5. kapitola

EXTRÉMY KUBICKÉ A BIKVADRATICKÉ FUNKCE

V poslední kapitole rozřešíme několik úloh, které vedou k vyhledávání extrému kubické funkce $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ a funkce $f(x) = \sin x\,(1 + \cos x)$. Předem je nutno říci, že u těchto funkcí už nevystačíme s tak elementárními prostředky jako v předešlých kapitolách. Úvahy o extrémech těchto funkcí nás nakonec vždy přivedou k obratům vlastním tzv. diferenciálnímu počtu. Nechceme to čtenáři zastírat, naopak, upozorňujeme ho na tuto okolnost. Existují dost populární publikace, ve kterých jsou začátky diferenciálního počtu vyloženy přístupnou formou*) a je jen užitečné, podnítí-li četba těchto stránek aspoň některé mladé čtenáře k tomu, aby po takových publikacích sáhli. Na druhé straně však je nutno uvážit, že cíle i prostředky této knížečky jsou jen skromné, takže v dalším textu nelze očekávat víc než náznak jisté metody a výsledků, které přináší. V závěru ještě upozorníme na otázky, které tu nebudou dořešeny nebo dokonce ani položeny.

Hned na začátku předložíme čtenáři jednu větu, jejíž platnost je snad sice očividná, ale jejíž důkaz neuvádíme na tomto místě pro jeho obtížnost.

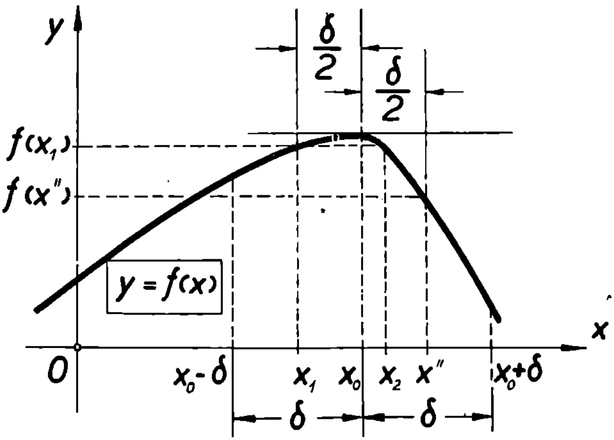
Věta 8. *Nechť funkce f je spojitá v uzavřeném intervalu*

*) Z mnoha takových jmenujeme aspoň *Havlíčkův Diferenciální počet pro začátečníky*.

$<a, b>$. Funkce f nabývá v intervalu $<a, b>$ všech hodnot ležících mezi čísly $f(a), f(b)$.

Věta 8 v podstatě říká, že přecházíme-li „*spojitě*" od čísla $f(a)$ k číslu $f(b)$, nemůžeme přitom vynechat žádné číslo ležící mezi nimi. Jde o jednu ze základních vět diferenciálního počtu, ze které vyplývá další věta, mající pro nás velkou důležitost:

Věta 9. *Nechť funkce f je spojitá v jistém okolí O_{x_0} bodu x_0, ve kterém nabývá lokálního extrému. Pak v levém okolí bodu x_0 existuje aspoň jeden bod x_1 a v pravém okolí aspoň jeden bod x_2 tak, že $f(x_1) = f(x_2)$.*



Obr. 37.

Provedeme důkaz (který můžete sledovat na obr. 37) pro případ, že funkce f nabývá v bodě x_0 lokálního maxima. Podle definice lokálního maxima existuje takové okolí $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $(\delta > 0)$ bodu x_0, že v intervalech

$(x_0 - \delta, x_0)$ a $(x_0, x_0 + \delta)$ jsou funkční hodnoty $f(x)$ vesměs menší než číslo $f(x_0)$. Vezměme čísla $x' = x_0 - \frac{\delta}{2}$, $x'' = x_0 + \frac{\delta}{2}$.

I. Je-li $f(x') \geqq f(x'')$, označíme $x'' = x_1$. Protože je $f(x'') \leqq f(x') < f(x)$, nabývá funkce f podle věty 7 aspoň v jednom bodě x_2 z intervalu (x_0, x''), který je částí intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$, hodnoty $f(x') = f(x_1)$. Je tedy $f(x_1) = f(x_2)$.

II. V případě $f(x') < f(x'')$ bychom označili $x' = x$ a analogicky bychom dokázali existenci bodu x_1 v intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$, pro který $f(x_1) = f(x_2)$.

Tím je důkaz proveden, ale z dokázané věty plyne ještě daleko silnější tvrzení. Funkce f nabývá podle věty 8 v intervalu (x_1, x_0), který je částí okolí $(x_0 - \delta, x_0)$, všech hodnot mezi čísly $f(x_1)$ a $f(x_0)$. Všech těchto hodnot však také nabývá v pravém okolí $(x_0, x_0 + \delta)$, neboť v tomto okolí leží číslo x_2, pro které $f(x_2) = f(x_1)$. Můžeme tedy považovat za dokázanou i následující větu.

Věta 10. *Nechť funkce f je spojitá v bodě x_0, ve kterém nabývá svého lokálního extrému. Pak existuje nekonečně mnoho dvojic čísel x_1, x_2 (x_1 z levého, x_2 z pravého okolí bodu x_0), pro které $f(x_1) = f(x_2)$.*

Vezměme nyní kubickou funkci $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ a předpokládejme, že v bodě x_0 nabývá lokálního extrému. Pak v jistém okolí bodu x_0 existuje nekonečně mnoho dvojic čísel x_1, x_2 $(x_1 < x_0 < x_2)$, pro které je $f(x_1) = f(x_2)$, tj. pro které

$$ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d,$$

čili

$$a(x_1^3 - x_2^3) + b(x_1^2 - x_2^2) + c(x_1 - x_2) = 0$$

a po vytknutí

$$(x_1 - x_2)\,[a\,(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + b\,(x_1 + x_2) + c] = 0.$$

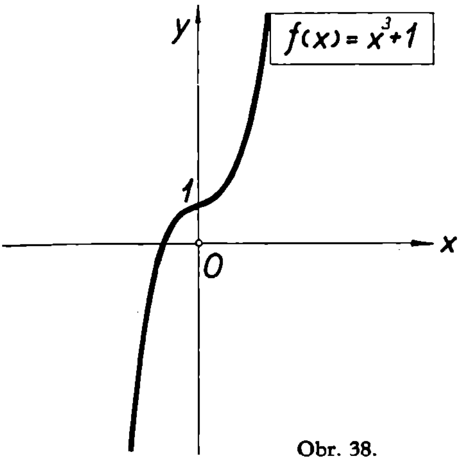
Protože je $x_1 \neq x_2$, plyne odtud pro nekonečně mnoho dvojic x_1, x_2, že

$$a\,(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + b\,(x_1 + x_2) + c = 0.$$

Představme si nyní, že zvolíme dvojici x_1, x_2 čísel stále bližších a bližších číslu x_0. Dojdeme tak k závěru, že poslední rovnost platí v i případě, že v ní čísla x_1 *a* x_2 nahradíme číslem x_0, tj. že platí

$$3ax_0^2 + 2bx_0 + c = 0. \qquad \text{(I)}$$

Tím jsme odvodili podmínku, která musí být splněna, nabývá-li funkce f v bodě x_0 lokálního extrému, tj. nutnou podmínkou pro extrém.



Obr. 38.

Jednoduchý příklad však ukazuje, že podmínka (I) není postačující. Pro funkci $f(x) = x^3 + 1$ (obr. 38) je levá strana rovnice (I) rovna $3x_0^2$. Pro $x_0 = 0$ splňuje tedy funkce $f(x) = x^3 + 1$ podmínku (I), ale přesto v tomto bodě — jak je vidět z obrázku a jak lze také početně ukázat — neexistuje ani lokální maximum, ani lokální minimum. Proto hledáme podmínku, která by doplnila podmínku (I) na postačující k tomu, aby kubická funkce měla v bodě x_0 lokální extrém. Naznačíme již jen stručně odvození takové doplňující podmínky.

Učiníme nyní ještě určitější předpoklad. Nechť funkce f nabývá v bodě x_0 lokálního maxima. (Podmínka (I) se týkala obou případů — maxima i minima.) Podle definice existuje takové redukované okolí bodu x_0, v němž pro všechny argumenty x je

$$f(x) < f(x_0),$$

tj.

$$a(x^3 - x_0^3) + b(x^2 - x_0^2) + c(x - x_0) < 0.$$

Vyjdeme-li z této nerovnosti, pak po několika úpravách (mezi něž patří užití podmínky (I) a po té dělení kladnou mocninou $(x - x_0)^2$) dostaneme nerovnost

$$a(x + 2x_0) + b < 0.$$

Z ní po podobné úvaze, jaká byla provedena při odvození podmínky (I) (x se neomezeně blíží k x_0 a je jím nahrazeno) vychází podmínka

$$3ax_0 + b < 0. \qquad \text{(IIa)}$$

Lze ukázat, že podmínky (I) a (IIa) jsou již postačující pro to, aby funkce $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ nabývala v bodě x_0 lokálního maxima. Zcela obdobně bychom došli k podmínce (IIb), o které hovoří věta 11, shrnující výsledky těchto úvah.

Věta 11. *Kubická funkce* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *může nabývat lokálního extrému jedině v takovém bodě* x_0, *pro který je*

$$3ax_0^2 + 2bx_0 + c = 0. \qquad \text{(I)}$$

Je-li splněna podmínka (I) *a platí-li ještě*

$$3ax_0 + b < 0 \quad \text{(IIa)} \quad \text{nebo} \quad 3ax_0 + b > 0 \quad \text{(IIb)},$$

nabývá funkce f v bodě x_0 *lokálního maxima, případně minima.*

Příklad 29. *Vyhledejte (pokud existují) lokální extrémy funkce* $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 36x + 5$.

Podmínky (I) věty 11 zní pro danou funkci takto:

$$6x_0^2 - 30x_0 - 36 = 0,$$

tj.

$$x_0^2 - 5x_0 - 6 = 0.$$

Řešením kvadratické rovnice zjistíme, že funkce f může mít extrémy jedině v bodech $x_0 = 2$ nebo $x_0 = 3$. Pro $x_0 = 2$ je tu

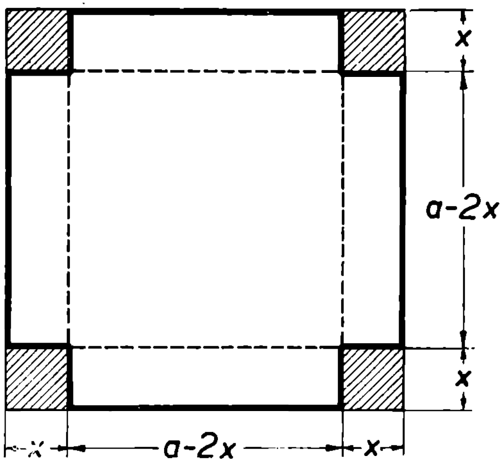
$$6x_0 - 15 = -3 < 0,$$

je tedy splněna podmínka (IIa) z věty 11 a funkce f nabývá v bodě 2 lokálního maxima. Pro $x_0 = 3$ je

$$6x_0 - 15 = 3 > 0,$$

takže je splněna podmínka (IIb) věty 11 a funkce f nabývá v bodě 3 lokálního minima.

Příklad 30. (Obr. 39.) *Ze čtverce plechu o straně a máme v rozích vystřihnout čtverečky tak, aby nádoba vzniklá ohnutím okrajů zbytku* (jak je naznačeno na obr. 39) *měla maximální objem.*



Obr. 39.

Je-li x délka strany vystřižených čtverečků, je objem nádoby

$$V = (a - 2x)^2 \,.\, x = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x.$$

Jde tedy o určení maxima kubické funkce $V(x) = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$ vzhledem k intervalu $\left(0, \frac{a}{2}\right)$.

Hledejme nejprve maximum vzhledem k intervalu $\left\langle 0, \frac{a}{2} \right\rangle$. Lokální maximum funkce $V(x)$ nastane podle věty 11 v bodě x_0, pro který jsou splněny podmínky (I) a (II. a), tj. pro který je

$$12x_0^2 - 8ax_0 + a^2 = 0$$

a

$$12x_0 - 4a < 0.$$

Tyto podmínky jsou splněny pro

$$x_0 = \frac{a}{6},$$

přičemž

$$V_{max} = V(x_0) = \frac{2}{27} a^3.$$

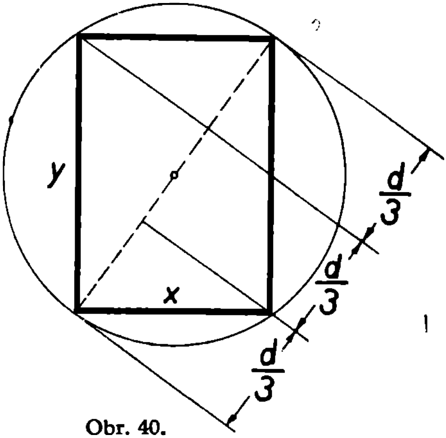
Dále je $V(0) = V\left(\frac{a}{2}\right) = 0$. Proto je číslo $V(x_0) > 0$ maximem funkce V vzhledem k intervalu $\left\langle 0, \frac{a}{2} \right\rangle$ (podle věty 1) a toto číslo je podle věty 4 také jejím maximem vzhledem k intervalu $\left(0, \frac{a}{2}\right)$. Číslo $x_0 = \frac{a}{6}$ je tedy jediným řešením dané úlohy.

Řekli jsme již, že probírané úlohy povedou většinou k vyhledávání extrémů vzhledem k otevřeným intervalům (jako v posledním příkladě). Právě použitého postupu (vyhledání extrému vzhledem k „širšímu" intervalu a aplikace věty 4) budeme v dalších příkladech užívat již bez podrobného zdůvodnění.

Příklad 31. (Obr. 40.) *Stanovte rozměry x, y obdélníkového trámu vytesaného z válcového kmene o konstantním průměru d tak, aby jeho únosnost byla maximální.*

Únosností trámu zde rozumíme maximální ohybový moment, který může trám přenést při zachování předepsané bezpečnosti. Tento maximální ohybový moment je podle nauky o pružnosti a pevnosti dán vzorcem

$$M_{max} = \sigma \cdot W,$$



Obr. 40.

kde σ je dovolené napětí užitého materiálu (v našem případě dřeva) a

$$W = \frac{1}{6} \cdot xy^2$$

je tzv. průřezový modul. V našem případě hledáme tedy maximální hodnotu veličiny W.
Podle Pythagorovy věty platí

$$y^2 = d^2 - x^2,$$

takže

$$W = \frac{1}{6} x \left(d^2 - x^2\right) = \frac{1}{6} \left(d^2 x - x^3\right).$$

Hledáme maximum funkce $f(x) = -x^3 + d^2 x$, jejíž definiční obor je zde interval $(0, d)$.
Funkce f má podle věty 11 lokální maximum v bodě x_0, pro který je

$$-3x_0{}^2 + d^2 = 0$$

a

$$-3\, x_0 < 0.$$

To je bod

$$x_0 = \frac{d}{3}\sqrt{3},$$

který patří do intervalu $(0, d)$.
Dále je

$$f(0) = f(d) = 0, \quad f(x_0) = \frac{2}{9}d^3\sqrt{3} > 0,$$

takže číslo

$$x_0 = \frac{d}{3}\sqrt{3}$$

je jediným řešením naší úlohy. Pro druhý rozměr obdélníka y_0 vychází

$$y_0 = \frac{d}{3}\sqrt{6} = x_0\sqrt{2},$$

takže rozměry hledaného obdélníka budou v poměru

$$x_0 : y_0 = 1 : \sqrt{2}$$

a pak

$$W_{max} = \frac{d^3}{27}\sqrt{3}.$$

Ze vztahu

$$x_0^2 = d\,.\,\frac{d}{3}$$

vyplývá konstrukce řešení, při které užijeme Euklidovy věty.

Příklad 32. (Obr. 41.) *Od světelného bodu A je ve vzdálenosti a střed koule o poloměru x, který je menší než a. Jak velký má být tento poloměr, aby z bodu A osvětlený kulový vrchlík měl největší obsah?*

Zaveďme označení podle obr. 41. Pak obsah vrchlíku je

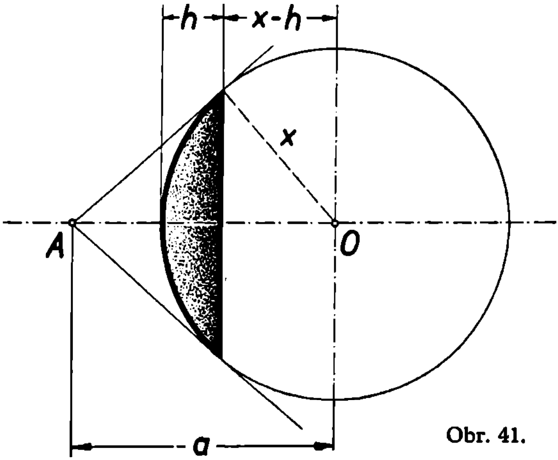
$$S = 2\pi xh$$

a podle Euklidovy věty platí

$$x^2 = a\,(x - h),$$

z čehož

$$h = \frac{ax - x^2}{a}.$$



Obr. 41.

Vyloučením h z výrazu pro vrchlík obdržíme

$$S = \frac{2\pi}{a}\,(ax^2 - x^3)$$

a hledáme maximum funkce $f\,(x) = ax^2 - x^3$ v intervalu $(0, a)$. Věta 11 dává pro lokální maximum této funkce podmínky

$$2ax_0 - 3x_0{}^2 = 0,$$

a

$$a - 3x_0 < 0.$$

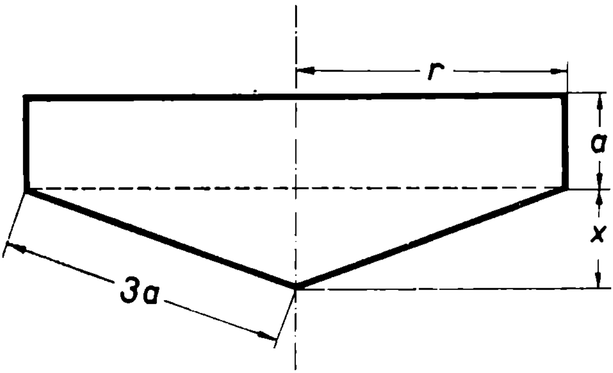
Ty jsou splněny pro

$$x_0 = \frac{2}{3}a.$$

Je $f(0) = f(a) = 0$, $f(x_0) = \frac{4}{27}a^3 > 0$. V bodě $x_0 = \frac{2}{3}a$ má tedy funkce f a tím i funkce $S = \frac{2\pi}{a}f$ maximum vzhledem k intervalu $(0, a)$. Pro obsah vrchlíku dostáváme

$$S_{max} = S(x_0) = \frac{8\pi}{27}a^2.$$

Příklad 33. (Obr. 42.) *Nádrž na vodárenské věži se skládá ze svislého kruhového válce o dané výšce a, dole ukončeného kuželem o témže poloměru podstavy a o straně délky $3a$. Určete výšku kužele a poloměr tak, aby nádrž měla maximální objem.*



Obr. 42.

Objem nádrže je

$$V = \pi r^2 a + \frac{\pi}{3} r^2 x = \pi r^2 \left(a + \frac{1}{3} x\right),$$

kde x je výška kužele.
Podle Pythagorovy věty platí $r^2 = 9a^2 - x^2$, takže po vyloučení r^2 dostáváme objem jako funkci argumentu x,

$$V = \pi \left(9a^3 + 3a^2 x - ax^2 - \tfrac{1}{3} x^3\right).$$

Dostáváme opět kubickou funkci, jejíž definiční obor je interval $(0, 3a)$ a která má lokální maximum v bodě x_0, splňujícím podmínky

$$x_0^2 + 2ax_0 - 3a^2 = 0, \quad -x_0 - a < 0$$

tj. v bodě

$$x_0 = a.$$

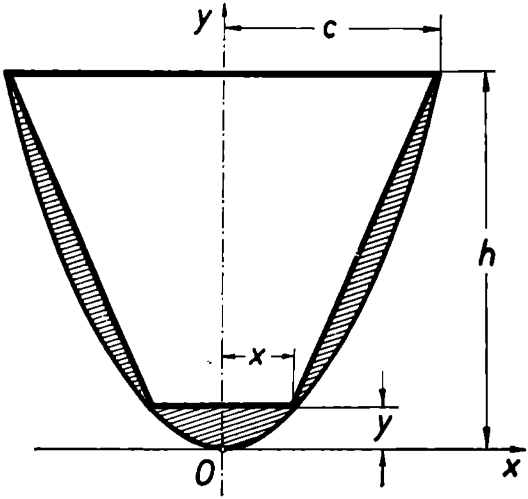
Je $V(0) = 9\pi a^3$, $V(3a) = 0$, $V(x_0) = \frac{32}{3}\pi a^3$, takže $V(x_0) > V(0)$ i $V(x_0) > V(3a)$ a funkce $V(x)$ nabývá v bodě $x_0 = a$ maxima

$$V_{max} = \frac{32}{3} \pi a^3$$

vzhledem k intervalu $(0, 3a)$. Pro poloměr nádrže vychází

$$r = 2a\sqrt{2}.$$

Příklad 34. (Obr. 43.) *Do parabolické úseče vytvořené parabolou $2py = x^2$ a přímkou $y = h$ vepište rovnoramenný lichoběžník se základnami rovnoběžnými s osou x o největším obsahu.*



Obr. 43.

Zvolíme-li označení jako na obr. 43, je obsah lichoběžníka

$$S = (c + x)\,(h - y).$$

Z rovnice paraboly vypočteme y a dosadíme:

$$S = (c + x)\left(h - \frac{x^2}{2p}\right) = hc + hx - \frac{cx^2}{2p} - \frac{x^3}{2p}.$$

Funkce S nabývá lokálního maxima v bodě x_0, je-li

$$-\frac{3}{2p}x_0^2 - \frac{c}{p}x_0 + h = 0, \quad -\frac{3x_0}{p} - \frac{c}{p} < 0,$$

tj., je-li

$$x_0 = \frac{c}{3}.$$

Při výpočtu jsme užili vztahu $2ph = c^2$, který plyne z rovnice paraboly. Úloha omezuje definiční obor funkce S na interval $(0, c)$. Je

$$S(0) = hc,\ S(c) = 0,\quad S(x_0) = \frac{16\,c^3}{27p} = \frac{32}{27}hc.$$

Z čísel $S(0)$, $S(c)$, $S(x_0)$ je $S(x_0)$ největší, takže vskutku nabývá funkce $S(x)$ v bodě $x_0 = \frac{c}{3}$ maxima vzhledem k intervalu $(0, c)$; hledaný lichoběžník má obsah

$$S_{max} = S(x_0) = \frac{16c^3}{27p} = \frac{32}{27}hc.$$

V příkladech, které uvádíme nakonec, je třeba najít extrémy funkce $f(x) = \sin x\,(1 + \cos x)$. K tomu použijeme funkce $y = ax^4 + bx^3 + dx + e$. Úvahy zcela obdobné úvahám, které nás dovedly k vyslovení věty 11, umožňují dokázat tuto větu:

Věta 12. 1) *Bikvadratická funkce* $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ *může nabývat lokálního extrému jedině v takovém bodě* x_0, *pro který je*

$$4ax_0^3 + 3bx_0^2 + 2cx_0 + d = 0. \qquad \text{(III)}$$

2) *Je-li splněna podmínka* III *a platí-li ještě* $6ax_0^2 + 3bx_0 + c < 0$ (IVa) nebo $6ax_0^2 + 3bx_0 + c > 0$ (IVb), *nabývá funkce* f *v bodě* x_0 *lokálního maxima případně minima.*

Příklad 35. *Najděte lokální extrémy funkce* $f(x) = (1 - x^2)(1 + x)^2$ *v intervalu* $(0, 1)$.

Je

$$f(x) = -x^4 - 2x^3 + 2x + 1.$$

Podmínka III věty 12 tedy pro funkci f zní

$$-4x_0^3 - 6x_0^2 + 2 = 0,$$

tj.

$$2x_0^3 + 3x_0^2 - 1 = 0.$$

Snadno zjistíme, že jedním kořenem této rovnice je číslo -1, takže ji lze napsat ve tvaru

$$(x_0 + 1)(2x_0^2 + x_0 - 1) = 0,$$

nebo ještě lépe ve tvaru

$$(x_0 + 1)^2 (2x_0 - 1) = 0.$$

V intervalu $(0, 1)$ má tato rovnice jediné řešení

$$x_0 = \tfrac{1}{2};$$

pro ně je také splněna nerovnost

$$-6x_0^2 - 6x_0 < 0,$$

tj. podmínka IVa z věty 12.
V intervalu $(0, 1)$ má tedy funkce $f(x) = (1 - x^2)(1 + x)^2$ jediný lokální extrém a to lokální maximum v bodě $x_0 = \frac{1}{2}$.

Pro t z intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ položme

$$\cos t = x.$$

Pak

$$f(x) = (1 - x^2)(1 + x)^2 = (1 - \cos^2 t)(1 + \cos t)^2,$$

čili

$$f(x) = (1 - x^2)(1 + x)^2 = [\sin t (1 + \cos t)]^2.$$

V předešlém příkladu jsme ukázali, že funkce $f(x)$ má pro x z intervalu $(0, 1)$ jediný lokální extrém, a to lokální maximum pro $x = \frac{1}{2}$. Odtud plyne, že funkce

$\bar{y} = [\sin t\,(1 + \cos t)]^2$ má pro t z intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ jediný extrém a to lokální maximum v bodě $t = \frac{\pi}{3}$, (neboť $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$). Totéž však můžeme tvrdit o funkci $y = \sin t\,(1 + \cos t)$, vzhledem k tomu, že tato funkce nabývá v intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ vesměs kladných hodnot. Pro $t = 0$ je $\sin t\,(1 + \cos t) = 0$, pro $t = \frac{\pi}{3}$ je $\sin t\,(1 + \cos t) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ a pro $t = \frac{\pi}{2}$ je funkce $\sin t\,(1 + \cos t) = 1$.
Platí tedy věta 13:

Věta 13. *Funkce* $f(x) = \sin x\,(1 + \cos x)$ *má v bodě* $x = \frac{\pi}{3}$ *maximum vzhledem k intervalu* $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

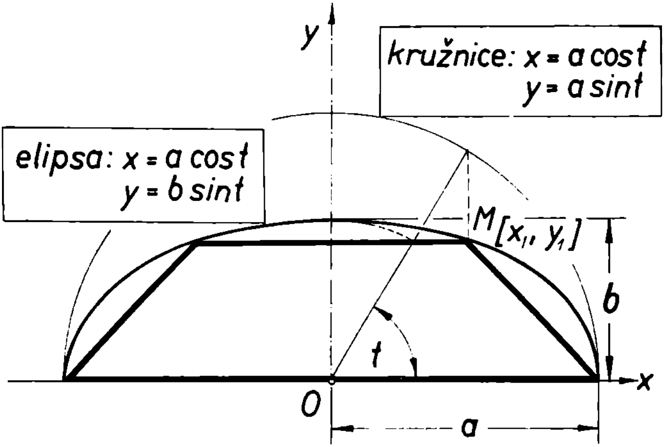
Příklad 36. (Obr. 44.) *Do obrazce omezeného polovinou elipsy a její hlavní osou vepište rovnoramenný lichoběžník největšího obsahu.*

Vyjádříme horní polovinu elipsy v parametrickém tvaru

$$x = a.\cos t, \quad y = b.\sin t,$$

kde parametr t probíhá interval $< 0, \pi >$.
Obsah hledaného lichoběžníka je (při označení podle obr. 44)

$$S = (a + x_1)\, y_1.$$



Obr. 44.

Jelikož x_1, y_1 jsou souřadnice bodu M, který leží na elipse, musí platit

$$x_1 = a.\cos t, \quad y_1 = b.\sin t,$$

kde velikost úhlu t vyhovuje v tomto případě nerovnosti $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

Obsah lichoběžníka můžeme napsat ve tvaru

$$S = ab.\sin t\,(1 + \cos t).$$

Hledáme tedy maximum funkce

$$f(t) = \sin t\,(1 + \cos t)$$

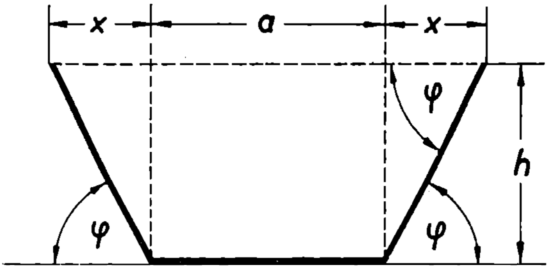
(neboť a, b jsou dané poloosy elipsy), které podle věty 13 nastane pro $t = \frac{\pi}{3}$. Je tedy

$$x_1 = a \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a}{2}, \qquad y_1 = b \sin \frac{\pi}{3} = b \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$S_{max} = (a + x_1) y_1 = \frac{3}{4} ab\sqrt{3}.$$

V případě $a = b = r$, kdy polovina elipsy přejde v půlkružnici o poloměru r, je hledaný vepsaný lichoběžník maximálního obsahu polovina pravidelného šestiúhelníka o obsahu $S_{max} = \frac{3}{4} \cdot r^2\sqrt{3}$.

Příklad 37. (Obr. 45.) *Ze tří desek o téže šířce a se má zhotovit vodní náhon o lichoběžníkovém průřezu. Určete úhel, který budou svírat boční stěny se dnem tak, aby průtočný profil měl maximální obsah.*



Obr. 45.

Při označení zavedeném na obr. 45 je obsah profilu S

$$S = (a + x) \cdot h,$$

kde

$$h = a \sin \varphi, \quad x = a \cos \varphi.$$

Dosadíme-li odtud, vychází

$$S = a^2 \sin \varphi . (1 + \cos \varphi),$$

kde ovšem je

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Je vidět, že řešení úlohy spočívá podobně jako v předcházejícím příkladu v nalezení maxima funkce

$$f(\varphi) = \sin \varphi \, (1 + \cos \varphi).$$

Podle věty 13 má tato funkce maximum vzhledem k intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pro

$$\varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Maximální obsah profilu je

$$S_{max} = \frac{3}{4} \cdot a^2\sqrt{3}.$$

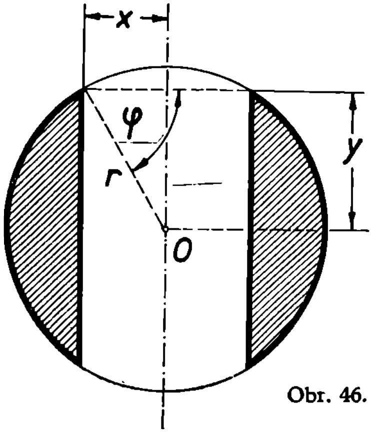
Příklad 38. (Obr. 46.) *Z koule o poloměru r se má odstranit část omezená rotační válcovou plochou, jejíž osa prochází středem koule. Určete poloměr tohoto válce tak, aby povrch tělesa vzniklého z koule po odstranění vnitřní části omezené rotační válcovou plochou byl co největší.*

Označíme-li x poloměr vyvrtaného válce a y polovinu jeho výšky, pak povrch uvažovaného tělesa je

$$S = 4\,\pi r^2 - 4\,\pi r\,(r - y) + 4\,\pi\,xy.$$

Při označení podle obr. 46 je

$$x = r\,.\cos\varphi, \qquad y = r\,.\sin\varphi,$$



Obr. 46.

takže povrch uvažovaného tělesa lze vyjádřit vztahem

$$S = 4\,\pi r^2.\sin\varphi\,(1 + \cos\varphi).$$

Jelikož tato funkce argumentu φ má zřejmě v naší úloze definiční obor $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, má úloha jediné řešení, a to

$$\varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Hledaný poloměr kruhového otvoru bude

$$x = \frac{r}{2}$$

a povrch uvažovaného tělesa

$$S_{max} = 3\pi r^2\sqrt{3}.$$

Cvičení

1. Do rotačního kužele o poloměru r a výšce h vepište rotační válec největšího objemu. $\left[x = \frac{2}{3}\, r,\ v = \frac{1}{3}\, h\right]$
2. Do koule o poloměru r vepište rotační kužel o největším plášti. $\left[\text{výška } h = \frac{4}{3}\, r\right]$
3. Určete výšku rotačního kužele, který má při dané straně s největší objem. $\left[\text{výška } h = \frac{s\sqrt{3}}{3}\right]$
4. Z parabolické úseče vytvořené parabolou $2py = x^2$ a přímkou $y = h$ vyřízněte obdélník největšího obsahu. $\left[\text{výška obdélníka } \frac{2}{3}\, h\right]$
5. Určete rozměry kulové úseče, která má při daném obsahu vrchlíku $18\,\pi$ největší objem. [polokoule $r = 3$]
6. Určete rozměry rotačního válce, který má při daném povrchu maximální objem. [rovnostranný válec]