightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,,$$

$$\sin x \neq -2 \quad \text{(splněno pro všechna } x\text{)}.$$

Podmínky můžeme zapsat jednoduše ve tvaru $x \neq \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$. Úprava sama je poměrně jednoduchá:

$$\frac{-\cos^2 x}{\sin x - \cos^2 x - 1} \cdot \frac{\sin x + 2}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \frac{-\cos^2 x}{(\sin x + 2)(\sin x - 1)} \cdot \frac{\sin x + 2}{\sin x + 1} =$$

$$= \frac{-\cos^2 x}{\sin^2 x - 1} = \frac{\cos^2 x}{1 - \sin^2 x} = 1\,.$$

V další části knížky na mnoha místech s výhodou použijeme možnosti vhodně upravit goniometrický výraz. Tyto úpravy jsou však běžné nejenom v goniometrii, ale i v jiných partiích matematiky a v některých jejích aplikacích. Můžeme se s nimi setkat v integrálním počtu, v klasické mechanice, v geodézii atd.

2.4. Další goniometrické rovnice. V odstavci 2.3 jsme si ukázali některé způsoby, jak postupovat při úpravě goniometrických výrazů. Přesvědčili jsme se, že i výrazy značně složité vedou často k jednoduchému výsledku, který je udán jedinou funkcí. Takových úprav užijeme s výhodou při řešení goniometrických rovnic.

Než tak učiníme, zavedeme si tuto užitečnou úmluvu:

Mějme dány dvě goniometrické rovnice I, II. Jestliže každé řešení rovnice I je zároveň řešením rovnice II a obráceně každé řešení rovnice II je řešením rovnice I, potom říkáme, že rovnice I a II jsou dvě navzájem ekvivalentní rovnice.

K naší úmluvě ještě poznamenejme, že úpravu, která převádí danou rovnici v ekvivalentní rovnici, nazýváme *ekvivalentní úpravou.* V odstavci 2.4, který právě probíráme, budeme řešit goniometrické rovnice tak, že je budeme převádět na ekvivalentní rovnice v základním tvaru. Půjde zvláště o tyto dva případy, kterých si všimneme blíže:

a) Obsahuje-li goniometrická rovnice několik funkcí neznámého argumentu, vyjádříme všechny funkce funkcí jedinou — v krajním případě podle vzorců (1,31), (1,32), (1,33) pomocí funkce tg $\frac{x}{2}$.

b) Obsahuje-li goniometrická rovnice kromě funkcí neznámého argumentu také funkce jeho násobků nebo dílů, upravíme rovnici tak, aby obsahovala výhradně funkce téhož argumentu.

Příklad 2.19. Řešme rovnici

$$\left(1 - \frac{\cos x}{1 + \cos x} - 2 \sin^2 \frac{x}{2}\right) \frac{\cos 2x - 1}{2\cos^2 x} = 0 .$$

Upravme levou stranu této rovnice podle příkladu 2.17. Dostaneme tak novou rovnici

$$1 - \cos x = 0 ,$$

jejíž obecné řešení je možné zapsat ve tvaru $x = 2k\pi$. Obě zkoumané rovnice jsou zřejmě navzájem ekvivalentní, pokud vyloučíme ta x, pro něž některá z obou rovnic nemá smyslu. Jde zřejmě o x, jež jsou určena vztahy $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ a $x \neq (2k + 1)\,\pi$. Jelikož zmíněné obecné řešení $x = 2k\pi$ druhé z obou rovnic není ve sporu s existenčními podmínkami, které jsme uvedli, je $x = 2k\pi$ zároveň obecným řešením původní rovnice. Tím je příklad vyřešen.

Příklad 2.20. Řešme rovnici

$$\frac{\sin^2 2x - 4\sin^4 x}{\cos 2x} = 1 .$$

Zřejmě musíme předpokládat, že $\cos 2x \neq 0$, čili $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}$. Upravíme nejprve levou stranu rovnice. Platí zde, že

$$\frac{\sin^2 2x - 4\sin^4 x}{\cos 2x} = \frac{4\sin^2 x\cos^2 x - 4\sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} =$$

$$= \frac{4\sin^2 x(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} = 4\sin^2 x .$$

Použijeme-li předcházejícího výpočtu k úpravě dané rovnice, dostaneme za předpokladu, že $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}$ ekvivalentní rovnici

$$4\sin^2 x = 1 .$$

Není obtížné se přesvědčit, že

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi , \quad x = \pm\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

je obecným řešením jak poslední rovnice, tak rovnice původně dané.

Někdy se podaří uvést rovnici na tvar součinu; druhá strana je při tom rovna nule. Tohoto postupu jsme vlastně užili při obecném řešení základních goniometrických rovnic. Často se zde uplatní vzorce (1,34a),(1,34b).

Příklad 2.21. Užijeme-li vzorce (1,34a) v rovnici

$$\sin x + \sin 3x = \sin 2x + \sin 4x ,$$

dostaneme

$$2 \sin 2x \cos x = 2 \sin 3x \cos x .$$

Dělíme rovnici dvěma, převedeme oba výrazy na jednu stranu a vytkneme $\cos x$. Rovnice pak má tvar

$$\cos x (\sin 2x - \sin 3x) = 0 .$$

Užijeme-li na výraz v závorce opět vzorce (1,34a), dostaneme

$$2 \cos x \cos \frac{5x}{2} \sin \left(- \frac{x}{2} \right) = 0 ,$$

která je zřejmě ekvivalentní s původní danou rovnicí.

Rovnice bude splněna, bude-li roven nule kterýkoliv činitel součinu. Hledané obecné řešení můžeme proto zapsat ve tvaru

$$x = (2k + 1) \frac{\pi}{2} , \quad x = (2k + 1) \frac{\pi}{5} , \quad x = 2k\pi .$$

Příklad 2.22. V rovnici

$$2 \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = 1 - \sin x$$

vyjádříme nejprve $\sin x$ podle vzorce (1,28a) pro dvojnásobný úhel. Další úprava je zřejmá. Můžeme zřejmě psát, že

$$2 \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = 1 - 2 \sin \frac{x}{2} . \cos \frac{x}{2} ,$$

$$2 \sin \frac{x}{2} \left(1 + \cos \frac{x}{2}\right) - \left(1 + \cos \frac{x}{2}\right) = 0 ,$$

$$\left(2 \sin \frac{x}{2} - 1\right) \left(\cos \frac{x}{2} + 1\right) = 0 .$$

Dostali jsme tak dvě základní goniometrické rovnice, z nichž snadno určíme všechny kořeny dané rovnice. Platí totiž, že

$$x = \frac{\pi}{3} + 4k\pi ,$$

$$x = \frac{5}{3} \pi + 4k\pi ,$$

$$x = (2k + 1)\, 2\pi .$$

2.5. Goniometrická rovnice tvaru $a \sin x + b \cos x = c$.

Rovnice tvaru

$$a \sin x + b \cos x = c , \qquad (2,9)$$

kde a, b, c jsou reálná čísla, si zaslouží zvláštní pozornosti. Předpokládejme, že součin $a \,.\, b \,.\, c \neq 0$, to znamená $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

POZNÁMKA 2.5. a) Případ $a = 0$, $b \neq 0$ vede na rovnici

$$b \cos x = c .$$

b) Případ $a \neq 0$, $b = 0$ vede na rovnici

$$a \sin x = c .$$

c) Konečně případ $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$ vede na tvar $a \sin x + b \cos x = 0$. Této rovnici nevyhovuje množina čísel $x = k\pi$, pro které je $\sin x$ roven nule. Dosazením se o tom můžeme snadno přesvědčit. Můžeme proto dělit rovnici nenulovou funkcí $\sin x$ a uvést ji tak na tvar $b \operatorname{cotg} x + a = 0$.

Ve všech těchto případech jsme došli ke známým goniometrickým rovnicím v základním tvaru. Jejich řešení známe.

Vraťme se k našemu případu, kdy je u rovnice (2,9) splněna podmínka $a.b.c \neq 0$. Ukážeme si nejdůležitější způsoby jejího řešení.

1. ZPŮSOB. ŘEŠENÍ ZAVEDENÍM POMOCNÉHO ÚHLU. Můžeme klidně předpokládat, že $a > 0$. (V opačném případě lze toho snadno dosáhnout vynásobením obou stran rovnice číslem -1.) Dělme rovnici číslem a. Dostáváme tak

$$\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}.$$

Jelikož funkce tangens nabývá každé hodnoty z intervalu $(-\infty, \infty)$, existuje vždy číslo $\varphi \neq (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ tak, že platí

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi\,. \tag{2,10}$$

Substituce (2,10) vede k rovnici $\sin x + \operatorname{tg} \varphi \cos x = \frac{c}{a}$, kterou upravíme na základě definičního vztahu (1,11). Po násobení číslem $\cos \varphi$ dostaneme

$$\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = \frac{c}{a} \cos \varphi$$

a konečně podle příslušného vzorce (1,25a)

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi\,. \tag{2,11}$$

Číslo φ určíme z rovnice (2,10). Omezíme-li se přitom na tu hodnotu φ, která leží v intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, což je vždy možné, potom $\cos\varphi > 0$. Hodnotu $\cos\varphi$ můžeme pak určit z tabulek nebo řešením soustavy rovnic $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$, $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$. Snadný výpočet vede k výsledku

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}}\,.$$

Podle předpokladu $a > 0$, můžeme proto částečně odmocnit. Po dosazení tohoto výsledku do rovnice (2,11) a krácení číslem a dostaneme rovnici

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\,, \tag{2,12}$$

ze které již snadno vypočteme $x + \varphi$ a tedy i všechna x, která jsou obecným řešení rovnice (2,12).

Ekvivalence rovnic (2,9) a (2,12) je zřejmá. Dostáváme tak současně i obecné řešení původní rovnice $a\sin x + b\cos x = c$. Poznamenejme ještě, že podle věty (1,2) s přihlédnutím ke tvaru (2,12) má tato rovnice řešení tehdy a jen tehdy, jestliže platí

$$c^2 \leqq a^2 + b^2\,.$$

Příklad 2.23. Uvedeným způsobem vyřešíme rovnici

$$\cos x - \sqrt{3}\sin x = -\sqrt{2}\,.$$

Násobme obě strany rovnice číslem —1, aby koeficient u $\sin x$ byl kladný. Upravenou rovnici napišme ve tvaru

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{2}\,.$$

Podle (2,10) $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ čili $\varphi = -\frac{\pi}{6}$.

Dále podle (2,12)

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Konečně podle (2,4) určíme všechny kořeny:

$$x = \frac{5}{12}\pi + 2k\pi\,, \quad x = \frac{11}{12}\pi + 2k\pi\,.$$

2. ZPŮSOB. ŘEŠENÍ POMOCÍ POLOVIČNÍCH ÚHLŮ. Na základě vzorců (1,28a) nahradíme rovnici (2,9) ekvivalentní rovnicí

$$2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + b\cos^2\frac{x}{2} - b\sin^2\frac{x}{2} = c\,. \qquad (2,13)$$

Další krok spočívá v tom, že dělíme rovnici (2,13) činitelem $\cos^2\frac{x}{2}$. K tomu je nutný předpoklad, že $\cos\frac{x}{2} \neq 0$, což můžeme vyjádřit ekvivalentním požadavkem, že $x \neq (2k + 1)\pi$. Zde si musíme uvědomit, že kořeny x teprve hledáme a formální vyslovení požadavku vůbec nezaručuje, že rovnice (2,9) požadovanou vlastnost opravdu splňuje. Má-li však rovnice (2,9) kořeny ve tvaru $x = (2k + 1)\pi$, jsou koeficienty této rovnice vázány nutně podmínkou $b = -c$. Čtenář se o tom přesvědčí snadno přímým dosazením kořenů do rovnice (2,9).

V tomto případě by dělení rovnice (2,13) činitelem $\cos^2 \frac{x}{2}$ nevedlo k ekvivalentní rovnici a nelze této úpravy použít.

Pokud $b \neq -c$, hledané řešení $x \neq (2k + 1)\,\pi$, to znamená $\cos \frac{x}{2} \neq 0$ a ekvivalence rovnic při úpravě je zaručena. Dělíme proto rovnici (2,13) číslem $\cos^2 \frac{x}{2}$ a na pravé straně užijeme známé identity podle př. 1.1. Dostaneme tak kvadratickou rovnici pro neznámou $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$

$$(b + c)\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + (c - b) = 0\,, \qquad (2,14)$$

kterou umíme řešit.

Jestliže $b = -c$, dělíme rovnici (2,13) činitelem $\sin^2 \frac{x}{2}$, který je z hlediska kořenů rovnice (2,9) různý od nuly (neboť rovnice $\sin \frac{x}{2} = 0$ dává kořeny $x = 2k\pi$ a jejich dosazení do rovnice (2,9) váže koeficienty nutně podmínkou $b = c$, tedy nikoliv $b = -c$). Místo (2,14) dostaneme tak rovnici

$$(c - b)\operatorname{cotg}^2 \frac{x}{2} - 2a \operatorname{cotg} \frac{x}{2} + (b + c) = 0\,,$$

jejíž řešení je rovněž snadné.

Podmínka řešitelnosti $c^2 \leqq a^2 + b^2$ nezávisí přirozeně na způsobu, jakým rovnici (2,9) řešíme a plyne v tomto případě z požadavku, aby diskriminant rovnice (2,14) byl nezáporné číslo.

3. ZPŮSOB. ŘEŠENÍ POMOCÍ SOUSTAVY ROVNIC.

Jelikož pro každé x platí $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, zavedeme-li substituci $\sin x = u$, $\cos x = v$, můžeme rovnici (2,9) řešit pomocí soustavy rovnic

$$\begin{aligned} au + bv &= c\,, \\ u^2 + v^2 &= 1\,. \end{aligned} \tag{2,15}$$

Jestliže $a^2 + b^2 > c^2$, má soustava (2,15) za řešení dvě dvojice čísel u, v, jestliže $a^2 + b^2 = c^2$, existuje jediná taková dvojice. Pro $a^2 + b^2 < c^2$ soustava nemá reálné kořeny.

Každá dvojice čísel

$$v = \cos x\,, \quad u = \sin x\,, \tag{2,16}$$

která je řešením soustavy (2,15), tvoří složky téže komplexní jednotky. Je jimi proto jednoznačně určen kvadrant, v němž leží kořeny (2,9). K jejich určení nám potom stačí řešit jedinou z rovnic (2,16).

Příklad 2.24. Řešení 2. i 3. způsobem si ukážeme na rovnici

$$3 \sin x + \cos x = 3\,.$$

a) Zavedením polovičních úhlů dostaneme

$$6 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 3\,.$$

Jelikož $b \neq -c$, dělíme obě strany rovnice $\cos^2 \frac{x}{2}$ a uspořádáme. Dostáváme tak

$$2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 = 0\,.$$

Kořeny této rovnice jsou čísla $1, \frac{1}{2}$. Kořeny rovnic

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1 \quad \text{a} \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0{,}5$$

jsou zároveň kořeny dané rovnice. Jsou to čísla

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\,, \quad x = \frac{53{,}13\,\pi}{180} + 2k\pi\,.$$

b) Podle (2,15) řešíme soustavu

$$3u + v = 3\,,$$
$$u^2 + v^2 = 1\,,$$

kde $u = \sin x$, $v = \cos x$.

Dosadíme-li z první rovnice do druhé $v = 3 - 3u$, dostaneme kvadratickou rovnici $5u^2 - 9u + 4 = 0$ s kořeny 1; 0,8. Řešením soustavy jsou dvě dvojice čísel

$$\sin x = 1, \cos x = 0 \quad \text{a} \quad \sin x = 0{,}8, \cos x = 0{,}6.$$

Prvá dvojice určuje jednotku s argumentem $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Mezi kořeny rovnice $\sin x = 0{,}8$ (nebo $\cos x = 0{,}6$) jsou řešením dané rovnice pouze ty velikosti úhlů, které leží v 1. kvadrantu, neboť jednotka $r = 0{,}6 + \mathrm{i}\,0{,}8$ je z 1. kvadrantu.

2.6. Soustavy goniometrických rovnic. Poznamenejme hned v úvodu tohoto odstavce, že neexistuje nějaký ucelený systém, který by vyčerpávajícím způsobem podával přehled o řešení soustav goniometrických rovnic, jak tomu bylo kupř. v případě základních goniometrických rovnic. V praxi však obvykle vystačíme s tím, co bude uvedeno. V celém odstavci 2.6 budou ω, c, d reálná čísla.

a) Je-li soustava dána ve tvaru

$$f(x \pm y) = c\,, \quad g(x \pm y) = d\,,$$

kde f a g jsou libovolné goniometrické funkce, řešíme každou rovnici vzhledem k argumentu $x \pm y$.

Získáme tak novou soustavu pro neznámé x, y. Upustíme v tomto případě od podrobné diskuse a raději si ukážeme příklad.

Příklad 2.25. Řešme soustavu rovnic

$$\sin(x + y) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

$$\cos(x - y) = \frac{1}{2}.$$

Z první rovnice plyne

$$x + y = \frac{\pi}{3} + 2k_1\pi\,, \quad x + y = \frac{2}{3}\pi + 2k_1\pi\,,$$

z druhé

$$x - y = \frac{\pi}{3} + 2k_2\pi\,, \quad x - y = -\frac{\pi}{3} + 2k_2\pi\,.$$

Rozlišení indexů u čísel k_1, k_2 jsme použili proto, že v obou rovnicích nemusí jít o tentýž násobek. Je zapotřebí, abychom uvážili každou možnost rovnice prvé s každou možností rovnice druhé. Máme tak celkem 4 soustavy rovnic:

$$1.\ x + y = \frac{\pi}{3} + 2k_1\pi\,, \qquad 2.\ x + y = \frac{\pi}{3} + 2k_1\pi\,,$$

$$x - y = \frac{\pi}{3} + 2k_2\pi\,; \qquad x - y = -\frac{\pi}{3} + 2k_2\pi\,;$$

$$3.\ x + y = \frac{2}{3}\pi + 2k_1\pi\,, \qquad 4.\ x + y = \frac{2}{3}\pi + 2k_1\pi\,,$$

$$x - y = \frac{\pi}{3} + 2k_2\pi\,; \qquad x - y = -\frac{\pi}{3} + 2k_2\pi\,.$$

Položíme-li $k_1 + k_2 = l_1$, $k_1 - k_2 = l_2$, dostaneme postupně z jednotlivých soustav tato řešení:

$$1.\ x = \frac{\pi}{3} + l_1\pi\,, \qquad 2.\ x = l_1\pi\,,$$

$$y = l_2\pi\,; \qquad y = \frac{\pi}{3} + l_2\pi\,;$$

$$3.\ x = \frac{\pi}{2} + l_1\pi\,, \qquad 4.\ x = \frac{\pi}{6} + l_1\pi\,,$$

$$y = \frac{\pi}{6} + l_2\pi\,; \qquad y = \frac{\pi}{2} + l_2\pi\,.$$

Jelikož $l_1 + l_2 = 2k_1$, $l_1 - l_2 = 2k_2$, vidíme, že čísla l_1, l_2 nemůžeme volit zcela libovolně, nýbrž tak, aby byla obě současně sudá nebo lichá. Za zmínku ještě stojí, že kořeny dané soustavy tvoří dvě dvojice symetrických řešení.

b) Důležité jsou soustavy typu

$$x \pm y = \omega\,, \quad \frac{f(x)}{g(y)} = d\,, \quad (d \neq 0)\,, \qquad (2,16)$$

kde $f(x)$ a $g(y)$ jsou goniometrické funkce sinus nebo kosinus. Možnost $d = 0$ jsme vyloučili, neboť řešení soustavy je v tomto případě evidentní.

Předpokládejme, že soustava (2,16) má např. tvar

$$x + y = \omega\,, \quad \frac{\sin x}{\sin y} = d\,, \quad (d \neq 0)\,. \qquad (2,17)$$

Potom za předpokladu $y \neq k\pi$ (aby druhá rovnice měla smysl) můžeme při řešení postupovat tak, že dosadíme za x z prvé rovnice do druhé. Dostaneme tak rovnici

$$\frac{\sin(\omega - y)}{\sin y} = d\,.$$

Čitatele zlomku na levé straně rozepišme podle vzorce (1,25b). Snadno zjistíme, že poslední rovnici můžeme zapsat ve tvaru

$$\sin \omega \operatorname{cotg} y = d + \cos \omega\,, \qquad (2,18)$$

čili, jestliže $\sin \omega \neq 0$,

$$\operatorname{cotg} y = \frac{d + \cos \omega}{\sin \omega}\,. \qquad (2,19)$$

Jsou-li kořeny rovnice (2,19) tvaru $y = \alpha + k\pi$, snadno z první rovnice soustavy (2,17) určíme, že

$$x = (\omega - \alpha) - k\pi\,.$$

Náš postup selže jedině v případě, že $\sin \omega = 0$. Bez obtíží však dospějeme až k rovnici (2,18). Čísla $\sin \omega$, $\cos \omega$ jsou složky téže komplexní jednotky. Podmínka $\sin \omega = 0$ znamená, že $\omega = 2k\pi$ nebo $\omega = (2k + 1)\,\pi$.

V prvém případě $\cos \omega = 1$, v druhém $\cos \omega = -1$. Pro $\omega = 2k\pi$ přejde proto rovnice (2,18) na tvar $0 = d + 1$, pro $\omega = (2k + 1)\pi$ na tvar $0 = d - 1$. Odtud plynou závěry:

Jestliže $\omega = 2k\pi$ a $d = -1$, má soustava (2,17) nekonečně mnoho řešení tvaru $x + y = 2k\pi$; jestliže $\omega = (2k + 1)\pi$ a $d = 1$, má soustava (2,17) rovněž nekonečně mnoho řešení a to tvaru $x + y = (2k + 1)\pi$. To znamená, že jednu neznámou můžeme volit libovolně, druhá je určena příslušnou rovnicí. Omezení volby je dáno podmínkou $y \neq k\pi$.

Jestliže naopak $\omega = 2k\pi$ a $d \neq -1$ nebo $\omega = (2k + 1)\pi$ a $d \neq 1$, nemá soustava řešení.

Podmínky si ovšem nemusíme pamatovat. Důležitý je postup řešení. O počtu a tvaru řešení rozhodneme v každém jednotlivém případě na základě rovnice (2,18).

Příklad 2.26. Řešme soustavu rovnic

$$x + y = \frac{11}{6}\pi, \quad \frac{\sin x}{\sin y} = -\sqrt{3}.$$

Použijeme-li první rovnici k úpravě druhé rovnice, snadno zjistíme, že musí platit

$$\operatorname{cotg} y = \sqrt{3}.$$

Odtud plyne, že $y = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $x = \frac{5}{3}\pi - k\pi$ (k je libovolné celé číslo) je obecné řešení dané soustavy rovnic.

Jiný způsob řešení soustavy (2,17) spočívá v tom, že druhou rovnici upravíme na tvar

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{d - 1}{d + 1}, \quad (d \neq 1).$$

Na základě vzorců (1,34a) můžeme provést další její úpravu

$$\operatorname{cotg}\frac{x+y}{2}\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\frac{d-1}{d+1}\,.$$

Dosadíme-li sem vztah $x + y = \omega$, pak za příslušných existenčních předpokladů tvoří rovnice

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\frac{d-1}{d+1}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$$

spolu s rovnicí $x + y = \omega$ soustavu ekvivalentní*) se soustavou (2,17). Podrobný rozbor ponecháme čtenáři.

c) Jestliže symboly $f(x)$ a $g(y)$ znamenají goniometrické funkce sinus nebo kosinus, potom soustavy typu

$$x \pm y = \omega\,, \quad f(x)\,g(y) = d \tag{2,20}$$

řešíme obvykle na základě identit z příkladu 2.16.

Ukážeme si jeden ze čtyř možných případů. V ostatních by byl postup obdobný.

Je-li dána soustava

$$x + y = \omega\,, \quad \sin x \sin y = d\,, \tag{2,21}$$

užijeme identity

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right],$$

kterou upravíme pomocí vztahu $x + y = \omega$. Druhá rovnice soustavy (2,21) přejde tak na tvar

$$\frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos\omega\right] = d\,,$$

*) Pojem ekvivalence dvou soustav je možno zavést zcela analogicky jako pojem ekvivalence dvou rovnic na str. 62.

čili

$$\cos(x - y) = 2d + \cos\omega\,.$$

Rovnice (2,22) spolu s rovnicí $x + y = \omega$ tvoří soustavu, která je ekvivalentní se soustavou (2,21). Aby rovnice (2,22) měla řešení, musí platit nerovnost

$$-1 \leqq 2d + \cos\omega \leqq 1\,,$$

neboli

$$-\frac{1 + \cos\omega}{2} \leqq d \leqq \frac{1 - \cos\omega}{2}\,,$$

kterou podle vzorců (1,29b) můžeme psát přehledněji

$$-\cos^2\frac{\omega}{2} \leqq d \leqq \sin^2\frac{\omega}{2}\,.$$

Příklad 2.27. Je-li dána soustava

$$x + y = \frac{2}{3}\pi\,, \quad \sin x \sin y = \frac{1}{2}\,,$$

upravíme ji na ekvivalentní soustavu

$$x + y = \frac{2}{3}\pi\,, \quad \cos(x - y) = 1 + \cos\frac{2}{3}\pi\,.$$

Odtud dostaneme rovnice

$$x + y = \frac{2}{3}\pi\,, \quad x - y = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

a z nich pak následující dvě dvojice vzájemně symetrických řešení:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,, \quad y = \frac{\pi}{6} + k\pi\,;$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi\,, \quad y = \frac{\pi}{2} + k\pi\,.$$

d) Dále uvedeme soustavu

$$x + y = \omega\,, \quad \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = d\,, \quad (d \neq 0)\,. \qquad (2,23)$$

Aby druhá rovnice měla smysl, musíme předpokládat $x \neq (2k + 1)\,\frac{\pi}{2}$, $y \neq k\,\frac{\pi}{2}$. Pomocí definičních vztahů (1,11) dostaneme z druhé rovnice soustavy (2,23)

$$\sin x \cos y = d \sin y \cos x\,.$$

Výrazy $\sin x \cos y$ a $\sin y \cos x$ nahradíme podle identit z př. 2.16. Dostaneme tak

$$\frac{1}{2}\,[\sin(x + y) + \sin(x - y)] =$$

$$= \frac{1}{2}\,d[\sin(x + y) - \sin(x - y)]\,.$$

Poslední rovnici násobíme dvěma, dosadíme $x + y = \omega$ a upravíme. Upravená rovnice má tvar

$$(d + 1)\sin(x - y) = (d - 1)\sin\omega\,. \qquad (2,24)$$

Jestliže $d \neq -1$, získáme základní goniometrickou rovnici

$$\sin(x - y) = \frac{d - 1}{d + 1}\,\sin\omega\,, \qquad (2,25)$$

která s rovnicí $x + y = \omega$ tvoří opět soustavu, která je ekvivalentní se soustavou (2,23). Z rovnice (2,24) je vidět, že pro $d = -1$, $\omega = k\pi$ má soustava nekonečně mnoho řešení tvaru $x + y = k\pi$; jestliže $d = -1$, $\omega \neq k\pi$, nemá soustava řešení.

Vzhledem k existenčním podmínkám nemá soustava řešení také v případě, že $\omega = k\pi$, $d \neq -1$.

Kdyby druhá rovnice soustavy (2,23) měla místo podílu tvar součinu $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = d$, řešení by bylo zcela obdobné. Dále je zřejmé, že prvá rovnice soustavy může mít tvar rozdílu.

Příklad 2.28. Uvedeným způsobem vyřešíme soustavu

$$x + y = -\frac{\pi}{6},$$

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = -3.$$

Jelikož $d \neq -1$, převedeme danou soustavu na ekvivalentní, v níž místo rovnice druhé napíšeme rovnici tvaru (2,25):

$$x + y = -\frac{\pi}{6}, \quad \sin(x - y) = -1.$$

Z ekvivalentní soustavy

$$x + y = -\frac{\pi}{6}, \quad x - y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

plynou kořeny:

$$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \quad y = \frac{\pi}{6} - k\pi.$$

e) Na závěr si ukážeme řešení soustavy goniometrických rovnic typu

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= a\,, \\ x \pm y \quad &= \omega\,. \end{aligned} \tag{2,26}$$

Tato úloha se vyskytuje v praxi při měření v terénu a má svou typickou metodu řešení.

Příslušný vzorec (1,34a) pro $\sin x + \sin y$ nám umožňuje uvést prvou rovnici soustavy (2,26) na ekvivalentní rovnici

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = a\,. \tag{2,27}$$

Další náš rozbor rozdělíme na dvě části.

1. Má-li soustava (2,26) tvar

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= a\,, \\ x + y \quad &= \omega\,, \end{aligned} \tag{2,26a}$$

potom přejde po dosazení $x + y = \omega$ a snadné úpravě rovnice (2,27) v základní goniometrickou rovnici

$$\cos \frac{x-y}{2} = \frac{a}{b}\,, \tag{2,28}$$

kde $b = 2 . \sin \frac{\omega}{2}$. Při posledním kroku musíme ovšem předpokládat, že $\sin \frac{\omega}{2} \neq 0$, to znamená, že $\omega \neq 2k\pi$. Rovnice (2,28) má vždy řešení, pokud $|\frac{a}{b}| \leqq 1$. Obecné řešení vyjádříme zápisem

$$\frac{x-y}{2} = \pm\, \alpha + 2k\pi\,.$$

Pro neznámé x, y dostaneme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{2} &= \frac{\omega}{2}, \\ \frac{x-y}{2} &= 2k\pi \pm \alpha, \end{aligned} \tag{2,29}$$

jejíž řešení je každému čtenáři jistě zřejmé. Z ekvivalence rovnic plyne, že každé řešení soustavy (2,29) je také řešením soustavy (2,26a).

Jestliže $\omega = 2k\pi$ a zároveň $a = 0$, je soustava (2,26a) splněna pro každou dvojici x, y, která vyhovuje rovnici $x + y = \omega$. Jestliže $\omega = 2k\pi$, a zároveň $a \neq 0$, nemá soustava (2,26a) řešení. Oba poslední závěry plynou z rovnice (2,27).

2. Má-li soustava (2,26) tvar

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= a\,, \\ x - y &= \omega\,, \end{aligned} \tag{2,26b}$$

dostaneme zcela obdobným postupem z rovnice (2,27) základní goniometrickou rovnici

$$\sin \frac{x+y}{2} = \frac{a}{c}, \tag{2,30}$$

kde $c = 2 \cos \dfrac{\omega}{2}$. Jelikož dělíme číslem $\cos \dfrac{\omega}{2}$, musíme předpokládat, že $\omega \neq (2k + 1) \dfrac{\pi}{2}$. Podmínka řešitelnosti rovnice (2,30) je dána požadavkem $\left|\dfrac{a}{c}\right| \leq 1$.

Obecné řešení rovnice (2,30) můžeme psát ve tvaru

$$\frac{x+y}{2} = (-1)^k \alpha + k\pi$$

(srovnej cv. 2.18). Pro neznámé x, y dostaneme pak soustavu

$$\begin{aligned} \frac{x-y}{2} &= \frac{\omega}{2}, \\ \frac{x+y}{2} &= (-1)^k \alpha + k\pi, \end{aligned} \tag{2,31}$$

kterou snadno vyřešíme. Také ekvivalence soustav (2,26b) a (2,31) je zřejmá.

Vraťme se ještě k případu, kdy $\omega = (2k + 1)\pi$. Z rovnice (2,27) vyplývají dvě možnosti. Jestliže zároveň $a = 0$, má soustava (2,26b) za řešení každou dvojici čísel x, y, která jsou vázána vztahem $x - y = (2k + 1)\pi$. Jestliže $a \neq 0$, nemá soustava (2,26) řešení.

Příklad 2.29. Pro ilustraci vyřešíme soustavu

$$\sin x + \sin y = \frac{3}{2},$$

$$x + y = \frac{2}{3}\pi.$$

Prvou rovnici soustavy uvedeme na tvar (2,27) a dosadíme do ní $x + y = \frac{2}{3}\pi$. Dostaneme tak

$$2 \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{3}{2}.$$

Tuto rovnici můžeme pomocí vztahu

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

zapsat ve tvaru

$$\cos \frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Odtud plyne, že

$$\frac{x-y}{2} = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi .$$

Ze soustavy pak

$$\frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{3},$$

$$\frac{x-y}{2} = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi ,$$

která je ekvivalentní dané soustavě, plyne, že

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi ,$$

$$y = \frac{\pi}{6} - 2k\pi ,$$

respektive

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi ,$$

$$y = \frac{\pi}{2} - 2k\pi .$$

Poznamenejme ještě, že k sice znamená ve výsledcích libovolné celé číslo, ovšem zásadně stejné pro oba kořeny. Jestliže kupř. položíme ve vztahu pro x za k číslo 2, jsme nuceni ve výsledku pro odpovídající kořen y užít téhož $k = 2$.

Cvičení

2.1. Dokažte, že pro přípustná x platí identita

$$\frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x + 2) \sin 2x = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x\,.$$

2.2. Upravte:

$$\frac{\sin^3 x + \sin 3x + 3 \sin^2 x \cos x}{\cos^3 x - \cos 3x + 3 \cos^2 x \sin x}\,.$$

2.3. Pro která x, y platí

$$\sin x + \sin y = \sin (x - y)\ ?$$

Návod: Levou stranu upravte podle vzorce (1,34a), pravou podle příslušného vzorce (1,28a).

2.4. Řešte rovnici $(\operatorname{tg}^2 x - 1) \cos x = \operatorname{tg} x$.

2.5. Řešte rovnici

$$(\operatorname{tg} x - 1)(1 + \sin x \cos x) = \operatorname{tg} x \sin x - 1\,.$$

2.6. Řešte rovnici

$$\frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin x + \cos x} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2.7. Řešte rovnici

$$\frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} = \sqrt{3}.$$

Návod: Dokažte nejprve, že pro přípustná x platí

$$\frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{tg} 3x.$$

2.8. Řešte bez použití tabulek:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = -2\sqrt{2}.$$

2.9. Řešte rovnici

$$1 - \cos 4x + \sin 2x \sin 4x = 2 \sin^2 2x.$$

2.10. Řešte rovnice:

a) $\sin 2x = \sin 3x - \sin x$,

b) $\sin x + \operatorname{tg} x = 1 + \cos x$,

c) $\dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \cos 2x$,

d) $1 - \cos x = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$,

e) $\cos x + \operatorname{tg} x + 1 = \cos^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x$,

f) $\dfrac{\sin 3x - \sin x}{\cos 3x - \cos x} - \dfrac{\cos 3x + \cos x}{\sin 3x + \sin x} = 0$,

g) $\sin x - \cos x = \sin 2x - \cos 2x$,

h) $3\left(\dfrac{\cos^2 2x - 1}{2\cos^2 x} - \cos 2x - 3\right)\operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{tg}^2 x - 3$,

i) $\dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \sqrt{3}$,

j) $\dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} - \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = -2$,

k) $\dfrac{\sin 3x - \sin x}{\cos 3x - \cos x} + \dfrac{\cos 3x + \cos x}{\sin 3x + \sin x} = 0$,

l) $\cos^2 x + \cos^2 2x - \cos^2 3x = 1$.

2.11. V intervalu $(0, 2\pi)$ řešte soustavu

$$\cos x - \cos(x + y) = 0\,,$$

$$\cos y - \cos(x + y) = 0\,.$$

2.12. Řešte soustavy rovnic:

a) $\dfrac{\sin x}{\cos y} = \sqrt{3}$, $\quad x + y = 0$,

b) $\dfrac{\cos x}{\cos y} = 1$, $\quad x + y = \dfrac{\pi}{2}$.

2.13. Řešte soustavy rovnic:

a) $x + y = \frac{2}{3}\pi$, $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = -1$,

b) $x + y = \frac{2}{3}\pi$, $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = 1$.

2.14. Řešte soustavu rovnic

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{4},$$

$$x + y = \frac{3}{2}\pi.$$

2.15. Řešte soustavu rovnic

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1,$$

$$x - y = \frac{\pi}{6}.$$

2.16. Určete všechna x, y, která vyhovují soustavě

$$\sin x - \sin 2y = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x - \cos y,$$

$$\cos x + \sin(x - y) = \sin(x + y).$$

2.17. Určete všechna x, y, která vyhovují soustavě rovnic

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} y}{\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} y} = \operatorname{tg} x,$$

$$\frac{\operatorname{tg} y + \operatorname{cotg} x}{\operatorname{cotg} y + \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} y.$$

2.18. Přesvědčte se, že řešení rovnice

$$\sin x = a\,, \quad (|a| \leqq 1)\,,$$

která jsme psali ve tvaru

$$x = \alpha + 2k\pi\,,$$

$$x = \pi - \alpha + 2k\pi\,,$$

můžeme vyjádřit jediným zápisem (srovnej odstavec 2.6e):

$$x = (-1)^k \alpha + k\pi\,.$$

2.19. Řešte soustavu rovnic

$$\sin x + \sin y = 0\,,$$

$$x - y = -\frac{4}{3}\pi\,.$$