POČÍTÁNÍ S KOMPLEXNÍMI ČÍSLY

Příklad 1. Vypočtěte: $(\sqrt{2} - i) - i(1 - i\sqrt{2})$!

Řešení. Daný výraz je rozdíl dvou členů, z nichž druhý je součinem dvou komplexních čísel: komplexní jednotky i a čísla $1 - i\sqrt{2}$. Víme, že násobení komplexních čísel splňuje distributivní zákon; je tedy

$$i(1 - i\sqrt{2}) = i - i(i\sqrt{2}).$$

Také asociativní zákon platí. Můžeme tedy psát

$$i - i(i\sqrt{2}) = i - (i.i)\sqrt{2}.$$

Písmenem i jsme označili komplexní jednotku (0, 1). Z definice násobení dostáváme, že

$$i.i = (0, 1).(0, 1) = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1.$$

Je tedy $i(1 - i\sqrt{2}) = i - (-1)\sqrt{2} = i + \sqrt{2}$. A nyní již můžeme napsat výsledek:

$$(\sqrt{2} - i) - i(1 - i\sqrt{2}) = (\sqrt{2} - i) - (i + \sqrt{2}) = -2i.$$

Příklad 2. Vypočtěte postupně $(1 - i)^2$, $(1 - i)^3$, $(1 - i)^4$.

Řešení. V našich definicích jsme se nezmínili o mocnině komplexního čísla. Je-li však mocnitel přirozené číslo jako v tomto případě, je význam mocniny jasný: je to součin stejných činitelů, jejichž počet je udán mocnitelem.

Jde tedy ve skutečnosti o násobení:

$$(1-i)^2 = (1-i)(1-i) = (1-1) + (-1-1)i = -2i,$$
$$(1-i)^3 = (1-i)(1-i)(1-i) = (1-i)^2(1-i) = $$
$$= -2i(1-i) = -2i-2 = -2(1+i),$$
$$(1-i)^4 = (1-i)^3(1-i) = -2(1+i)(1-i) = -4.$$

Všimněte si, že poslední výsledek je reálné číslo $(1-i)^4 = -4$. Postupným umocňováním komplexního čísla (s nenulovou imaginární částí) můžeme tedy dostat i číslo reálné. Konečně nejjednodušším příkladem je číslo $i^2 = i \cdot i = -1$.

V obou předešlých příkladech jsme násobili komplexní čísla. Ale nezatěžujme si paměť definicí; komplexní čísla násobíme prostě jako dvojčleny, při čemž součin $i \cdot i = -1$. Ověřte si sami, že tento způsob násobení se shoduje s definicí!

V příkladě 2 jsme se setkali se součinem $(1+i)(1-i)$. Co je zajímavé na obou činitelích? Ano, liší se jen znaménkem u imaginární části. Jak víte, říkáme takovým dvěma komplexním číslům čísla komplexně sdružená. Jejich charakteristickou vlastností je, že jejich součin i součet je vždy reálné číslo.

Příklad 3. Nechť z, $\bar{z}$ jsou čísla komplexně sdružená, a číslo reálné. Dokažte, že číslo $\bar{z} + ai$ je komplexně sdružené k číslu $z - ai$!

Řešení. Označíme-li z_1 reálnou část z, z_2 jeho imaginární část, je $z = z_1 + iz_2$, $\bar{z} = z_1 - iz_2$. Pak

$$\bar{z} + ai = z_1 - iz_2 + ai = z_1 + i(a - z_2).$$

Protože z_1, z_2, a jsou vesměs reálná čísla, je číslo komplexně sdružené k $\bar{z} + ai$ rovno $z_1 - i(a - z_2)$ čili $z_1 + z_2 i - ai = z - ai$.

Příklad 4. Vyjádřete v algebraickém tvaru číslo

$$\frac{1}{(1 - i)(2 - i)(3 - i)}.$$

(1, 0)

Řešení. Podle definice podílu dvou komplexních čísel je toto číslo řešením rovnice

$$(1 - i)(2 - i)(3 - i)x = 1.$$

Jak víte ze školy, má taková rovnice vždy řešení, pokud koeficient při neznámé není nula. Mohli bychom tedy — po vynásobení komplexních čísel na levé straně rovnice — vypočítat reálnou a imaginární část x ze soustavy rovnic o dvou neznámých s reálnými koeficienty. Je však jednodušší cesta. Vše, co potřebujeme, je zbavit se komplexních čísel ve jmenovateli zlomku (i za cenu toho, že se objeví komplexní číslo v čitateli). To není tak těžké. Stačí použít komplexně sdružených čísel. Jak jsme již uvedli, jejich součin je vždy číslo reálné. Stačí tedy násobit čitatel i jmenovatel zlomku číslem komplexně sdruženým s číslem ve jmenovateli. Nemusíme však proto ani násobit všechna tři čísla ve jmenovateli! Můžeme místo toho násobit zvlášť číslem komplexně sdruženým ke každému činiteli:

$$\frac{1}{(1 - i)(2 - i)(3 - i)} = \frac{1}{(1 - i)(2 - i)(3 - i)} \cdot$$

$$\cdot \frac{(1 + i)(2 + i)(3 + i)}{(1 + i)(2 + i)(3 + i)} =$$

$$= \frac{(1 + i)(2 + i)(3 + i)}{(1 + i)(1 - i)(2 + i)(2 - i)(3 + i)(3 - i)}.$$

Nyní provedeme násobení ve jmenovateli podle pravidla o součtu čtverců: $(A + iB)(A - iB) = A^2 + B^2$. Dostaneme

$$\frac{1}{(1-i)(2-i)(3-i)} = \frac{(1+i)(2+i)(3+i)}{2.5.10}.$$

V posledním zlomku se již vyskytuje jen násobení, nikoliv dělení komplexních čísel. Upravme tedy čitatel na algebraický tvar:

$$(1+i)(2+i)(3+i) = [(2-1)+i(2+1)](3+i) =$$
$$= (1+3i)(3+i) = (3-3) + i(9+1) = 10i.$$

Dosazením dostáváme konečný výsledek:

$$\frac{1}{(1-i)(2-i)(3-i)} = \frac{1}{10}\,i.$$

V minulém příkladu jsme násobili zlomkem, v jehož čitateli i jmenovateli byl součin týchž komplexních čísel. Můžeme si však být jisti, že jsme nenásobili výrazem 0/0, který nemá pro nás smysl? Ano, můžeme. A není tak nesnadné to dokázat.

Příklad 5. Ukažte, že součin dvou komplexních čísel je roven nule právě tehdy, je-li aspoň jeden z činitelů 0.

Řešení. Mějme dvě komplexní čísla $a = a_1 + a_2 i$, $b = b_1 + b_2 i$. Jejich součin je $ab = (a_1b_1 - a_2b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$. Předpokládejme, že $a \neq 0$, ale $ab = 0$. To znamená, že reálná i imaginární část součinu ab je nula, tj.

$$a_1b_1 - a_2b_2 = 0,$$
$$a_1b_2 + a_2b_1 = 0.$$

Protože $a \neq 0$, aspoň jedno z čísel a_1, a_2 není nula. Budiž to např. a_1. Z první rovnice pak plyne $b_1 = a_2b_2/a_1$, což dosazeno do druhé rovnice dá

$$a_1b_2 + \frac{a_2^2}{a_1}\,b_2 = 0$$

čili

$$\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1} b_2 = 0.$$

Ale z předpokladu $a_1 \neq 0$ plyne, že součet druhých mocnin je kladný a tedy různý od nuly. Máme tedy dvě (reálná) čísla, z nichž první není nula, ale jejichž součin je nula. Musí tedy být $b_2 = 0$. Protože $b_1 = a_2b_2/a_1$, je také $b_1 = 0$ čili $b = 0$.

Tím jsme dokázali naše tvrzení za předpokladu, že $a_1 \neq 0$. Je-li $a_1 = 0$, plyne z první rovnice $-a_2b_2 = 0$ a z druhé $a_2b_1 = 0$. Protože však a je nenulové číslo a $a_1 = 0$, musí být $a_2 \neq 0$. Je tedy $b_2 = 0$, $b_1 = 0$.

Protože v opačném směru je naše tvrzení zřejmé (je-li aspoň jeden činitel nula, je ovšem i součin roven nule), je tím důkaz proveden. Vyjdeme-li z předpokladu $b \neq 0$, jde jen o záměnu v označení.*)

Jaký důsledek plyne z toho pro příklad 4? Protože žádný z činitelů součinu $(1 - i)(2 - i)(3 - i)$ není nula, nemůže být ani součin nula a nemusíme tedy mít obavy o správnost našeho postupu.

Příklad 6. Dokažte, že rovnají-li se dvě komplexní čísla, rovnají se navzájem jejich prosté hodnoty a jejich argumenty se liší nejvýše o celistvý násobek 2π. Obráceně, mají-li dvě čísla stejné prosté hodnoty a je-li rozdíl jejich argumentů $2n\pi$ (n je celé číslo), jsou si tato čísla rovna.

Řešení. Můžeme se omezit na nenulová komplexní čísla, neboť pro nulu není argument definován. Napišme obě čísla v goniometrickém tvaru

---

*) Důkaz téhož tvrzení jste provedli ve škole (srov. Matematika II, str. 147—148) jiným způsobem. Všimněte si však, že rozdíl v metodě není tak velký, jak se zdá: v obou případech jsme podstatně užili poučky, že je-li $a \neq 0$, je $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \neq 0$.

$$a = |a| (\cos\alpha + i \sin\alpha),$$
$$b = |b| (\cos\beta + i \sin\beta).$$

Je-li $a = b$, musí se podle definice rovnosti komplexních čísel rovnat vzájemně reálné a imaginární části obou čísel. Avšak $\mathrm{Re}\, a = |a| \cos\alpha$, $\mathrm{Im}\, a = |a| \sin\alpha$, $\mathrm{Re}\, b = |b| \cos\beta$, $\mathrm{Im}\, b = |b| \sin\beta$, takže musí platit

$$|a| \cos\alpha = |b| \cos\beta,$$
$$|a| \sin\alpha = |b| \sin\beta.$$

Z těchto dvou rovnic okamžitě plyne $|a| = |b|$. Stačí např. umocnit obě rovnice (tj. jejich levé i pravé strany) na druhou a sečíst. Dostaneme

$$|a|^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = |b|^2(\cos^2\beta + \sin^2\beta),$$

a to je podle známého vztahu z trigonometrie totéž jako $|a|^2 = |b|^2$. Protože obě prosté hodnoty jsou ovšem nezáporná čísla, plyne odtud $|a| = |b|$.

Protože jsme se od začátku omezili na nenulová čísla, můžeme obě rovnice vyjadřující rovnost reálných a imaginárních částí čísel a, b dělit číslem $|a| = |b|$. Dostaneme

$$\cos\alpha = \cos\beta, \quad \sin\alpha = \sin\beta.$$

První rovnice je splněna, je-li $\alpha = \beta + 2n\pi$ nebo $\alpha = -\beta + 2n\pi$ (n je číslo celé). Kdyby však platil vztah se znamením $-$, dostaneme dosazením do druhé rovnice $\sin(-\beta + 2n\pi) = \sin\beta$. Protože $\sin(-\beta + 2n\pi) = -\sin\beta$, plyne odtud $-\sin\beta = \sin\beta$. To však platí, jen je-li $\sin\beta = 0$ čili $\beta = k\pi$. Potom $\alpha = -k\pi + 2n\pi = k\pi + 2(n - k)\pi = \beta + 2n_1\pi$. Platí tedy i potom $\alpha = \beta + 2n_1\pi$ (n_1 je celé číslo).

Obráceně, jsou-li rovny prosté hodnoty dvou komplexních čísel a, b a liší-li se jejich argumenty jen o celistvý násobek 2π, pak platí ovšem také $\cos\alpha = \cos\beta$, $\sin\alpha = \sin\beta$. Jestliže najdeme reálné a imaginární části daných čísel z jejich zápisu v goniometrickém tvaru, dostáváme ihned

$$\operatorname{Re} a = |a| \cos\alpha = |b| \cos\beta = \operatorname{Re} b,$$
$$\operatorname{Im} a = |a| \sin\alpha = |b| \sin\beta = \operatorname{Im} b.$$

Tyto vztahy znamenají ovšem $a = b$. Tím jsme naše tvrzení dokázali v obou směrech. Je-li $a = 0$, musí ovšem být i $b = 0$. Prosté hodnoty se tedy rovnají, o argumentu ovšem nemá smysl mluvit.

Příklad 7. Je dán pravidelný n-úhelník se středem v počátku, vepsaný do kružnice o poloměru r. Jeden jeho vrchol je bod $(r, 0)$. Napište v goniometrickém tvaru komplexní čísla, znázorněná vektory umístěnými v počátku, jejichž koncové body tvoří vrcholy daného n-úhelníka!

Řešení. Označte vrcholy $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $A_1 = (r, 0)$. Pak první číslo, znázorněné vektorem PA_1, je reálné číslo r čili

$$z_1 = r(\cos 0 + \mathrm{i} \sin 0).$$

Také absolutní hodnota všech ostatních čísel je r, neboť koncové body vektorů leží na kružnici o poloměru r. Jaký bude obecně argument těchto čísel?

Protože jde o pravidelný n-úhelník, jsou úhly $\sphericalangle A_1PA_2$, $\sphericalangle A_2PA_3$ atd. stejné. Je jich celkem n (poslední je $\sphericalangle A_nPA_1$) a jejich součet je ovšem $360°$; každý z nich je tedy roven $\frac{1}{n} 360°$. Argumenty čísel jsou ovšem určeny úhly $\sphericalangle A_1PA_2$, $\sphericalangle A_1PA_3, \ldots, \sphericalangle A_1PA_n$. Tyto úhly dostaneme sčítáním několika stejných úhlů, takže

$$\sphericalangle A_1PA_2 = \frac{1}{n} 360°,$$

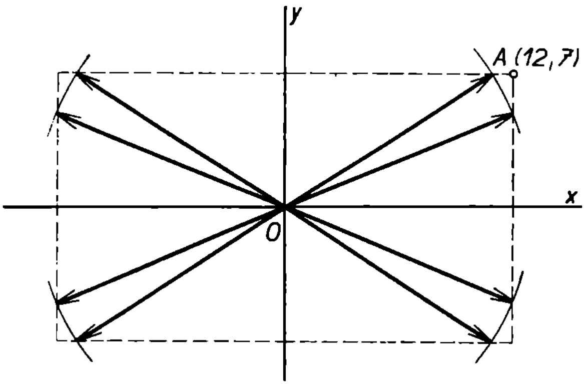
$$\sphericalangle A_1PA_3 = \sphericalangle A_1PA_2 + \sphericalangle A_2PA_3 = \frac{2}{n} 360°$$

atd., obecně $\sphericalangle A_1PA_k = \frac{k-1}{n} 360°$. Goniometrický tvar čísel, znázorněných vektory PA_k, je tedy

$$z_k = r\left(\cos \frac{k-1}{n} 360° + \mathrm{i} \sin \frac{k-1}{n} 360°\right).$$

Vzorec platí pro $k = 1, 2, \ldots, n-1, n$.

Příklad 8. Najděte všechna komplexní čísla, znázorněná vektorem velikosti 13, jestliže koncový bod vektoru leží na obvodu obdélníka se středem v počátku a jedním vrcholem v bodě $A(12, 7)$. Strany obdélníka jsou rovnoběžné s osami souřadnic.



Obr. 1

Řešení. Z obr. 1 je vidět, že koncový bod vektoru musí ležet buď na svislé, nebo na vodorovné straně obdélníka. Leží-li koncový bod vektoru na vodorovné úsečce, je jeho souřadnice y rovna souřadnici bodu A, tj. sedmi, nebo souřadnici protějšího vrcholu (tj. -7). Označíme-li c první souřadnici koncového bodu, je velikost vektoru v obou případech rovna $\sqrt{c^2 + 49}$. Podle požadavku úlohy má tato velikost být rovna třinácti, tj.

$$\begin{aligned} \sqrt{c^2 + 49} &= 13, \\ c^2 + 49 &= 169, \\ c^2 &= 120, \\ c &= \pm 2\sqrt{30}. \end{aligned}$$

Je tedy koncový bod vektoru $(\pm 2\sqrt{30}, \pm 7)$, přičemž je přípustná kterákoliv kombinace znamének. Protože víme, že první a druhá souřadnice koncového bodu vektoru je současně reálná a imaginární část komplexního čísla, znázorněného tímto vektorem, dostáváme tím čtyři řešení naší úlohy, komplexní čísla $2\sqrt{30} + 7i$, $-2\sqrt{30} + 7i$, $2\sqrt{30} - 7i$, $-2\sqrt{30} - 7i$.

Leží-li koncový bod vektoru na svislé úsečce, je jeho první souřadnice ± 12. Pak jeho druhá souřadnice d musí splňovat obdobnou podmínku jako prve:

$$\begin{aligned} \sqrt{d^2 + 144} &= 13, \\ d^2 + 144 &= 169, \\ d &= \pm 5. \end{aligned}$$

Číslo $d = \pm 5$ je zároveň imaginární částí komplexních čísel, která jsou (dalšími) řešeními naší úlohy. Kombinací znamének dostáváme další čtyři řešení, čísla $12 + 5i$, $-12 + 5i$, $12 - 5i$, $-12 - 5i$. Na obr. 1 jsou narýsovány všechny vektory, znázorňující řešení naší úlohy.

Příklad 9. Řešte rovnici

$$(3 + 4i)^2 - 2\bar{z} = z.$$

($\bar{z}$ znamená číslo komplexně sdružené k z.)

Řešení. Vypočtěme druhou mocninu komplexního čísla

$3 + 4i$ na levé straně a upravme rovnici na anulovaný tvar. Pišme přitom $z = x + iy$:

$$-7 + 24i - 2x + 2yi - x - yi = 0,$$
$$-3x - 7 + (y + 24)i = 0.$$

Máme tedy zdánlivě jen jednu rovnici pro dvě neznámé x a y. Ve skutečnosti však jde o dvě podmínky. Je-li komplexní číslo rovno nule, pak jeho reálná i imaginární část musí být nula. Reálná část čísla na levé straně rovnice je $-3x - 7$, imaginární část je $y + 24$. Máme tedy dvě rovnice, každou z nich pro jednu neznámou:

$$-3x - 7 = 0,$$
$$y + 24 = 0.$$

Odtud dostaneme ihned $x = -7/3, y = -24$, takže řešení naší rovnice je komplexní číslo $z = \frac{-7}{3} - 24i$. Zkoušku provede čtenář snadno sám.

Příklad 10. Řešte rovnici

$$\left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^2 + \frac{1}{z} = 1 + i.$$

Řešení. Nejprve upravme zlomek na levé straně rovnice:

$$\left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^2 = \frac{(1 + i)^4}{(1 - i)^2 (1 + i)^2} = \frac{(2i)^2}{4} = -1.$$

Tím se naše rovnice zjednodušila na tvar

$$-1 + \frac{1}{z} = 1 + i.$$

Neznámá z je ve jmenovateli. Zde však nebudeme násobit číslem komplexně sdruženým; dostali bychom $\bar{z}/|z|^2$, což je výraz spíše složitější, protože neznámá se v něm vyskytuje jak v čitateli, tak i ve jmenovateli. Nejjednodušší je přičíst nejprve k oběma stranám rovnice jedničku:

$$\frac{1}{z} = 2 + \mathrm{i}.$$

Nyní znásobíme obě strany rovnice číslem z. Tím odstraníme zlomek, musíme si však zapamatovat podmínku, že $z \neq 0$. Rovnice

$$1 = (2 + \mathrm{i})z$$

má ovšem jediný kořen (zřejmě nenulový)

$$z = \frac{1}{2 + \mathrm{i}}.$$

Abychom dostali řešení rovnice v algebraickém tvaru, vynásobíme čitatel i jmenovatel zlomku číslem komplexně sdruženým $2 - \mathrm{i}$:

$$z = \frac{2 - \mathrm{i}}{(2 + \mathrm{i})(2 - \mathrm{i})} = \frac{2 - \mathrm{i}}{5}.$$

Toto číslo je různé od nuly, takže je řešením (a to zřejmě jediným) dané rovnice.

Příklad 11. Řešte rovnici

$$(z - 3)^2 + (\bar{z} + \mathrm{i})^2 = 4.$$

Řešení. Nejprve rovnici upravíme. Na levé straně umocníme a podle možnosti sloučíme:

$$z^2 - 6z + \bar{z}^2 + 2\mathrm{i}\bar{z} + 4 = 0.$$

V rovnici se vyskytuje jak neznámá z, tak i číslo k ní komplexně sdružené $\bar{z}$. Proto je lépe rozdělit z na reálnou

a imaginární část: $z = x + yi$, takže $\bar{z} = x - yi$. Dosaďme!
$(x + yi)^2 - 6(x + yi) + (x - yi)^2 + 2i(x - yi) + 4 = 0$,
$x^2 - y^2 + 2xyi - 6x - 6yi + x^2 - y^2 - 2xyi + 2xi +$
$+ 2y + 4 = 0$,
$(2x^2 - 2y^2 - 6x + 2y + 4) + i(-6y + 2x) = 0$.
Reálná i imaginární část čísla na levé straně rovnice musí se tedy rovnat nule:

$$2x^2 - 2y^2 - 6x - 2y + 4 = 0,$$
$$2x - 6y = 0.$$

Z druhé rovnice vyjádříme $x = 3y$ a dosadíme do první. Po jednoduchých úpravách dostaneme

$$4y^2 - 4y + 1 = 0.$$

To je kvadratická rovnice pro y; hledáme její reálné kořeny, protože y je imaginární část komplexního čísla z a tedy číslo reálné. Podle vzorce je

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{1}{2}.$$

Existuje tedy jediné řešení původní rovnice, $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ čili $z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$. Zkoušku lze provést dosazením a přímým výpočtem.

Cvičení

1. Napište v algebraickém tvaru komplexní čísla

(a) $\frac{5-3i}{i} + (1 + 2i)^2$; (b) $\frac{1 + 2i}{3 - 4i} - \frac{2 - i}{5i^3}$.

[(a) $-6 - i$; (b) $-2/5$.]

2. Napište následující čísla v goniometrickém tvaru:
(a) $-\sqrt{3} + i$; (b) $-7i$; (c) $4 + 3i$.
[(a) $2(\cos 150° + i \sin 150°)$; (b) $7(\cos 270° + i \sin 270°)$;
(c) $5(\cos 37° + i \sin 37°)$ — tento výsledek je přibližný, protože jsme použili tabulek.]

3. Je-li $\bar{z}$ číslo komplexně sdružené k z, dokažte, že platí

$$\frac{\overline{(2+i)^2}}{3-4i} = 1.$$

4. Řešte rovnice

(a) $(5 - 1/i)\bar{z} + 2z = 22i$; (b) $7i - \dfrac{1}{z+2} = 3(i+1)^2$.

[(a) $1 - 7i$; (b) $-(2 + i)$.]

5. Buď dán rovnostranný trojúhelník o straně délky a, jehož jeden vrchol je v počátku, druhý na ose x a třetí v prvním kvadrantu (tj. obě jeho souřadnice jsou kladná čísla). Napište v goniometrickém a algebraickém tvaru komplexní čísla, znázorněná vektory s koncovými body ve středech stran trojúhelníka.

$$\left[\frac{a}{2}(\cos 0 + i \sin 0) = \frac{a}{2}, \frac{a}{2}(\cos 60° + i \sin 60°) = \right.$$
$$\left. = \frac{a}{4}(1 + \sqrt{3}\,i), \frac{a\sqrt{3}}{2}(\cos 30° + i \sin 30°) = \frac{a}{4}(3 + \sqrt{3}\,i).\right]$$