4. kapitola

EXTRÉMY NĚKTERÝCH FUNKCÍ LOMENÝCH

V této kapitole rozřešíme několik úloh, v nichž v podstatě ponejvíce půjde o určení extrémů funkce tvaru $y = k\left(x + \frac{A}{x}\right)$. Proto nejprve najdeme extrémy této funkce v obecném případě (pro různé koeficienty k, A) a při řešení jednotlivých úloh využijeme věty 7, která je uvedena později, a do které shrneme výsledky zkoumání uvedené funkce.

Pro naše úvahy bude užitečná nerovnost

$$|a + b| \geq 2\sqrt{ab}, \quad (ab \geq 0) \tag{1}$$

jejíž správnost si ověříme.

Předpokládejme nejprve, že nerovnost (1) platí. Předpoklad $ab \geq 0$, uvedený v nerovnosti (1) je ovšem nutný k tomu, aby její pravá strana měla (v oboru reálných čísel) smysl.

Umocněním dostáváme z nerovnosti (1) nerovnost

$$(a + b)^2 \geq 4\,ab,$$

tj. nerovnost

$$a^2 + 2\,ab + b^2 \geq 4\,ab,$$

neboli

$$a^2 - 2\,ab + b^2 \geq 0,$$

kterou lze zapsat ve tvaru

$$(a - b)^2 \geq 0. \tag{2}$$

Platnost nerovnosti (2) je zřejmá; právě tak je zřejmé, že rovnost

$$(a - b)^2 = 0$$

nastává právě, když $a = b$.

Protože v případě $ab \geqq 0$ plyne také obráceně ze vztahu (2) vztah (1), je správnost nerovnosti (1) ověřena a navíc je zřejmé, že rovnost

$$|a + b| = 2\sqrt{ab}$$

dostaneme právě tehdy, když $a = b$.

Všimněme si ještě předpokladu $ab \geqq 0$, který jsme museli učinit. Případ $ab = 0$ není zajímavý a nerovnost $ab > 0$ platí ve dvojím případě:

a) Je-li $a > 0$ i $b > 0$,
b) je-li $a < 0$ i $b < 0$.

Označíme-li pro druhý případ $-a = c$, $-b = d$, nabývá nerovnost (1) tvaru

$$(-c - d) \geqq 2\sqrt{cd},$$

tj.

$$-|-c - d| \geqq 2\sqrt{cd}$$

čili

$$c + d \geqq 2\sqrt{cd}. \tag{3}$$

Dosazením za $c = -a$, $d = -b$ dostaneme

$$a + b \leqq -2\sqrt{ab}.$$

Můžeme tedy shrnout:
Jsou-li a, b libovolná kladná čísla, je

$$a + b \geqq 2\sqrt{ab}, \tag{4}$$

přičemž rovnost nastává právě v případě $a = b$; jsou-li a, b libovolná záporná čísla, je

$$a + b \leqq -2\sqrt{ab}, \tag{5}$$

přičemž rovnost nastává opět právě jen v případě $a = b$.

Těchto závěrů nyní použijeme k vyšetřování extrémů funkce $f(x) = x + \frac{A}{x}$ $(A > 0)$ nejdříve v intervalu $(0, \infty)$.

Nechť $A > 0$. Položme $a = x, b = \frac{A}{x}$. Utvořme funkci

$$f(x) = x + \frac{A}{x}.$$

Tato funkce má v intervalu $(0, \infty)$ podle nerovnosti (4) minimum právě, když

$$x = \frac{A}{x},$$

tj. pro

$$x = \sqrt{A}.\text{*)}$$

Jelikož součet $x + \frac{A}{x}$ zřejmě může nabývat v $(0, \infty)$ libovolně velkých hodnot, nemá funkce f v tomto intervalu maximum.

V intervalu $(-\infty, 0)$ je $x < 0$ a $\frac{A}{x} < 0$, takže funkce f má v tomto intervalu podle nerovnosti (5) maximum pro

$$x = \frac{A}{x},$$

*) Řešení $x = -\sqrt{A}$ rovnice $x = \frac{A}{x}$ tu nepřichází v úvahu, neboť předpokládáme $x > 0$.

tj. pro

$$x = -\sqrt{A}.$$

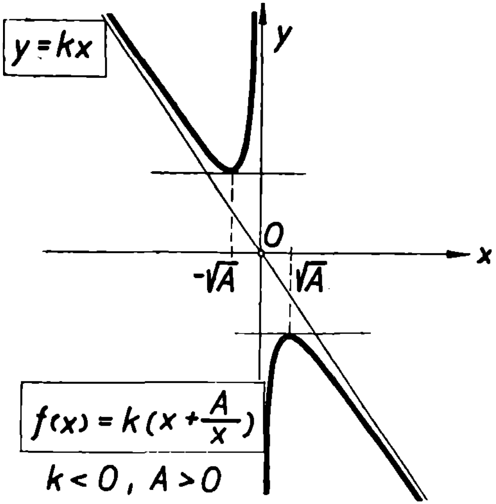
Jelikož součet $x + \frac{A}{x}$ zřejmě může nabývat v $(-\infty, 0)$ libovolně malých záporných hodnot (tj. v absolutní hodnotě libovolně velkých hodnot), nemá funkce f v tomto intervalu minimum.

K odvození věty 7, která konečně hovoří o extrémech funkce $y = k\left(x + \frac{A}{x}\right)$, stačí již jen použít věty 3 (str. 14).

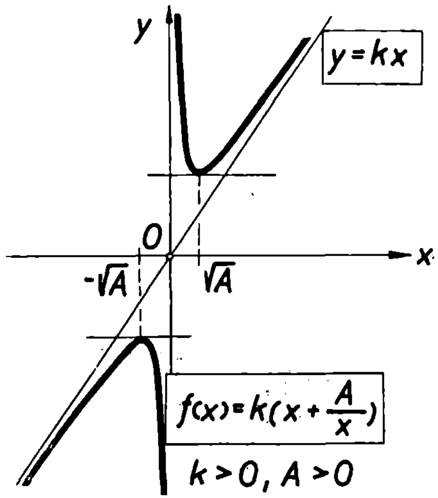
Věta 7. *Je-li $k > 0$, má funkce $y = k\left(x + \frac{A}{x}\right)$ $(A > 0)$ v intervalu $(-\infty, 0)$ maximum v bodě $x = -\sqrt{A}$ a nemá v tomto intervalu minimum. V intervalu $(0, \infty)$ nemá maximum a má minimum v bodě $x = \sqrt{A}$.*

Je-li $k < 0$, má funkce $y = k\left(x + \frac{A}{x}\right)$ $(A > 0)$ v intervalu $(-\infty, 0)$ minimum v bodě $-\sqrt{A}$ a nemá v tomto intervalu maximum. V intervalu $(0, \infty)$ nemá minimum a má maximum v bodě $\sqrt{A}$.

Na obrázcích 27 a 28 jsou grafy funkce $y = k\left(x + \frac{A}{x}\right)$ pro případy $k < 0$, $A > 0$ a $k > 0$, $A > 0$. Přesvědčte se sami, že funkce $y = k\left(x + \frac{A}{x}\right)$ nemá v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ extrémy, je-li A záporné.

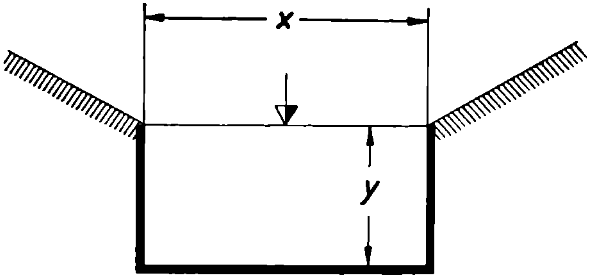


Obr. 27.



Obr. 28.

Příklad 21. (Obr. 29.) *Určete rozměry vodního náhonu, jehož průtočný profil je obdélník o daném obsahu S tak, aby jeho omočený obvod byl co nejmenší.*



Obr. 29.

Obsah profilu je

$$S = xy$$

a omočený obvod má délku

$$O = x + 2y.$$

Vyloučením y z těchto rovnic obdržíme pro omočený obvod vztah

$$O = x + \frac{2S}{x}.$$

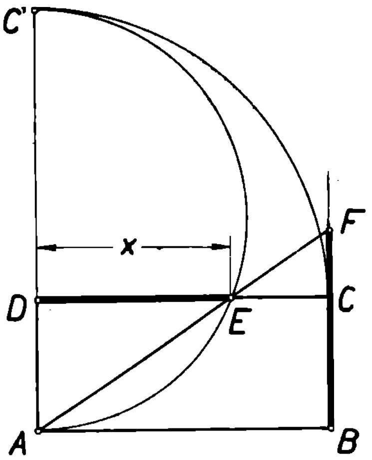
Podle věty 7 má tato funkce minimum pro $x = \sqrt{2S}$. Pro druhý rozměr y vychází $y = \frac{1}{2}\sqrt{2S}$.
Rozměry náhonu navrhneme tedy v poměru

$$x : y = 2 : 1.$$

Přitom omočený obvod bude

$$O_{min} = 2\sqrt{2S}.$$

Příklad 22. (Obr. 30.) *Vrcholem A daného obdélníka $ABCD$ veďte polopřímku, která stranu CD seče v bodě E a prodlouženou stranu BC protíná v bodě F tak, aby součet úseček $DE + BF$ byl nejmenší.*



Obr. 30.

Označíme-li

$$AB = CD = a;\ AD = BC = b;\ DE = x;\ CF = z,$$

pak

$$DE + BF = x + b + z.$$

Z podobnosti trojúhelníků $\triangle\, AED$ a $\triangle\, FEC$ vyplývá vztah

$$x : b = (a - x) : z;$$

z toho

$$z = \frac{b.(a - x)}{x},$$

takže

$$DE + BF = x + b + \frac{b.(a - x)}{x} = x + \frac{ab}{x}.$$

Podle věty 7 nabývá tato funkce své nejmenší hodnoty v čísle

$$x = \sqrt{ab},$$

z čehož

$$(DE + BF)_{min} = 2\sqrt{ab}.$$

Tím je úloha rozřešena a úsečka x se dá snadno sestrojit podle Euklidovy věty. (Viz obrázek!)

Příklad 23. *Olověný akumulátor má elektromotorické napětí U [V] a vnitřní odpor R [Ω]. Jaký nutno zapojit vnější odpor x, abychom získali největší výkon ve vnějším proudovém okruhu?*

Podle Jouleova zákona je výkon N měřený ve Wattech ve vnějším okruhu dán vztahem

$$N = x.I^2 \quad [W],$$

kde x je hledaný odpor a proud I je vyjádřen podle Ohmova zákona

$$I = \frac{U}{x + R} \quad [A].$$

Výkon je tudíž vyjádřen

$$N = \frac{U^2 . x}{(x + R)^2} = \frac{U^2}{\frac{(x + R)^2}{x}}.$$

Výkon bude největší, když výraz ve jmenovateli bude nejmenší (U je dáno). Hledejme tedy minimum funkce

$$f(x) = \frac{(x + R)^2}{x}$$

čili

$$f(x) = x + \frac{R^2}{x} + 2R$$

v intervalu $(0, \infty)$.

Jelikož $2R$ je konstanta, stačí zkoumat jen funkci

$$f(x) = x + \frac{R^2}{x}.$$

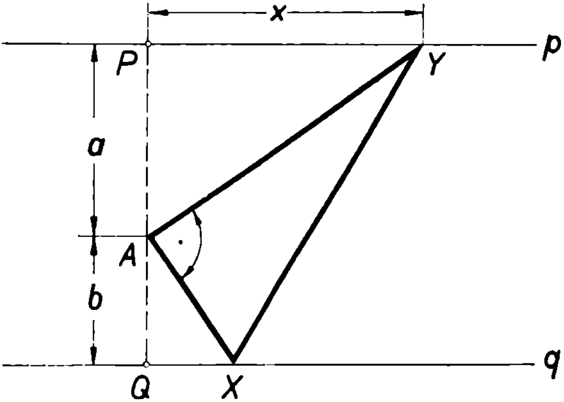
Podle věty 7 má tato funkce v intervalu $(0, \infty)$ minimum pro $x = R$.

Výkon N bude největší, když vnější odpor bude roven vnitřnímu. V tom případě bude

$$N_{max} = \frac{U^2}{4R}.$$

Řešení dalších úloh spočívá v stanovení lokálního minima obecnější funkce $f(x) = k\left(x + \frac{A}{x}\right)$, kde výrazy k a A jsou kladné konstanty.

Příklad 24. (Obr. 31.) *Uvnitř pásu roviny omezeného rovnoběžkami p, q leží bod A, jehož vzdálenost od přímky p je a, od přímky q je b. Určete pravoúhlý trojúhelník AXY s přeponou XY tak, aby jeho vrchol X byl na přímce q a Y na přímce p, a aby jeho obsah byl minimální.*



Obr. 31.

Obsah S hledaného trojúhelníka AXY je

$$S = \frac{AX . AY}{2}.$$

Z podobnosti trojúhelníků $\triangle\ AQX$ a $\triangle\ YPA$ vyplývá

$$AX = \frac{b . AY}{x},$$

kde $x = PY$. Dále je podle Pythagorovy věty

$$AY = \sqrt{x^2 + a^2},$$

takže

$$S = \frac{bAY^2}{2x} = \frac{b}{2x}(x^2 + a^2)$$

čili

$$S = \frac{b}{2}\left(x + \frac{a^2}{x}\right).$$

Poněvadž $\frac{b}{2} > 0$, má funkce S v intervalu $(0, \infty)$ minimum pro

$$x = a.$$

Je-li $x = a$, je

$$QX = b,$$

čímž je určen zbývající vrchol trojúhelníka. Pro obsah nalezeného trojúhelníka vychází

$$S_{min} = a.b.$$

Trojúhelník AXY bude mít minimální obsah, když osa pravého úhlu u vrcholu A bude rovnoběžná s přímkami p, q.

Příklad 25. (Obr. 32.) *Jaké rozměry má mít profil okna složený z obdélníka a přilehlého půlkruhu, aby při daném plošném obsahu S byl minimální obvod?*

Zavedeme-li označení podle obr. 32, je obvod profilu

$$O = 2x + 2y + \pi x$$

a jeho obsah je

$$S = 2xy + \tfrac{1}{2}\pi x^2.$$

Vyloučením proměnné y z výrazu pro obvod obdržíme

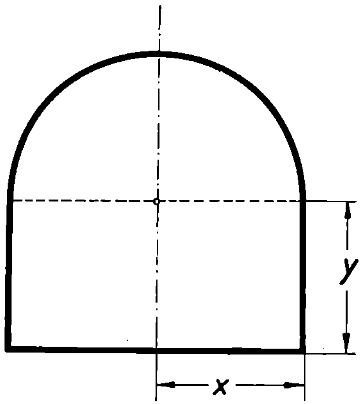
$$O = 2x + \tfrac{1}{2}\pi x + \frac{S}{x}$$

čili

$$O = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) x + \frac{S}{x}.$$

Vytknutím dvojčlenu při x upravíme funkční předpis na tvar

$$O = \frac{4 + \pi}{2} \left(x + \frac{\frac{2S}{4 + \pi}}{x} \right).$$



Obr. 32.

Dostáváme opět funkci typu $f(x) = k\left(x + \frac{A}{x}\right)$, která nabývá svého minima v oboru $(0, \infty)$ pro

$$x = \sqrt{\frac{2S}{4 + \pi}}.$$

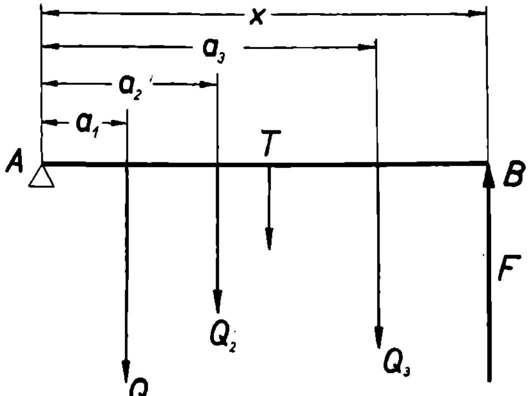
Z podmínky, že $y > 0$, vyplývá omezení definičního oboru funkce na interval $\left(0, \sqrt{\frac{2S}{\pi}}\right)$. Číslo $\sqrt{\frac{2S}{4+\pi}}$ je tedy z tohoto intervalu, takže řeší naši úlohu. Minimální obvod je

$$O_{min} = \sqrt{2S(4+\pi)}.$$

Druhý rozměr okna, y, vychází přitom

$$y = \sqrt{\frac{2S}{4+\pi}} = x.$$

Příklad 26. (Obr. 33.) *Na vodorovné jednozvratné páce visí ve vzdálenosti a_1, a_2, a_3 od osy páky postupně břemena Q_1, Q_2, Q_3. Hmotnost páky připadající na jednotkovou délku páky je q. Páka se udržuje v rovnováze v bodě B svisle vzhůru působící silou F. Určete délku páky tak, aby síla F byla nejmenší.*



Obr. 33.

Podle momentové věty, která říká, že moment výslednice se rovná algebraickému součtu momentů jednotlivých složek, platí

$$F.x = a_1Q_1 + a_2Q_2 + a_3Q_3 + qx.\frac{x}{2},$$

z čehož

$$F = \tfrac{1}{2}\,qx + \frac{a_1Q_1 + a_2Q_2 + a_3Q_3}{x},$$

kde x je hledaná délka páky. Vytkneme-li konstantu $\frac{q}{2}$, obdržíme

$$F = \frac{q}{2}\left[x + \frac{\frac{2(a_1Q_1 + a_2Q_2 + a_3Q_3)}{q}}{x}\right].$$

Je vidět, že F je opět funkce typu $k\left(x + \frac{A}{x}\right)$. V intervalu $(0, \infty)$ má minimum pro

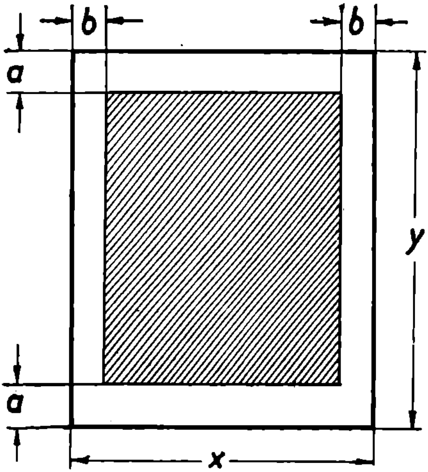
$$x = \sqrt{\frac{2\,(a_1Q_1 + a_2Q_2 + a_3Q_3)}{q}}.$$

Pro toto x vychází minimální síla

$$F_{min} = \sqrt{2q\,(a_1Q_1 + a_2Q_2 + a_3Q_3)}.$$

Obdobně by se řešila úloha, kdyby byl na páce zavěšen libovolný počet břemen Q.

Příklad 27. (Obr. 34.) *Na stránce knihy má zaujímat text obsah S cm². Horní a dolní okraj stránky má mít šířku a cm, pravý i levý okraj b cm. Jaké mají být nejvýhodnější rozměry stránky, aby se na vytištění knihy spotřebovalo co nejméně papíru?*



Obr. 34.

Označíme-li šířku stránky x, výšku stránky y, pak obsah textu na jedné stránce je

$$S = (x - 2b)(y - 2a);$$

odtud vyplývá

$$y = \frac{S}{x - 2b} + 2a.$$

Obsah celé stránky je

$$P = xy = x\left(\frac{S}{x - 2b} + 2a\right).$$

Na vytištění knihy se spotřebuje nejméně papíru tehdy, když obsah P bude za uvedených předpokladů minimální. Položíme-li $x - 2b = z$, je

$$P = (z + 2b)\left(\frac{S}{z} + 2a\right) = S + \frac{2bS}{z} + 2az + 4ab.$$

Funkce P má minimum, má-li minimum funkce

$$f(z) = 2az + \frac{2bS}{z} = 2a\left(z + \frac{\frac{bS}{a}}{z}\right).$$

Podle věty 7 má tato funkce minimum pro

$$z = \sqrt{\frac{bS}{a}}.$$

Pak rozměry stránky jsou

$$x = 2b + \sqrt{\frac{bS}{a}}, \qquad y = 2a + \sqrt{\frac{aS}{b}}.$$

Poznámka. Z významu argumentu z odvoďte sami definiční obor funkce f a ověřte si, že číslo $\sqrt{\frac{bS}{a}}$ je jeho prvkem.

Závěrem této kapitoly si odvodíme ještě lokální minimum funkce $g(x) = \frac{x^2}{x - f}$, kde f je kladná konstanta. Z odvozeného výsledku pak vyslovíme řešení příkladu č. 28.

Pro naše úvahy bude potřebné ověřit si nejdříve správnost nerovnosti

$$x + y \geqq \frac{4xy}{x + y}, \tag{6}$$

kde $x + y > 0$. Snadno se přesvědčíme, že rovnost nastane jen v tom jediném případě, když $x = y$.

Důkaz. Po vynásobení nerovnosti dvojčlenem $x + y$ obdržíme

$$(x + y)^2 \geqq 4xy$$

neboli

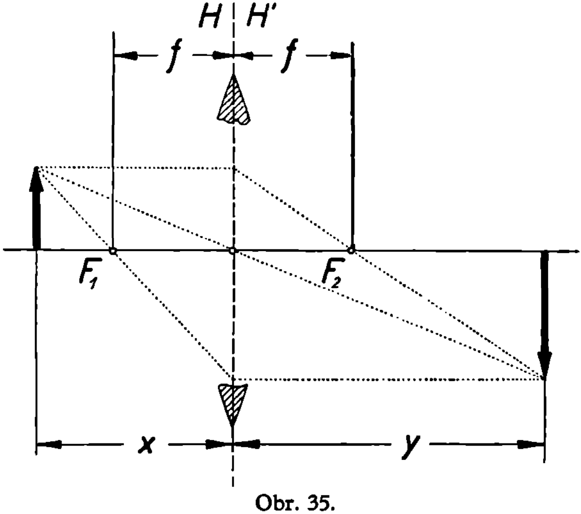
$$x^2 - 2xy + y^2 \geqq 0$$

čili

$$(x - y)^2 \geqq 0. \tag{7}$$

Dospěli jsme tedy k témuž závěru jako u nerovnosti (1) (str. 59). Protože v případě $x + y > 0$ vyplývá též obráceně ze vztahu (7) vztah (6), je správnost nerovnosti ověřena.

Příklad 28. (Obr. 35.) *Jak daleko je třeba umístit předmět od tenké čočky (spojky) o ohniskové délce f, aby vzdálenost jeho skutečného obrazu od předmětu byla nejkratší?*



Obr. 35.

Vzdálenost předmětu od obrazu označme

$$l = x + y,$$

kde x je vzdálenost předmětu od čočky a y je vzdálenost čočky od obrazu. Z optiky je známo, že pro tenkou čočku platí vztah

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f} \tag{8}$$

čili

$$y = \frac{x \cdot f}{x - f}.$$

Hledáme tedy lokální minimum funkce

$$l = g(x) = x + y = x + \frac{x \cdot f}{x - f}$$

neboli

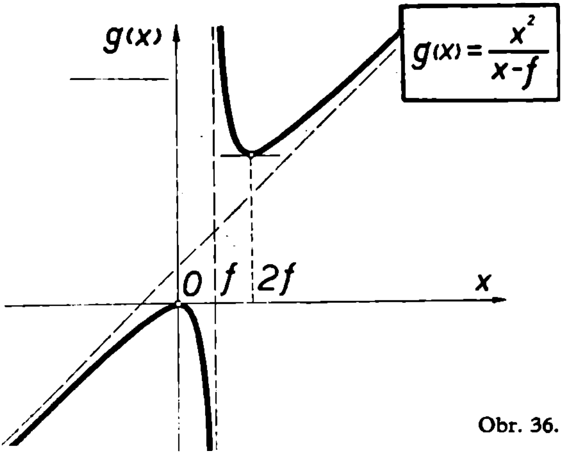
$$g(x) = \frac{x^2}{x - f},$$

která je obecně definována v intervalech $(-\infty, f)$, (f, ∞) (viz obr. 36).

Poznámka. Pro naši úlohu má však význam jen interval (f, ∞), ve kterém nabývá funkce $g(x)$ kladných hodnot. Pro tyto hodnoty $x > f$ vytváří totiž čočka skutečný obraz, který můžeme zachytit na stínítku.

Nyní stanovíme lokální minimum funkce $g(x)$ v intervalu (f, ∞). Z rovnice (8) vypočteme ohniskovou délku f:

$$f = \frac{xy}{x + y}.$$



Obr. 36.

Užijeme-li nerovnost (6), obdržíme

$$x + y \geqq 4f.$$

Za předpokladu $0 < f < x$ bude součet $x + y$ nejmenší, když nastane rovnost, to znamená, když $x = y$.
Potom

$$x = 2f \quad \text{rovněž} \quad y = 2f$$

a pak

$$l_{min.} = 4f.$$

Cvičení

1. Rozložte dané kladné číslo A na dva činitele x, y tak, aby jejich součet byl minimální. $[x = y = \sqrt{A}]$
2. Najděte minimum funkce $y = \dfrac{4 + \log^2 x}{\log x}$. $[\log x = 2]$

3. Rychlost šíření vlnění ve vodě je úměrna vztahu $\sqrt{\frac{\lambda}{a} + \frac{a}{\lambda}}$, kde a je konstanta. Určete vlnovou délku λ tak, aby rychlost šíření byla minimální. $[\lambda = a]$

4. Celkový výkon W vyzářený každým kilometrem elektrického vedení je $W = I^2 R + \frac{t^2}{R} + b$, kde I je proud v A, R je odpor v Ω na 1 km délky, t, b jsou veličiny nezávislé na I a R. Jaký odpor vodiče musíme zvolit, aby tento ztrátový výkon daný uvedeným vztahem byl co nejmenší? $\left[R = \frac{t}{I}\right]$

5. Do dané elipsy o poloosách a, b vepište rovnoramenný trojúhelník s vrcholem v koncovém bodě hlavní osy tak, aby obsah trojúhelníka byl maximální! $\left[\text{Výška trojúhelníka } \frac{3}{2} a\right]$