4. kapitola

ŘEŠENÍ NEROVNOSTÍ

Užití analytické geometrie si ukážeme na jednoduchých úlohách z řešení nerovností. Zprvu je asi stejně snadné i řešení aritmetické, tím lépe však na těchto jednoduchých příkladech pochopíme metodu geometrickou.

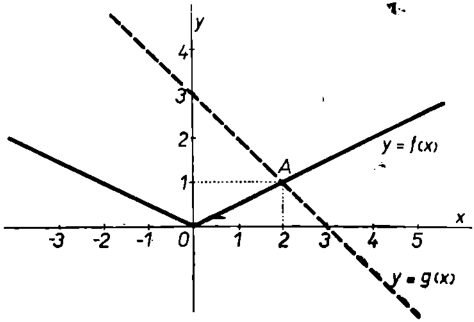
Příklad 4,1. Pro která čísla x je

$$\frac{|x|}{2} > 3 - x? \qquad (4,1)$$

Výraz na každé straně této nerovnosti představuje nějakou funkci proměnné x, což zapíšeme ve tvaru

$$f(x) = \frac{|x|}{2}, \quad g(x) = 3 - x.$$

Snadno sestrojíme grafy funkcí $y = f(x)$ a $y = g(x)$ ve zvolené soustavě souřadnic (viz obr. 18). Graf funkce $f(x)$, mající rovnici $y = \frac{|x|}{2}$, je lomená čára s kritickým bodem v počátku a dovedeme jej snadno sestrojit podle výkladu v kapitole 2. V obr. 18 je vyrýsován plnou čarou. Ještě snazší je graf funkce $g(x)$, neboť je to lineární funkce o rovnici $y = 3 - x$; tento graf je v obr. 18 vyrýsován čárkovanou (přerušovanou) čarou. Poněvadž jde vesměs o přímky (příp. polopřímky), zjistíme takřka pouhým pohledem na obr. 18, že oba tyto grafy se protíhají v bodě A [2; 1]. Ale my hledáme takové x, pro které je podle (4,1) $f(x) > g(x)$. Snadným rozborem zjistíme užitím věty 1,10 a věty 1,11, že pro $x > 2$ (vpravo od průsečíku obou grafů) je $f(x)$ funkce rostoucí a $g(x)$ klesající. Je tedy pro $x > 2$ stále $f(x) > f(2) = 1$ a $g(x) < g(2) = 1$ čili celkem $f(x) > g(x)$. Podobně vidíme, že pro $x < 2$ je $f(x) < g(x)$. Danou nerovnost řeší tedy všechna čísla $x > 2$ a žádná jiná.



Obr. 18

Napišme to ještě ve tvaru množinovém podle kapitoly 3. Nerovnost (4,1) je řešena právě těmi čísly x, pro která platí $x \in (2; +\infty)$.

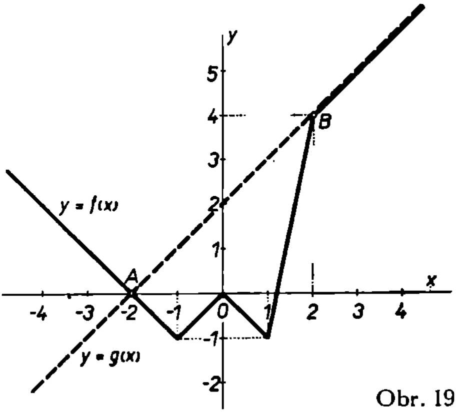
Příklad 4,2. Řešte nerovnost

$$|x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2| < x+2. \quad (4,2)$$

Položme podobně jako prve

$$f(x) = |x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2|,$$
$$g(x) = x+2.$$

Graf funkce $f(x)$ je lomená čára se čtyřmi kritickými body pro hodnoty $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ a $x = 2$. Na obr. 19 je vytažena plnou čarou. Graf funkce $g(x)$ je přímka, vyrýsovaná na obr. 19 čárkovaně. Oba grafy se protínají v bodě A [-2; 0] a pak mají pro $x \geqq 2$ společnou celou polopřímku počínající v bodě B [2; 4]. Podobně jako v předcházejícím příkladě vidíme, že ne-



Obr. 19

rovnost (4,2), tj. nerovnost $f(x) < g(x)$, je splněna pouze pro $x \in (-2; +2)$ čili pro čísla x splňující nerovnosti $-2 < x < +2$, neboť jen v tomto úseku je čára $y = f(x)$ pod čarou $y = g(x)$.

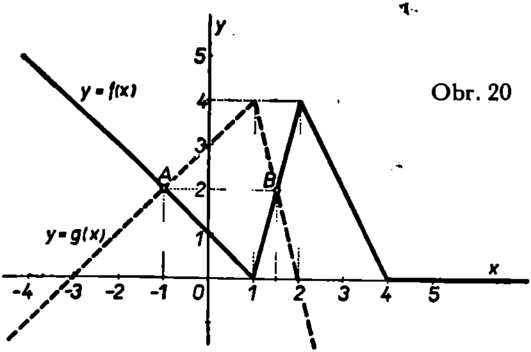
Zkuste vyřešit nerovnost (4,2) aritmeticky a porovnejte pak výhody i nevýhody aritmetického řešení proti geometrickému.

V další úloze bude pro začátečníka důležitá formulace výsledku.

Příklad 4,3. Řešte nerovnost

$$\frac{1}{2}(5|x-1|-x+1)-3|x-2|+|x-4|>$$
$$>\frac{1}{2}(11-3x-5|x-1|)\,. \qquad (4,3)$$

Postup řešení není už pro nás nový. Písmeny f, g označme funkce dané rovnicemi



Obr. 20

$$f(x) = \frac{1}{2}(5|x-1|-x+1)-3|x-2|+|x-4|,$$
$$g(x) = \frac{1}{2}(11-3x-5|x-1|).$$

Jejich grafy jsou na obr. 20; jsou to lomené čáry. Kritické body funkce $y = f(x)$ dostáváme pro $x = 1$, $x = 2$ a $x = 4$, funkce $y = g(x)$ má jediný kritický bod pro $x = 1$. Podobně jako dřív je i zde graf funkce $y = f(x)$ vyrýsován souvisle (plnou čarou) a graf funkce $y = g(x)$ čárkovaně.

Naší úlohou je najít všechna taková x, pro která platí

$$f(x) > g(x)\,, \qquad (4,4)$$

což je v tomto případě jen stručný zápis nerovnosti (4,3). Při trošce geometrického citu snadno nacházíme, že oba grafy se protínají v bodech A $[-1;\ 2]$ a B $\left[\frac{3}{2};\ 2\right]$. Vlevo od průsečíku A je nerovnost (4,4) ovšem splněna, protože v intervalu $(-\infty;\ -1\rangle$ je podle vět 1,10 a 1,11 funkce $f(x)$ klesající a $g(x)$ rostoucí; skutečně je pro $x < -1$ všude $f(x) > f(-1) = 2 = g(-1) > g(x)$. Dále je nerovnost (4,4) splněna vpravo od bodu B, tedy pro $x > \frac{3}{2}$, jak už čtenář vyšetří podobně jako prve snadno sám; i pro tato x je stále čára $y = f(x)$ nad čarou $y = g(x)$. Pro zbývající x, tj. pro $-1 \leqq x \leqq \frac{3}{2}$, tomu tak není a proto všechna řešení nerovnosti (4,3) jsou taková čísla x, pro která platí $x < -1$ nebo $x > \frac{3}{2}$*). Slůvko *nebo* má zde svůj zvláštní význam, kterého si brzy všimneme. Dříve se však pokusme zapsat náš výsledek pomocí množinových pojmů. Našli jsme, že všechna čísla x, která řeší nerovnost (4,3), tvoří dva intervaly, totiž interval $(-\infty;\ -1)$ a interval $\left(\frac{3}{2};\ +\infty\right)$. Množina

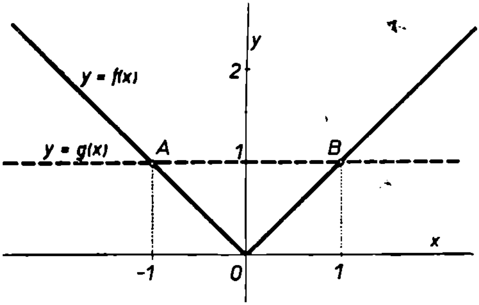
---

*) Jiný možný postup řešení nerovnosti (4,3) je tento: užitím vět 1,2 a 1,3 ji převedeme na ekvivalentní nerovnost tím, že všechny členy z pravé strany nerovnosti 4,3 převedeme na její levou stranu. Po jednoduchém počtu seznáte, že to vede k úloze ze cvičení 4,2. Pro sestrojení grafu příslušné funkce potřebujete však (při zachování měřítek z obr. 20) mnohem více místa.

všech řešení nerovnosti (4,3) je tedy sjednocením obou těchto intervalů, takže můžeme napsat: číslo x je řešením nerovnosti (4,3) tehdy a jen tehdy, je-li

$$x \in \left[(-\infty\,; -1) \cup \left(\frac{3}{2}\,; +\infty\right)\right]. \qquad (4,5)$$

Výhoda tohoto zápisu řešení nerovnosti (4,3) vysvitne nejlépe na některých hodně jednoduchých příkladech.



Obr. 21

Je zřejmé, že například nerovnost $|x| < 1$ je řešena právě těmi x, pro která platí $-1 < x < +1$ čili pro $x \in (-1\,; +1)$. Snadno to poznáme i z grafického vyjádření funkcí $f(x) = |x|$ a $g(x) = 1$ na obr. 21, neboť právě v intervalu $(-1\,; +1)$ je čára $y = f(x)$ pod čarou $y = g(x)$, tedy $f(x) < g(x)$. Naproti tomu nerovnost $|x| > 1$ čili $f(x) > g(x)$ je řešena právě těmi x, pro která je

$$x < -1 \text{ nebo } x > 1, \qquad (4,6)$$

což jsou čísla z intervalů

$$(-\infty\,; -1) \text{ a } (1\,; +\infty). \qquad (4,7)$$

Všimněte si, že oba tyto zápisy (4,6) a (4,7) mají stejný matematický obsah (znamenají prostě totéž), i když v prvním z nich užíváme spojky nebo a v druhém spojky a. Každý však cítí, že v zápise (4,6) nelze užít spojky a, protože čísla x, pro která je $x < -1$ a $x > 1$, neexistují; průnik intervalů (4,7) je totiž množina prázdná, píšeme přece správně $(-\infty; -1) \cap (1; +\infty) = \emptyset$. V běžné řeči mívají však spojky *a* a *nebo* význam protichůdný; v gramatice čteme, že *a* spojuje skoro vždycky výrazy souřadné, spojka *nebo* spojuje nejčastěji dvě odporující si věty v souvětí odporová. Říkáme například: „Půjdu na procházku, nebo (půjdu) do biografu.“ Tu jde vždy o dvě možnosti, které se navzájem vylučují, odporují si. V matematice však právě spojka *nebo* znamená velmi často spojení souřadné. Víme už, že m je prvkem sjednocení množin $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, je-li $m \in \boldsymbol{A}$ *nebo* $m \in \boldsymbol{B}$; přitom tyto dvě možnosti se nevylučují, neodporují si, protože m může být docela dobře prvkem obou množin $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ současně. Podobně neostrá nerovnost $a \leqq b$, kterou čteme slovy „a je menší *nebo* rovno b“ připouští obě možnosti $a < b$ i $a = b$. Ale věta, že „tři body v rovině určují trojúhelník, nebo leží v přímce“ ukazuje, že i v matematice někdy užíváme spojky nebo tak jako jinde v denním životě, když spojujeme dvě odporující si tvrzení. Pro tuto nejednotnost významu slovního vyjádření, která nám v matematice často vadí, se nebudeme ovšem zlobit na jazykovědce. Uvědomíme si, že živý jazyk podléhá změnám, že na rozdíl od mrtvého jazyka (jako je latina) se vyvíjí a že tomu žádný jazykovědec nezabrání. Potřebuje-li však matematika, aby její pojmy byly vymezeny jednoznačně, nezbývá matematikům nic jiného, než uchýlit se k vlastní symbolice a vyhnout se tak svrchu zmíněné „nedokonalosti“ lidské řeči. V našich příkladech je touto symbolikou množinové vyjádření. Zápis

(4,5) mluví jasně a nenechává nikoho na pochybách v záležitosti řešení nerovnosti (4,3). Podobně ne zcela jasné zápisy (4,6) a (4,7) nahradíme snadno bezpečnou formulací, že právě pro $x \in [(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)]$ je $|x| > 1$.

Z těchto příkladů už je vidět užitečnost množinové symboliky; zároveň se ukazuje, že teorie množin není samoúčelná. A to jsme teprve v začátcích, k teorii množin jsme zde vlastně ani nepřičichli. V dalších příkladech užijeme množinových pojmů už stručně bez obšírných výkladů.

Příklad 4,4. Máme-li zjistit, pro která čísla x platí nerovnosti

$$|2x - 1| < |x| < 3x + 2, \tag{4,8}$$

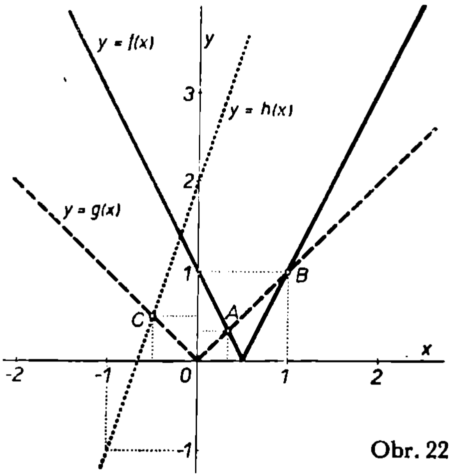
zavedeme funkce

$$f(x) = |2x - 1|, \; g(x) = |x|, \; h(x) = 3x + 2$$

a sestrojíme jejich grafy v obr. 22 (čára $y = f(x)$ je vyrýsována plně, $y = g(x)$ čárkovaně a $y = h(x)$ tečkovaně). Nerovnost (4,8) pak zní

$$f(x) < g(x) < h(x). \tag{4,9}$$

Soustředíme se nejdřív na nerovnost $f(x) < g(x)$; metodami nám už známými poznáváme, že tato nerovnost je splněna právě pro x vyhovující nerovnostem $\frac{1}{3} < x < 1$, neboť čáry $y = f(x)$ a $y = g(x)$ se protínají v bodech $A\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$ a $B[1; 1]$ a jen v tomto úseku mezi body A, B leží čára $y = f(x)$ pod čarou $y = g(x)$. Hledejme dále čísla x, která řeší nerovnost $g(x) < h(x)$. Čáry $y = g(x)$ a $y = h(x)$ se protínají v bodě $C\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ a vpravo od tohoto bodu leží už všude čára $y = h(x)$ nad čarou $y = g(x)$, je tedy právě pro $x > -\frac{1}{2}$ stále $g(x) < h(x)$. Zapišme dosavadní výsledky množinově:



Obr. 22

Nerovnost $f(x) < g(x)$ platí právě pro $x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

Nerovnost $g(x) < h(x)$ platí právě pro $x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Nerovnost (4,9) čili (4,8) je tedy řešena právě těmi čísly x, která leží v obou právě vypsaných intervalech zároveň, tedy v jejich průniku. Snadno nacházíme, že je

$$\left(\frac{1}{3}; 1\right) \cap \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) = \left(\frac{1}{3}; 1\right),$$

je totiž $\left(\frac{1}{3}; 1\right) \subset \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Máme tedy tento výsledek: nerovnostem (4,8) vyhovují všechna čísla $x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$, tj. čísla x, pro která platí $\frac{1}{3} < x < 1$ a žádná jiná.

Závěrem této kapitoly připojme ještě stručnou zmínku o nerovnostech kvadratických. Analytická geometrie nám názorně pomáhá i zde.

Příklad 4,5. Řešte nerovnost

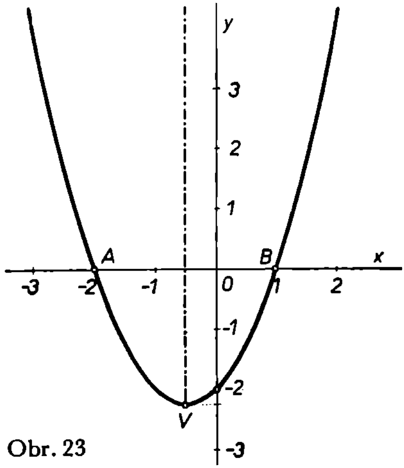
$$x^2 + x - 2 > 0\,. \tag{4,10}$$

V analytické geometrii se ve škole učí, že rovnice $y = x^2 + x - 2$ $\left[\text{čili } y + \frac{9}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right]$ představuje parabolu o vrcholu $V\left[-\frac{1}{2}; -\frac{9}{4}\right]$; její graf je na obr. 23. V naší úloze se ptáme po těch bodech této paraboly, které leží nad osou x. Osu x protíná naše parabola v bodech A [—2; 0], B [1; 0,], jak zjistíme řešením rovnice $x^2 + x - 2 = 0$. Protože vlevo od vrcholu V dává parabola funkci klesající a vpravo od vrcholu V funkci rostoucí, nacházíme ihned hledané řešení: nerovnost (4,10) je splněna pro body vlevo od bodu A a pro body vpravo od bodu B, tedy pro $x < -2$ a pro $x > 1$. To je sjednocení dvou nekonečných intervalů, nerovnost (4,10) proto platí tehdy a jen tehdy, je-li

$$x \in [(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)]. \tag{4,11}$$

Připojme ještě aritmetické řešení nerovnosti (4,10). Pro každé x je $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$. Tento součin má být kladný. To nastává buď tehdy, když oba výrazy $x + 2$ a $x - 1$ jsou kladné, nebo tehdy, když jsou oba záporné. První možnost vede k nerovnostem $x + 2 > 0$, $x - 1 > 0$, jež požadují, aby bylo zároveň $x > -2$ a $x > 1$; jde tedy o průnik intervalů

$$(-2; +\infty) \cap (1; +\infty) = (1; +\infty)\,. \qquad (4,12)$$



Obr. 23

První možnost dává tedy řešení $x > 1$. Druhá možnost nezávisle na první poskytuje další řešení $x + 2 < 0$, $x - 1 < 0$ a požaduje tudíž, aby bylo zároveň $x < -2$ a $x < 1$; to je průnik intervalů

$$(-\infty; -2) \cap (-\infty; 1) = (-\infty; -2). \qquad (4,13)$$

Sjednocením těchto průniků, zapsaných formulemi (4,12) a (4,13), vyčerpáme obě zmíněné možnosti a dostáváme opět řešení ve tvaru (4,11). Je vidět, že i v aritmetickém řešení se vyplatí množinové myšlení pro svou jednoduchou přehlednost.

Poznamenejme ještě pro úplnost, že některé kvadratické trojčleny jsou buď stále kladné, nebo stále záporné. Pak je řešení velmi snadné. Například nerovnost $x^2 + 2x + 2 > 0$ je splněna pro všechna čísla x, neboť pro každé x je $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 \geqq 1 > 0$; pro každé a je totiž $a^2 \geqq 0$, je tedy také $(x + 1)^2 \geqq 0$. Geometricky to znamená, že parabola o rovnici $y = x^2 + 2x + 2$ neprotíná osu x, ale leží celá nad ní. Narýsujte si ji, má vrchol $V[-1; 1]$.

Cvičení

4,1. Řešte nerovnost:

a) $|x| + |2 - x| < 2$;
b) $2|2x - 3| \geqq x + 5$;
c) $|x - 2| > |2x + 3|$;
d) $2x + 1 - 2|x + 1| + |x - 3| \leqq |x|$.

4,2. Řešte nerovnost

$$5|x - 1| - 3|x - 2| + |x - 4| + x - 5 > 0$$

a všimněte si souvislosti s příkladem 4,3.

4,3. Geometricky znázorněte řešení nerovností

a) $|x - a| < b$; b) $|x - a| > b$, je-li ovšem $b > 0$.

4,4. Geometricky řešte soustavu nerovností

$$2x + 3 \leqq 3x + 1 \leqq x + 5.$$

4,5. Pro která x je $x^2 - 9x + 18 < 0$?

4,6. Dokažte: pro každé x je $x^2 + x + 1 > 0$.