Goniometrické funkce

1. kapitola. Goniometrické funkce

In: Stanislav Šmakal (author); Bruno Budinský (author): Goniometrické funkce. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1968. pp. 5–41.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403642

1. kapitola

GONIOMETRICKÉ FUNKCE

1.1. Orientovaný úhel a komplexní číslo. V řadě otázek praktického i teoretického charakteru se setkáváme s goniometrickými funkcemi. Elementární výklad o těchto funkcích je předmětem naší knížky. V úvodní kapitole si nejprve tyto funkce zavedeme a odvodíme si jejich důležité vlastnosti, které budeme potřebovat v dalších kapitolách.

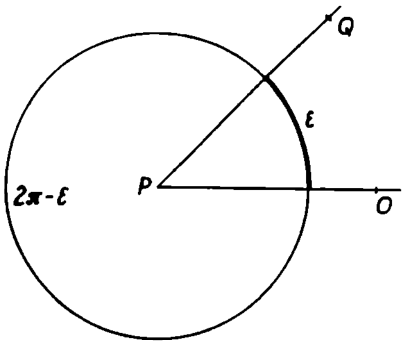
Základním pojmem, o který se bude opírat definice goniometrických funkcí, je pojem *orientovaného úhlu* a *komplexního čísla*. Předpokládáme, že oba pojmy zná čtenář ze školy. Přesto však bude jistě účelné stručně zopakovat základní vlastnosti obou výchozích pojmů. Učiníme tak nyní.

Pojem orientovaného úhlu je možno zavést následující definicí:

Orientovaný úhel je uspořádaná dvojice polopřímek o společném počátku.

Definici, kterou jsme vyslovili, si objasníme na konkrétním příkladě. V obr. 1 jsou sestrojeny dvě polopřímky PO, PQ o společném počátku P. Jestliže obě polopřímky zapíšeme v pořadí (PO, PQ), určili jsme orientovaný úhel, který označujeme $\widehat{OPQ}$. Polopřímku PO nazýváme *počátečním ramenem*, polopřímku PQ *koncovým* *ramenem* a bod P *vrcholem* orientovaného úhlu $\widehat{OPQ}$. Uvedené pořadí (PO, PQ) má svůj důležitý význam. Kdybychom toto pořadí zaměnili a psali (PQ, PO), dostali bychom orientovaný úhel $\widehat{QPO}$, který je jiným úhlem než úhel $\widehat{OPQ}$.

V dalších úvahách bude hrát důležitou roli *velikost* orientovaného úhlu. Ukážeme si cestu, která vede k definici tohoto pojmu.



Obr. 1. Velikosti neorientovaných úhlů, určených polopřímkami PO, PQ.

Mějme orientovaný úhel $\widehat{OPQ}$. Polopřímky PO, PQ dělí rovinu na dva *neorientované úhly* o velikostech ε, $2\pi - \varepsilon$ (obr. 1). Oba neorientované úhly si můžeme představit tak, že vznikly otočením počátečního ramene PO kolem bodu P do koncového ramene PQ. Upřesníme předcházející označení obou neorientovaných úhlů. Označme ε velikost toho neorientovaného úhlu, který vznikne při otáčení počátečního ramene PO do polohy PQ v kladném smyslu (tj. otáčení proběhne proti směru pohybu hodinových ručiček). Číslo $2\pi - \varepsilon$ je samozřejmě velikostí druhého neorientovaného úhlu. Tento úhel vznikne otočením ramene PO do polohy PQ v záporném smyslu (tj. ve směru pohybu hodinových ručiček). Předcházející úvahy nám dovolují definovat:

Číslo ε nazýváme *základní velikostí* orientovaného úhlu $\widehat{OPQ}$.

POZNÁMKA 1.1. Základní velikost úhlu $\widehat{QPO}$ je zřejmě rovna číslu $2\pi - \varepsilon$. Musíme však připustit jednu výjimku. Jestliže obě polopřímky PO, PQ splynou, pokládáme základní velikost obou orientovaných úhlů $\widehat{OPQ}$, $\widehat{QPO}$ rovnou nule. Vyhovuje tedy číslo ε vždy podmínce $0 \leqq \varepsilon < 2\pi$.

POZNÁMKA 1.2. Velikost úhlů (orientovaných i neorientovaných) budeme v celém svazku udávat v obloukové míře.

V dalším výkladu bychom úplně vystačili při měření orientovaných úhlů s pojmem základní velikosti orientovaného úhlu. Celý výklad se však stane podstatně jednodušší a přehlednější, zavedeme-li si obecnější pojem, totiž tzv. *velikost* orientovaného úhlu. Učiňme tak pomocí této definice:

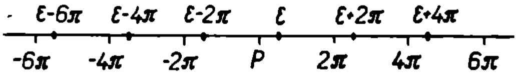
Jestliže je ε základní velikost daného orientovaného úhlu $\widehat{OPQ}$, nazýváme každé číslo φ, které lze zapsat ve tvaru

$$\varphi = \varepsilon + 2k\pi \,, \tag{1,1}$$

kde k je libovolné celé číslo, *velikostí* orientovaného úhlu $\widehat{OPQ}$.

Pro velikost orientovaného úhlu se běžně užívá označení *argument* nebo *amplituda*, někdy také *azimut*. Názvu *argument* budeme často užívat.

Z definice, kterou jsme vyslovili, vyplývá, že daný orientovaný úhel má nekonečně mnoho velikostí. Znázornění velikostí orientovaného úhlu o základní velikosti ε na číselné ose je provedeno v obr. 2. Budeme-li v dalších úvahách mluvit o velikosti orientovaného



Obr. 2. Znázornění velikostí orientovaného úhlu o základní velikosti ε na číselné ose.

úhlu, budeme tím mít zpravidla na mysli jednu libovolně, ale pevně zvolenou velikost. Nebudeme tedy u daného orientovaného úhlu dávat přednost některé z jeho možných velikostí. Z tohoto hlediska nemá číslo k ze vzorce (1,1) žádný hlubší geometrický význam. Uvedený postup má své výhody při výpočtu velikosti součtu dvou orientovaných úhlů. Než se o této okolnosti zmíníme podrobněji, připomeňme definici součtu dvou orientovaných úhlů. Pro naši potřebu vystačíme s definicí, která je zvláštním případem definice obecnější:

Jsou-li $\widehat{OPQ}$, $\widehat{QPR}$ dva orientované úhly (koncové rameno PQ prvního úhlu je počátečním ramenem druhého úhlu), potom orientovaný úhel $\widehat{OPR}$ nazýváme *součtem* orientovaných úhlů $\widehat{OPQ}$, $\widehat{QPR}$.

Připomeňme si bez důkazu známou větu:

Buďte α, β velikosti dvou orientovaných úhlů $\widehat{OPQ}$, $\widehat{QPR}$. Potom $\alpha + \beta$ je velikost orientovaného úhlu $\widehat{OPR}$, který je součtem orientovaných úhlů $\widehat{OPQ}$, $\widehat{QPR}$.

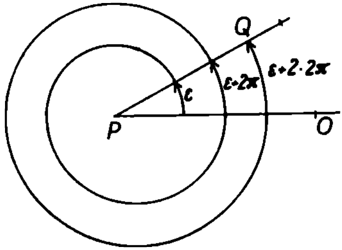
Předcházející úvahy doplníme několika poznámkami.

POZNÁMKA 1.3. Jestliže v poslední větě α, β jsou základní velikosti orientovaných úhlů, neznamená to, že $\alpha + \beta$ je základní velikostí orientovaného úhlu $\widehat{OPR}$.

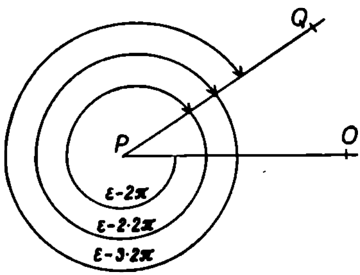
POZNÁMKA 1.4. Jak jsme se již zmínili, nepřisoudili jsme číslu k ze vzorce (1,1) žádný konkrétní geometrický význam. Bude však užitečné zmínit se alespoň stručně o významu čísla k při studiu rotačního pohybu. Předpokládejme opět, že je v rovině dán orientovaný úhel OPQ o základní velikosti ε. Počáteční rameno PO nechť se otáčí v kladném smyslu kolem bodu P. Jestliže při tomto pohybu splyne poprvé rameno PO s ramenem PQ, které je pevné, můžeme říci (ve shodě s terminologií běžnou v mechanice), že rameno PO opsalo orientovaný úhel $\widehat{OPQ}$ o velikosti ε. Jestliže při popsané rotaci splyne rameno PO podruhé s pevným ramenem PQ, můžeme říci, že pohybující se rameno PO opsalo orientovaný úhel $\widehat{OPQ}$ o velikosti $\varepsilon + 2\pi$. Zřejmě při našem označení opíše počáteční rameno v tomto pojetí (viz obr. 3a) postupně orientované úhly o velikostech

$$\varepsilon, \varepsilon + 2\pi, \varepsilon + 2 . 2\pi, \varepsilon + 3 . 2\pi, \ldots .$$

Pozorujme tentýž proces při otáčení ramene PO v záporném smyslu (obr. 3b). Jestliže rameno PO poprvé splyne s koncovým ramenem PQ, opíše tak neorientovaný úhel velikosti $2\pi - \varepsilon$. Jelikož rotační pohyb probíhá v záporném smyslu, dohodněme se, že v tomto případě přiřadíme orientovanému úhlu $\widehat{OPQ}$ velikost $-(2\pi - \varepsilon)$, tj. $\varepsilon - 2\pi$. Při druhém splynutí ramene PO s ramenem PQ můžeme přiřadit orientovanému úhlu



Obr. 3a. Velikosti orientovaného úhlu při otáčení ve smyslu kladném.



Obr. 3b. Velikosti orientovaného úhlu při otáčení ve smyslu záporném.

$\widehat{OPQ}$ velikost $\varepsilon - 2 . 2\pi$. Postupně tak získáme čísla:

$$\varepsilon - 2\pi, \varepsilon - 2 . 2\pi, \varepsilon - 3 . 2\pi, \ldots .$$

Souhrnný zápis všech hodnot v obou směrech vede ke vztahu

$$\varphi = \varepsilon + 2k\pi$$

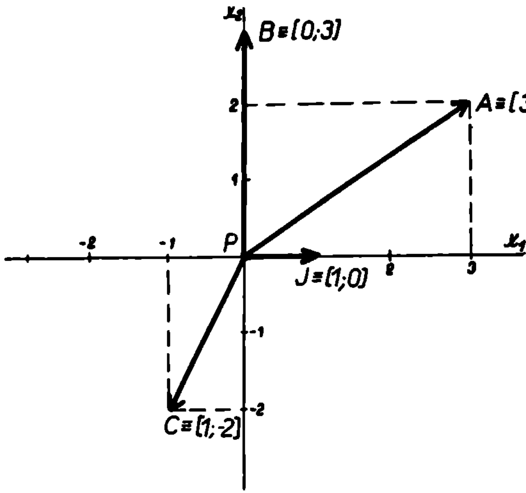
(k je libovolné celé číslo), který je samozřejmě shodný se vzorcem (1,1).

Abychom nemuseli u každého početního výrazu opakovat, že číslo k znamená libovolné číslo celé, zavádíme tuto úmluvu:

Písmeno k, užité ve významu čísla, bude v dalším textu probíhat vždy množinu všech čísel celých. V jiném významu nebudeme v dalším výkladu čísla k používat.

POZNÁMKA 1.5. V dalších úvahách budeme občas potřebovat pojem intervalu. Upřesníme si proto tento pojem a zavedeme běžná označení, kterým čtenář stejně neunikne, má-li rozumět matematickým textům. Množinu všech reálných čísel x, která vyhovují nerovnostem $a \leqq x \leqq b$, nazýváme *uzavřeným intervalem* a zapisujeme znakem $\langle a, b\rangle$; podobně množinu všech reálných čísel x, která vyhovují nerovnostem $a < x < b$, nazýváme *otevřeným intervalem* a zapisujeme (a, b). Závorky zde tedy hrají důležitou roli. Kromě intervalů otevřených a uzavřených zavádíme ještě název *polouzavřený interval*. Značíme: $(a, b\rangle$, $\langle a, b)$. Prvý znak znamená souhrn všech reálných čísel x, která vyhovují nerovnosti $a < x \leqq b$; podobně pak druhý znak je určen nerovností $a \leqq x < b$. Zápis $(-\infty, \infty)$ znamená všechna reálná čísla.

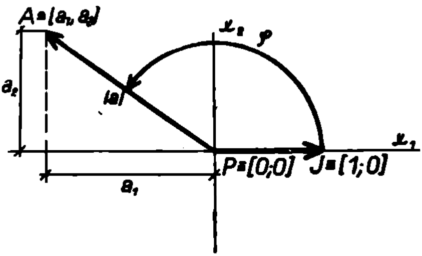
Řekli jsme si již, že dalším základním pojmem, o který se budeme opírat, je *komplexní číslo*. Zápis $a = a_1 + a_2\mathrm{i}$, kterému říkáme algebraický tvar komplexního čísla, je čtenáři jistě známý. Komplexní čísla zobrazujeme v rovině komplexních čísel, které říkáme také *Gaussova rovina*. V této rovině si zvolíme dvě vzájemně kolmé přímky x_1, x_2, které nazveme *osami*. Přímku x_1 nazveme *reálnou osou*, x_2 *osou imaginární*. Jejich průsečík je tzv. *počátek*. Označíme jej P. Víme, že komplexní číslo je jednoznačně určeno svými složkami. Každému komplexnímu číslu $a = a_1 + a_2\mathrm{i}$ můžeme přiřadit vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ vázaný v počátku soustavy souřadnic. To znamená, že počáteční bod vektoru $\mathbf{a}$ je bod $P \equiv [0, 0]$, souřadnice koncového bodu A jsou



Obr. 4. Znázornění komplexních čísel v Gaussově rovině.

shodné se složkami komplexního čísla. Tedy $A \equiv [a_1, a_2]$. Je přirozené hovořit o vektoru a jako o obrazu komplexního čísla a. Na obr. 4 jsou zobrazena komplexní čísla $a = 3 + 2i$, $b = 3i$, $c = -1 - 2i$, $j = 1$.

Naopak každému vektoru a $= (a_1, a_2)$, který je vázán v počátku soustavy souřadnic, odpovídá jediné komplexní číslo. Jde tedy o vzájemně jednoznačné přiřazení.



Obr. 5. Obraz komplexního čísla a určeného veličinami $|a|, \varphi$.

Velikost vektoru a $= (a_1, a_2)$ je dána vzorcem

$$|\mathrm{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}\,.$$

Způsob, jakým je možno určit směr vektoru, si objasníme podrobněji. Vektor a určuje polopřímku PA. Směrem vektoru a budeme rozumět množinu všech polopřímek, které lze rovnoběžným posunutím přemístit tak, aby splynuly s polopřímkou PA. Řekneme, že dva vektory mají týž směr, jestliže příslušné polopřímky PA, PB patří do téhož směru. Polopřímku je možné zadat velikostí úhlu $\widehat{JPA}$ ($J \equiv [1, 0]$ je tzv. *jednotkový bod*), který nazýváme orientovaným úhlem v *základní poloze* (viz obr. 5). Odtud plyne, že vektor je určen velikostí a orientovaným úhlem v základní poloze.

Jelikož komplexní čísla a vektory jsou si vzájemně jednoznačně přiřazeny, můžeme tvrdit:

Každému nenulovému komplexnímu číslu je přiřazen jediný orientovaný úhel v základní poloze. Obráceně každým takovým úhlem a absolutní hodnotou je určeno jediné komplexní číslo.

1.2. Zavedení funkcí sinus a kosinus. Úvodní úvahy, které se opírají o základní znalosti z oboru komplexních čísel, nám již dovolují přistoupit k definici funkcí *sinus*, *kosinus*, *tangens* a *kotangens*, kterým souhrnně říkáme *funkce goniometrické*. V tomto odstavci vyslovíme definici prvých dvou.

Definice 1.1. Je-li $a = a_1 + a_2 \mathrm{i}$ nějaké nenulové komplexní číslo a φ je libovolná velikost orientovaného úhlu, který je komplexnímu číslu a přiřazen, potom podíl

$$\frac{a_2}{|a|} \text{ nazveme } \textit{sinus } \varphi,$$

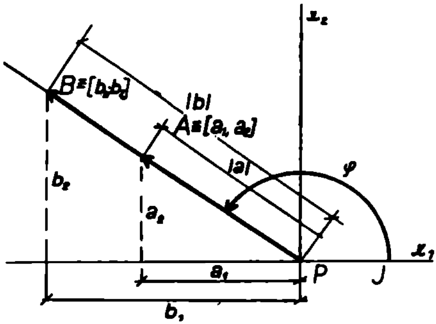
$$\frac{a_1}{|a|} \text{ nazveme } \textit{kosinus } \varphi.$$

Symbolické zkraty jsou čtenáři jistě známy. Píšeme:

$$\sin \varphi = \frac{a_2}{|a|}, \quad \cos \varphi = \frac{a_1}{|a|} \cdot \qquad (1,4)$$

Ukažme si nejdříve, že hodnoty $\sin \varphi$ a $\cos \varphi$ závisí pouze na velikosti φ orientovaného úhlu. Zvolme za tím účelem jiné nenulové komplexní číslo $b = b_1 + b_2\mathrm{i}$, které je určeno orientovaným úhlem $\widehat{JPB}$, jehož velikost je rovněž φ (obr. 6). Vektory **a**, **b**, které odpovídají komplexním číslům a, b, mají zde týž směr. Parametrická rovnice polopřímky PA má tvar

$$X = P + t\mathbf{a} \, ,$$



Obr. 6. Obrazy komplexních čísel a, b, která jsou určena tímtéž orientovaným úhlem φ.

kde t je libovolné nezáporné číslo. Tato rovnice je stručným zápisem parametrické soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1 &= ta_1 \, , \\ x_2 &= ta_2 \, , \quad (t \geqq 0) \, . \end{aligned}$$

Jelikož bod B leží na polopřímce PA, musí jeho souřadnice splňovat napsanou soustavu. Jinými slovy musí existovat pevné kladné číslo $t = c$ tak, že platí

$$\begin{aligned} b_1 &= ca_1 \, , \\ b_2 &= ca_2 \, . \end{aligned} \qquad (1{,}5)$$

Na základě (1,5) určíme ještě $|b|$. Snadno zjistíme, že

$$|b| = \sqrt{(b_1)^2 + (b_2)^2} = \sqrt{c^2(a_1)^2 + c^2(a_2)^2} =$$
$$= c\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2} = c\,|a|\,. \qquad (1,6)$$

Vyjádříme-li nyní sin φ a cos φ podle (1,4) pomocí komplexního čísla b a použijeme výsledky (1,5) a (1,6), dostaneme:

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{b_2}{|b|} = \frac{ca_2}{c|a|} = \frac{a_2}{|a|}\,, \\ \cos\varphi &= \frac{b_1}{|b|} = \frac{ca_1}{c|a|} = \frac{a_1}{|a|}\,. \end{aligned} \qquad (1,7)$$

Předpokládali jsme, že $b \neq a$ a že orientovaný úhel přiřazený oběma číslům byl týž. Srovnáme-li (1,4) a (1,7), vidíme, že číselná hodnota sin φ a cos φ je stejná jak v případě čísla a, tak v případě čísla b. Můžeme proto říci, že hodnoty goniometrických funkcí sin φ a cos φ závisí pouze na velikosti úhlu φ. Jelikož komplexních čísel, kterým je přiřazen úhel o velikosti φ, je nekonečně mnoho (všechna vyplní otevřenou polopřímku PA), můžeme použít kteréhokoliv z nich.

Zvolme si proto takové komplexní číslo $r = r_1 + r_2\mathrm{i}$, aby platilo $|r| = 1$ a jeho obraz ležel na polopřímce PA. Takovému komplexnímu číslu říkáme *komplexní jednotka*. V obr. 7 je číslo r znázorněno orientovanou úsečkou PR. Potom

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{r_2}{|r|} = \frac{r_2}{1} = r_2\,, \\ \cos\varphi &= \frac{r_1}{|r|} = \frac{r_1}{1} = r_1\,. \end{aligned} \qquad (1,8)$$

Reálná složka každé komplexní jednotky je tedy rovna kosinu k ní příslušného orientovaného úhlu, imaginární pak sinu tohoto úhlu. Získáváme tak důležitý výsledek, že každou komplexní jednotku je možno (podle 1,8) zapsat ve tvaru

$$r = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\,. \tag{1,9}$$

Tvaru (1,9) říkáme goniometrický tvar komplexní jednotky. Vzniká přirozeně otázka, zda podobným způsobem můžeme vyjádřit každé komplexní číslo. Čtenář pravděpodobně ví, že takové vyjádření existuje. Výjimku činí pouze číslo $a = 0$. Goniometrický tvar komplexního čísla obdržíme přímo z definičních vztahů (1,4). Plyne odtud

$$a_1 = |a|\cos\varphi\,,\quad a_2 = |a|\sin\varphi\,.$$

Proto komplexní číslo $a = a_1 + a_2\mathrm{i}$ můžeme psát ve tvaru

$$a = |a|\cos\varphi + \mathrm{i}|a|\sin\varphi\,.$$

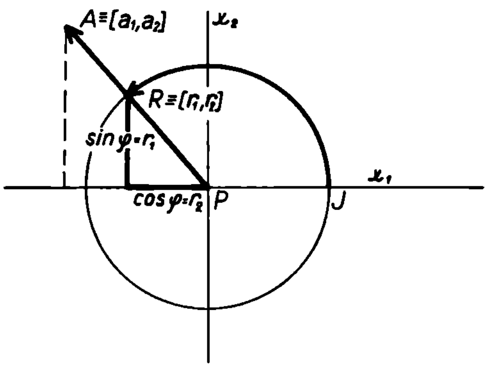
Vytkneme-li ještě na pravé straně $|a|$, máme žádaný vzorec

$$a = |a|\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)\,. \tag{1,10}$$

Pozornější čtenář si jistě všiml, že číslo v závorce má tvar (1,9) a je to tedy komplexní jednotka. Každé komplexní číslo můžeme tedy psát ve tvaru součinu $a = |a|\,r$, kde r je příslušná komplexní jednotka. Tento výsledek však nepřekvapí, uvědomíme-li si souvislost mezi komplexním číslem a vektorem.

Vraťme se však k rovnicím (1,8) a všimněme si blíže jejich názorného významu. Často se žáci učí zpaměti, jaká znamení mají goniometrické funkce v jednotlivých kvadrantech. Jednotková kružnice nám dá vždy bezpečnou odpověď na tuto otázku a navíc nezatěžuje paměť čistě mechanickými prvky, které v sobě skrývají vždy větší riziko zapomenutí. Stačí sestrojit příslušný jednotkový vektor a všimnout si, jaká znamení mají jeho souřadnice. Uvědomíme si dále jednou provždy, že všechna komplexní čísla, jejichž obrazy pokrývají kupř. 2. kvadrant, mají reálnou složku stále zápornou a imaginární kladnou (a podobně je tomu ve všech kvadrantech). Proto, chceme-li rozhodnout pouze o znamení, nemusíme dbát v náčrtku žádné velké přesnosti. Základním kritériem je totiž kvadrant, a ne velikost úhlu.

Z obr. 7 je vidět, že $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$; $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$; $\sin \pi = 0$, $\cos \pi = -1$; $\sin \frac{3}{2}\pi = -1$, $\cos \frac{3}{2}\pi = 0$; $\sin 2\pi = 0$, $\cos 2\pi = 1$.



Obr. 7. Obrazy sinu a kosinu na jednotkové kružnici.

Dříve než přistoupíme k definici dalších dvou goniometrických funkcí, musíme ještě upozornit na dvě důležité vlastnosti sinu a kosinu.

Věta 1.1. *Pro libovolnou hodnotu φ platí:*

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1 .$$

Důkaz. Podle (1,9) víme, že každou komplexní jednotku můžeme psát ve tvaru

$$r = \cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi .$$

Odtud plyne, že

$$|r|^2 = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi .$$

Poněvadž jde o komplexní jednotku, platí $|r| = 1$. To však znamená, že $1 = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi$. Tím je důkaz věty proveden.

Věta 1.2. *Funkce* $\sin \varphi$ *a* $\cos \varphi$ *nabývají pro libovolné* φ *pouze hodnot z intervalu* $\langle -1, 1 \rangle$.

Důkaz. Vezmeme opět komplexní jednotku $r = r_1 + r_2\mathrm{i}$. Víme, že platí $r_2 = \sin \varphi$ [srovnejte (1,8) resp. (1,9)]. Vyjdeme z nerovnosti, která je zřejmě pravdivá

$$0 \leqq (r_1)^2 .$$

K oběma stranám přičteme $(r_2)^2$ a použijeme rovnosti

$$(r_1)^2 + (r_2)^2 = |r|^2 = 1 .$$

Zkoumanou nerovnost uvedeme tak na tvar

$$(r_2)^2 \leqq 1 .$$

Ekvivalentní úpravy vedou již k žádanému výsledku

$$|r_2| \leqq 1\,,$$
$$-1 \leqq r_2 \leqq 1\,,$$
$$-1 \leqq \sin\varphi \leqq 1\,.$$

Důkaz pro $\cos\varphi$ by byl obdobný a čtenář se s ním setká ve cvičení (cv. 1,5).

1.3. Zavedení funkcí tangens a kotangens. Přejdeme nyní k dalším dvěma goniometrickým funkcím.

Definice 1.2. Podíl $\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$, pokud má smysl, nazýváme *tangens* φ, podíl $\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$, pokud má smysl, nazýváme *kotangens* φ.

Čtenáři jistě znají symbolické výrazy, kterých používáme. Píšeme totiž

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\,, \quad \operatorname{cotg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\,.$$

Upřesníme si nejprve existenční obor výrazů, o nichž mluví definice 1.2.

Zlomek $\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ má smysl, pokud $\cos\varphi \neq 0$. To znamená, že pro příslušnou komplexní jednotku $r = r_1 + r_2 i$ platí vztah $r_1 \neq 0$. Existují však pouze dvě komplexní jednotky, pro které $r_1 = 0$. Jsou to čísla i a —i. Velikost k nim příslušných orientovaných úhlů musíme proto vyloučit. Jelikož se jedná o liché násobky čísla $\frac{\pi}{2}$, můžeme podmínku zapsat souhrnně ve tvaru

$$\varphi \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2},$$

kde k je libovolné číslo celé.

Podobně zlomek $\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$ má smysl, pokud $\sin\varphi \neq 0$, neboli $r_2 \neq 0$ ($r = r_1 + r_2 i$ je opět příslušná komplexní jednotka). Komplexní jednotky, pro které $r_2 = 0$, jsou reálná čísla, jejich obrazy leží proto na reálné ose. Tyto jednotky mají hodnotu 1 a —1. Jsme tedy nuceni vyloučit velikosti k nim příslušných orientovaných úhlů. V prvém případě jde o úhel velikosti $\varphi = 2k\pi$, v druhém $\varphi = \pi + 2k\pi = (2k + 1)\pi$. Vidíme, že se jedná jak o sudé, tak o liché násobky čísla π, to znamená o všechny celočíselné násobky π. Podmínka, aby zlomek $\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$ měl smysl, má tudíž jednoduchý tvar $\varphi \neq k\pi$ (k je libovolné celé číslo).

Výsledky rozboru, který jsme provedli, nemají jen bezprostřední význam pro stanovení existenčních oborů funkcí tangens a kotangens. Budeme je v dalším často potřebovat.

Shrneme-li předcházející úvahy, můžeme říci, že

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}, \quad \text{pokud} \quad \varphi \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{cotg}\varphi &= \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}, \quad \text{pokud} \quad \varphi \neq k\pi. \end{aligned} \tag{1,11}$$

Závěrem odstavce dokážeme jednoduchý, ale pro výpočty a úpravy často užitečný vzorec.

Věta 1.3. *Pro každé* $\varphi \neq k\dfrac{\pi}{2}$ *platí*

$$\operatorname{tg}\varphi \operatorname{cotg}\varphi = 1\,.$$

Důkaz. Podmínka $\varphi \neq k\dfrac{\pi}{2}$ zahrnuje v sobě obě podmínky pro $\operatorname{tg}\varphi$ i $\operatorname{cotg}\varphi$ z definičních vztahů (1,11). Důkaz sám je zřejmý. Úpravou dostaneme

$$\operatorname{tg}\varphi \operatorname{cotg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\,\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = 1.$$

Příklad 1.1. Dokažme, že pro přípustná x platí:

$$\text{a) } 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\,,$$

$$\text{b) } 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}\,.$$

Jestliže $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, potom

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

Při přechodu k poslední rovnosti jsme užili věty 1.1. Důkaz druhé identity je analogický.

1.4. Moivreova věta. Další část této kapitoly věnujeme elegantní větě, které říkáme Moivreova věta podle jejího autora ABRAHAMA DE MOIVRE (1667—1754). Tato věta bude mít pro nás zásadní důležitost. Upozorňujeme předem, že k jejímu důkazu použijeme vzorce pro úhel dvou vektorů, který najdete v učebnici matematiky pro III. ročník středních všeobecně vzdělávacích škol (str. 167). Vzorec má tvar

$$\cos \omega = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}\,. \tag{1,12}$$

Symbol $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ nazýváme skalárním součinem vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Hodnota skalárního součinu je definována takto: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$. Předpokládáme, že vzorec (1,12) zná čtenář ze školy. K jeho důkazu by nám stačily goniometrické funkce, definované na pravoúhlém trojúhelníku, a naše dosavadní znalosti.

Věta 1.4. (Moivreova věta). *Součin dvou komplexních jednotek je opět komplexní jednotka, jejíž argument je roven součtu argumentů obou činitelů.*

Větu zapíšeme následovně:

$$(\cos \alpha + \mathrm{i} \sin \alpha)(\cos \beta + \mathrm{i} \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + \\ + \mathrm{i} \sin(\alpha + \beta)\,.$$

Důkaz. Komplexní jednotky s příslušnými úhly α, β označíme r_α, r_β. Budeme tedy psát

$$r_\alpha = \cos \alpha + \mathrm{i} \sin \alpha\,, \quad r_\beta = \cos \beta + \mathrm{i} \sin \beta\,.$$

Komplexní číslo, které je jejich součinem, označíme r. Platí tedy $r = r_\alpha r_\beta$. Chceme dokázat:

1. $r = r_\alpha r_\beta$ je opět komplexní jednotka,

2. jednotka r je určena orientovaným úhlem o velikosti $\alpha + \beta$.

Víme, že absolutní hodnota součinu je rovna součinu absolutních hodnot. Proto

$$|r| = |r_\alpha \, r_\beta| = |r_\alpha| \, |r_\beta| = 1.1 = 1 .$$

Tím je prvá část tvrzení dokázána. Druhá část důkazu bude poněkud obtížnější. Doporučujeme čtenáři, aby se nedal odradit délkou. Výslednou jednotku r můžeme podle (1,9) psát ve tvaru

$$r = \cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi , \tag{1,13}$$

kde

$$\left.\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta , \\ \sin \varphi &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta . \end{aligned}\right. \tag{1,14}$$

Výsledky (1,14) dostaneme snadno, jestliže provedeme naznačené násobení na pravé straně rovnosti

$$r = (\cos \alpha + \mathrm{i} \sin \alpha) (\cos \beta + \mathrm{i} \sin \beta)$$

a porovnáme reálné a imaginární složky.

Chceme dokázat, že φ ve vzorci (1,13) má velikost $\alpha + \beta$. Hledejme proto složky komplexní jednotky

$$x = x_1 + x_2 \mathrm{i} ,$$

která je určena orientovaným úhlem o velikosti $\alpha + \beta$. Budou-li mít tvar (1,14), potom vzhledem k určenosti komplexního čísla budeme s důkazem u konce. Vektory $\mathbf{r}_\beta$, $\mathbf{x}$ (obr. 8) svírají neorientovaný úhel o velikosti $\bar{\alpha}$. Podle vzorce (1,12) můžeme psát

$$\cos \bar{\alpha} = \mathbf{x} . \mathbf{r}_\beta \quad (\text{neboť } |\mathbf{r}_\beta| = 1, \ |\mathbf{x}| = 1) \text{ *.)}$$

---

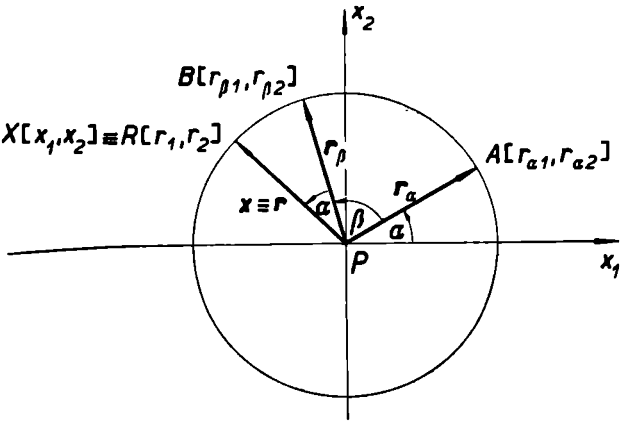
*) Hodnota goniometrické funkce, která přísluší neorientovanému úhlu o velikosti $\bar{\alpha}$, se rovná hodnotě goniometrické funkce orientovaného úhlu o základní velikosti $\bar{\alpha}$.

Vektory $\mathbf{r}_\beta$, $\mathbf{x}$ v uvedeném pořadí určují orientovaný úhel $\widehat{BPX}$, jehož velikost je rovna číslu α. Označíme-li základní velikost orientovaného úhlu $\widehat{BPX}$ znakem ε, můžeme zřejmě psát

$$\bar{\alpha} = \varepsilon \quad \text{nebo} \quad \bar{\alpha} = 2\pi - \varepsilon \, .$$

Je proto správná jedna z těchto dvou rovností

$$\alpha = \bar{\alpha} + 2k\pi \quad \text{nebo} \quad \alpha = (2\pi - \bar{\alpha}) + 2k\pi \, .$$



Obr. 8. Grafický součin komplexních jednotek.

Odtud a z definice 1.1. bychom snadno dokázali, že

$$\cos \alpha = \cos \bar{\alpha} \, .$$

Rovnici $\cos \bar{\alpha} = \mathbf{x} \, . \, \mathbf{r}_\beta$ můžeme proto psát ve tvaru

$$\cos \alpha = \mathbf{x} \, . \, \mathbf{r}_\beta \, .$$

Provedeme-li skalární součin vektorů na pravé straně, dostaneme

$$\cos\alpha = x_1 \cos\beta + x_2 \sin\beta\,,$$

kde složky x_1, x_2 jsou vázány vztahem $(x_1)^2 + (x_2)^2 = 1$. Máme tak soustavu pro neznámé x_1, x_2:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= x_1 \cos\beta + x_2 \sin\beta\,, \\ (x_1)^2 &+ (x_2)^2 = 1\,. \end{aligned} \tag{1,15}$$

Z první rovnice soustavy (1,15) vyjádříme x_2:

$$x_2 = \frac{\cos\alpha - x_1 \cos\beta}{\sin\beta}\,,\quad \beta \neq k\pi\,. \tag{1,16}$$

Po dosazení x_2 do druhé rovnice a snadné úpravě dostaneme kvadratickou rovnici pro neznámou x_1:

$$(x_1)^2 - 2x_1 \cos\alpha \cos\beta + \cos^2\alpha - \sin^2\beta = 0\,. \tag{1,17}$$

Rovnice (1,17) má vždy řešení, neboť její diskriminant $D \geqq 0$. Má totiž tvar $D = 4 \sin^2\alpha \sin^2\beta$. S podrobným důkazem se setkáte ve cvičení 1.6 na str. 40. Kořeny rovnice (1,17) označíme x_1, x_1'. Jsou to čísla

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta\,, \\ x_1' &= \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta\,. \end{aligned}$$

Dosadíme-li do (1,16), získáme x_2, x_2':

$$\begin{aligned} x_2 &= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta\,, \\ x_2' &= \cos\alpha \sin\beta - \sin\alpha \cos\beta\,. \end{aligned}$$

Zapišme přehledně dvojice kořenů, které jsou řešením soustavy (1,15). Dostáváme tak

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta\,, \\ x_2 &= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta\,, \end{aligned} \tag{1,18}$$

$$x_1' = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\,,$$
$$x_2' = \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta\,. \tag{1,19}$$

Každé komplexní číslo je svými složkami jednoznačně určeno. Jednotka x je proto dána pouze jednou dvojicí čísel, tudíž čísly (1,18) nebo (1,19). Snadno se totiž ukáže, že neplatí identicky $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$. Abychom určili jednotku x, stačí aplikovat náš postup na vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{r}_\alpha$. Tyto vektory svírají úhel $\overline{\beta}$ (obr. 8), proto dostaneme zcela obdobně jako v prvém případě soustavu

$$\cos\beta = x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha\,,$$
$$(x_1)^2 + (x_2)^2 = 1\,. \tag{1,20}$$

Soustava (1,20) má stejný tvar jako soustava (1,15). Nemusíme ji tedy řešit. Stačí, jestliže ve výsledku zaměníme α a β. Také podmínka z (1,16) má tvar $\alpha \neq k\pi$. Řešením jsou proto dvojice čísel:

$$x_1 = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,,$$
$$x_2 = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,, \tag{1,21}$$

$$x_1'' = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\,,$$
$$x_2'' = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\,. \tag{1,22}$$

Jelikož složky jednotky x musí vyhovovat jak soustavě (1,15), tak soustavě (1,20), máme jedinou možnost. Jsou to čísla (1,18) resp. (1,21). Srovnáme-li nyní jednotku x s jednotkou r ze vzorců (1,13) a (1,14), vidíme, že $x = r$, tedy $\varphi = \alpha + \beta$. Je tedy jednotka určená orientovaným úhlem $\alpha + \beta$ právě ta jednotka, která je výsledkem součinu jednotek s orientovanými úhly α, β. Tím je důkaz věty proveden pro $\alpha \neq k\pi$, $\beta \neq k\pi$.

Důkaz zbývá doplnit v případech, že některá z jednotek, které vystupují v součinu, je určena orientovaným úhlem $k\pi$. Jde tedy o jednotky 1, —1. Snadno se ukáže, že podmínka souvisí pouze s početním postupem. Kdybychom v rovnicích (1,15) nebo (1,20) vyjádřili místo x_2 neznámou x_1 a tu dosazovali do rovnice $(x_1)^2 + (x_2)^2 = 1$, museli bychom vyloučit úhel $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$. Jednotku x bychom dostali zřejmě ve stejném tvaru, vyloučené jednotky by však byly i a —i, zatímco s jednotkami 1, —1 by bylo všechno v pořádku. Podrobný výpočet si již čtenář snadno provede sám a tím důkaz Moivreovy věty ukončí.

Nyní dokážeme vzorec, který úzce souvisí s Moivreovou větou.

Věta 1.5. *Pro každou komplexní jednotku a každé přirozené číslo n platí:*

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha\,.$$

Důkaz provedeme úplnou indukcí.

a) Vzorec zřejmě platí pro $n = 1$.

b) Předpokládejme platnost vzorce pro nějaké pevné číslo $n = k$:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^k = \cos k\alpha + i\sin k\alpha\,. \qquad (1{,}23)$$

c) Na základě předpokladu (1,23) dokážeme, že vzorec platí také pro $n = k + 1$. Zřejmě

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{k+1} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^k(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Za $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^k$ dosadíme podle (1,23). Potom

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{k+1} = (\cos k\alpha + i\sin k\alpha)(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Pravá strana je součin dvou komplexních jednotek a můžeme na ni užít Moivreovu větu. Dostaneme

$$(\cos \alpha + \mathrm{i} \sin \alpha)^{k+1} = \cos (k\alpha + \alpha) + \mathrm{i} \sin (k\alpha + \alpha)$$

a konečně po úpravě

$$(\cos \alpha + \mathrm{i} \sin \alpha)^{k+1} = \cos (k + 1) \alpha + \mathrm{i} \sin (k + 1) \alpha.$$

Tím je důkaz věty proveden. Dokázali jsme totiž: Jestliže vzorec platí pro $n = k$, platí také pro přirozené číslo o 1 větší. Podle a) platí však vzorec pro $n = k = 1$, proto platí také pro $n = 2, 3$, atd. Vzorec proto platí pro každé přirozené n.

POZNÁMKA 1.6. Věta 1.5 je velmi užitečná. Umožňuje nám úsporný výpočet n-té mocniny komplexního čísla, vede ke vzorci pro n-tou odmocninu, je základem při řešení tzv. *binomických rovnic* a konečně dovoluje nám vyjádřit snadno goniometrické funkce vícenásobných úhlů pomocí funkcí úhlů jednoduchých (cv. 1.10).

1.5. Důsledky Moivreovy věty. Moivreova věta nás bohatě odmění za námahu spojenou s důkazem pravdy, která je v ní obsažena. Na základě této věty můžeme totiž odvodit většinu goniometrických vzorců a vztahů. Pro přehlednost budeme důsledky, které uvedeme, číslovat.

DŮSLEDEK 1. GONIOMETRICKÉ FUNKCE ZÁPORNÉHO ARGUMENTU.

Připomeňme si, že velikosti orientovaného úhlu říkáme také *argument*. Vezmeme-li dvě komplexní jednotky o argumentech α, $-\alpha$ (obrazy obou jednotek leží souměrně podle osy x_1) a vynásobíme je, pak podle Moivreovy věty platí rovnost

$$[\cos \alpha + i \sin \alpha] [\cos (-\alpha) + i \sin (-\alpha)] = \cos 0 + \\ + i \sin 0 = 1 + 0 i .$$

Součin na levé straně má tvar

$$\cos \alpha \cos (-\alpha) - \sin \alpha \sin (-\alpha) + i [\sin \alpha \cos (-\alpha) + \\ + \cos \alpha \sin (-\alpha)] .$$

Na základě definice rovnosti komplexních čísel můžeme psát

$$\cos \alpha \cos (-\alpha) - \sin \alpha \sin (-\alpha) = 1 ,$$

$$\sin \alpha \cos (-\alpha) + \cos \alpha \sin (-\alpha) = 0 .$$

Považujeme-li obě rovnice za soustavu pro neznámé $\cos (-\alpha)$, $\sin (-\alpha)$, snadno zjistíme, že

$$\begin{aligned} \sin (-\alpha) &= -\sin \alpha , \\ \cos (-\alpha) &= \cos \alpha . \end{aligned} \qquad (1{,}24a)$$

Zkouška nás přesvědčí, že nalezená čísla jsou opravdu kořeny soustavy.

Dosadíme-li (1,24a) do vzorce pro $\operatorname{tg} (-\alpha)$ a $\operatorname{cotg} (-\alpha)$, dostaneme pro přípustná α vzorce

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} (-\alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha , \\ \operatorname{cotg} (-\alpha) &= -\operatorname{cotg} \alpha . \end{aligned} \qquad (1{,}24b)$$

DŮSLEDEK 2. SOUČTOVÉ VZORCE.

Použijeme-li rovnosti $\varphi = \alpha + \beta$ k úpravě rovnic

(1,14), získáme bezprostředně důležité vzorce, kterým říkáme součtové a které platí pro libovolná α, β:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,, \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,. \end{aligned} \tag{1,25a}$$

Jestliže ve vzorcích (1,25a) položíme místo β argument $(-\beta)$ a použijeme výsledků (1,24a), máme další dva součtové vzorce:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\,, \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\,. \end{aligned} \tag{1,25b}$$

DŮSLEDEK 3. DALŠÍ SOUČTOVÉ VZORCE.

Podobné součtové vzorce platí také pro $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ a $\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta)$. Ukážeme si odvození prvého, druhý pouze zapíšeme. Zřejmě můžeme psát

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}\,.$$

Poslední zlomek zjednodušíme tím, že dělíme čitatele i jmenovatele $\cos\alpha\cos\beta$. Po krácení dostaneme

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\,. \tag{1,26a}$$

Podle (1,11) má ovšem odvozený vzorec smysl jen v tom případě, že

$$\alpha + \beta \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2} \quad \left[\text{resp. } \alpha - \beta \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}\right],$$

$$\alpha \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}\,,\ \beta \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}\,.$$

Podmínky není však třeba znát zpaměti, stačí znalost existenčních předpokladů z definičních vztahů (1,11).

Obdobným způsobem bychom získali vzorec

$$\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta \mp 1}{\operatorname{cotg}\alpha \pm \operatorname{cotg}\beta}. \tag{1,26b}$$

Ve vzorcích (1,26a) a (1,26b) platí vždy současně všechna horní nebo všechna dolní znamení.

DŮSLEDEK 4. Dosadíme-li ve vzorcích (1,25a) a (1,25b) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = x$ a pak $\alpha = \pi$, $\beta = x$, obdržíme vztahy:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos x\,, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin x\,, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x\,, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x\,, \end{aligned} \tag{1,27a}$$

$$\begin{aligned} \sin(\pi + x) &= -\sin x\,, \\ \cos(\pi + x) &= -\cos x\,, \\ \sin(\pi - x) &= \sin x\,, \\ \cos(\pi - x) &= -\cos x\,. \end{aligned} \tag{1,27b}$$

DŮSLEDEK 5. PERIODIČNOST GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ.

Funkci $y = f(x)$ nazýváme *periodickou*, jestliže existuje nějaké pevné číslo p tak, že pro každé x platí $f(x + p) = f(x)$.

Ve cvičení (cv. 1.9) si můžete dokázat, že pro každou periodickou funkci platí: *Je-li k libovolné celé číslo, $f(x)$ periodická funkce, pro níž platí* $\mathrm{f}(x + p) = \mathrm{f}(x)$, *potom také* $\mathrm{f}(x + kp) = \mathrm{f}(x)$.

Definiční vztah, který charakterizuje periodickou funkci, říká, že funkční hodnoty v bodech x a $(x + p)$ jsou si rovny. *Nejmenší kladné číslo p*, pro které platí $f(x + p) = f(x)$, nazýváme *periodou.*

Věta 1.6. *Všechny goniometrické funkce jsou periodické. Přitom perioda funkcí* $\sin x$ *a* $\cos x$ *je* 2π, *perioda funkcí* $\operatorname{tg} x$ *a* $\operatorname{cotg} x$ *je* π.

Důkaz. Je-li funkce $\sin x$ periodická, potom existuje pro všechna x číslo p (které nezávisí na x) tak, že $\sin(x + p) = \sin x$. Jestliže rozvedeme levou stranu podle příslušného vzorce (1,25a) a upravíme, dostaneme rovnici

$$\sin x (\cos p - 1) + \cos x \sin p = 0\,,$$

která je splněna pro všechna x tehdy a jen tehdy, jestliže $\cos p = 1$, $\sin p = 0$ (cv. 1.7). Čísla $\cos p$ a $\sin p$ jsou složky téže komplexní jednotky s argumentem $2k\pi$, který nabývá nejmenší kladné hodnoty pro $k = 1$. Funkce je proto periodická a její periodou je číslo 2π. Důkaz pro funkci $\cos x$ by byl obdobný.

Také důkazy pro $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ jsou téměř stejné, omezíme se proto na $\operatorname{tg} x$. Ptejme se, zda existuje pro všechna přípustná x takové číslo $p \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, aby platilo $\operatorname{tg}(x + p) = \operatorname{tg} x$, $\left[(x + p) \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}\right]$. Rozvedeme-li levou stranu podle vzorce (1,26a) a upravíme, dospějeme k rovnici

$$\operatorname{tg} p\,(1 + \operatorname{tg}^2 x) = 0\,.$$

Ta je zřejmě splněna tehdy a jen tehdy, jestliže $\operatorname{tg} p = 0$, to znamená $p = k\pi$. Poslední výsledek plyne ze skutečnosti, že rovnice $\operatorname{tg} p = 0$ je ekvivalentní s rovnicí $\sin p = 0$ a tou jsme se již zabývali v rozboru, který vedl k definičním vztahům (1,11). Číslo p existuje a jeho nejmenší kladná hodnota je π. Dokázali jsme tím, že funkce $\operatorname{tg} x$ je periodická s periodou π.

DŮSLEDEK 6. VZORCE PRO DVOJNÁSOBNÉ VELIKOSTI ÚHLU.

Položíme-li ve vzorcích (1,25a) $\alpha = \beta = x$, dostaneme ihned

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \sin x \cos x\,, \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x\,. \end{aligned} \tag{1,28a}$$

Učiníme-li totéž se vzorci pro $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ a $\operatorname{cotg}(\alpha + \beta)$, získáme další vzorce

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2x &= \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}\,, \\ \operatorname{cotg} 2x &= \frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2 \operatorname{cotg} x}\,. \end{aligned} \tag{1,28b}$$

První vzorec (1,28b) platí za předpokladu, že $x \neq$

$\neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ a $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{4}$, druhý, jestliže $x \neq$ $\neq k\frac{\pi}{2}$.

DŮSLEDEK 6. VZORCE PRO POLOVIČNÍ VELIKOST ÚHLU.

Ve druhém vzorci, který je uveden pod číslem (1,28a), můžeme pomocí věty 1.1 vyjádřit pravou stranu pouze pomocí $\sin x$ nebo $\cos x$. Platí totiž, že

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x\,,$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1\,.$$

Odtud dostaneme další dva vzorce

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\,, \\ \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\,. \end{aligned} \tag{1,29a}$$

Položíme-li zde $\alpha = 2x$, potom $x = \frac{\alpha}{2}$ a vzorce (1,29a) přejdou na tvar

$$\begin{aligned} \sin^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)\,, \\ \cos^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{1}{2}(1 + \cos\alpha)\,. \end{aligned} \tag{1,29b}$$

Vzorce (1,29a) i (1,29b) vyjadřují samozřejmě tytéž vztahy. Jde pouze o jinou formu zápisu. Z nich obdržíme bezprostředně vyjádření pro $\mathrm{tg}^2\, x$ nebo $\mathrm{tg}^2 \frac{x}{2}$. Snadno si můžeme ověřit, že

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tg}^2\, x &= \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}\,, \quad x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2} \\ \mathrm{tg}^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}\,, \quad \alpha \neq (2k + 1)\,\pi\,. \end{aligned}\right. \tag{1,30a}$$

DŮSLEDEK 7. *Za příslušných existenčních předpokladů můžeme každou goniometrickou funkci vyjádřit racionálně pouze pomocí funkce* $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$.

Označme $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = t$. Použijeme-li ve vzorcích (1,28b) substituce $2x = \alpha$ potom

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}}\,, \quad \alpha \neq (2k + 1)\,\frac{\pi}{2}\,, \quad \alpha \neq (2k + 1)\,\pi\,.$$

Na podkladě naší počáteční dohody můžeme psát

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2t}{1 - t^2}\,. \tag{1,31}$$

Jelikož $\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{cotg}\,\alpha = 1$, plyne odtud a ze vzorce (1,31), že

$$\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{1 - t^2}{2t}\,, \quad \alpha \neq k\pi\,.$$

Ve vzorcích (1,28a) položíme opět $2x = \alpha$ neboli $x = \frac{\alpha}{2}$. Dostaneme tak vztahy:

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} . \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} . \cos^2 \frac{\alpha}{2} =$$

$$= 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} . \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} .$$

Podle příkladu 1.1 jsme použili identity

$$1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} .$$

Jelikož podle dohody píšeme $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = t$, můžeme $\sin \alpha$ vyjádřit pomocí vztahu

$$\sin \alpha = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \alpha \neq (2k + 1) \pi . \qquad (1,32)$$

Počítejme při stejném označení ze vzorců (1,28a) $\cos \alpha$:

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} . \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} .$$

Odsud plyne výsledek

$$\cos\alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \alpha \neq (2k + 1)\pi\,. \qquad (1{,}33)$$

Čtenáře, pro které je tento svazek prvním hlubším pohledem do světa goniometrických funkcí obecného úhlu, chceme upozornit, které vzorce je dobré znát zpaměti. Jsou to samozřejmě všechny věty, definiční vztahy (1,1), (1,4) a (1,11), dále pak všechny vzorce číslem (1,24a) počínaje a (1,34b) konče. Výjimku mohou činit pouze vzorce (1,27a), (1,27b). Ze vzorců (1,29a), (1,29b) a (1,30a), (1,30b) stačí pamatovat jednu variantu. Vzorce (1,34) probereme nyní.

DŮSLEDEK 8. SOUČTOVÉ VZORCE PRO $\sin x \pm \sin y$ A $\cos x \pm \cos y$.

Užijeme-li na vzorce (1,25a) a (1,25b) substituce

$\alpha + \beta = x, \alpha - \beta = y$, potom $\alpha = \dfrac{x + y}{2}, \beta = \dfrac{x - y}{2}$

a vzorce přejdou na tvar:

$$\sin x = \sin\frac{x + y}{2}\cos\frac{x - y}{2} + \cos\frac{x + y}{2}\sin\frac{x - y}{2},$$

$$\sin y = \sin\frac{x + y}{2}\cos\frac{x - y}{2} - \cos\frac{x + y}{2}\sin\frac{x - y}{2},$$

$$\cos x = \cos\frac{x + y}{2}\cos\frac{x - y}{2} - \sin\frac{x + y}{2}\sin\frac{x - y}{2},$$

$$\cos y = \cos\frac{x + y}{2}\cos\frac{x - y}{2} + \sin\frac{x + y}{2}\sin\frac{x - y}{2}.$$

Sečtení a odečtení prvých dvou rovnic vede ke vztahům:

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \\ \sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}. \end{aligned} \tag{1,34a}$$

Podobně součet a rozdíl druhých dvou rovnic vede k výsledku:

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}. \end{aligned} \tag{1,34b}$$

Vzorce (1,33a) a (1,33b) mají mnohostranné využití neboť převádějí součet nebo rozdíl dvou funkcí na součin. Tento proces je účelný kupř. při provádění výpočtu logaritmicky. Pro funkce $\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y$ a $\operatorname{cotg} x \pm \operatorname{cotg} y$ podobné vzorce nezavádíme. Potřebujeme-li takový vzorec, odvodíme jej pro každý případ zvlášť tak, že přejdeme k funkcím sinus a kosinus.

Cvičení

1. 1. Dokažte, že číslo $\dfrac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} + i\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ je komplexní jednotka.

1.2. Určete hodnotu výrazu $\sqrt{3} \sin \varphi + \cos \varphi$, jestliže

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

1.3. Napište algebraický tvar komplexních jednotek bez použití tabulek hodnot goniometrických funkcí, znáte-li argumenty těchto jednotek:

$$\text{a)}\ \varphi = \frac{\pi}{12}\,, \quad \text{b)}\ \varphi = -\frac{\pi}{8}\,.$$

Návod: Užijte vzorců (1,29), znamení stanovte pomocí jednotkové kružnice.

1.4. Napište algebraický tvar komplexního čísla, jestliže

$$|a| = 2\,, \quad \varphi = -\frac{\pi}{6}\,.$$

1.5. Dokažte, že pro každé x je splněna nerovnost $|\cos x| \leqq 1$.

Návod najdete v důkazu věty 1.2.

1.6. Dokažte, že pro libovolná α, β platí identita
$\cos^2\alpha \cos^2\beta - \cos^2\alpha + \sin^2\beta = \sin^2\alpha \sin^2\beta$.

1.7. Dokažte, že rovnice $\sin x (\cos p - 1) + \cos x \sin p = 0$ je splněna pro každé x tehdy a jen tehdy, jestliže $p = 2k\pi$. Návod: Abyste dokázali, že podmínka $p = 2k\pi$ je nutná, stačí si uvědomit, že neplatí nikdy současně $\sin p = 0$, $\cos p = 0$.

1.8. Odvoďte vzorce pro a) $\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y$,
b) $\operatorname{cotg} x \pm \operatorname{cotg} y$.

1.9. Dokažte: Je-li k libovolné celé číslo, $f(x)$ periodická funkce, pro niž platí $f(x + p) = f(x)$, potom také platí $f(x + kp) = f(x)$. Návod: Užijte matematické indukce. Jestliže $k < 0$, převedeme levou stranu na tvar

$$f[x - (-k)\, p].$$

1.10. Vyjádřete $\cos 7\alpha$ a $\sin 7\alpha$ (pomocí věty 1.5) pouze funkcemi jednoduchého argumentu α.

1.11. Ověřte si, že rovnice (1,19) plynou z rovnic (1,18), dosadíme-li tam za α hodnotu $-\alpha$.