Úlohy o maximech a minimech funkcí

3. kapitola. Extrémy goniometrických funkcí

In: Jaromír Hroník (author): Úlohy o maximech a minimech funkcí. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1967. pp. 46–58.

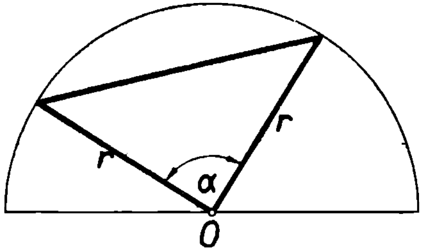
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403605

3. kapitola

EXTRÉMY GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ

V této kapitole se budeme zabývat úlohami, jejichž řešení spočívá v podstatě v určení extrémů goniometrických funkcí. Předpokládáme, že čtenáři vědí, že funkce $\sin x$ nabývá lokálního maxima v bodech $x = (4k + 1)\frac{\pi}{2}$, kde k je číslo celé a lokálního minima nabývá v bodech $x = (4k - 1)\frac{\pi}{2}$ (k celé). Funkce $\cos x$ nabývá lokálního maxima v bodech $x = 2k\pi$ (k celé) a lokálního minima v bodech $x = (2k + 1)\pi$ (k celé). Tyto známé vlastnosti funkcí sinus a kosinus, jakož i věty 1 a 2 (str. 12—14) zcela postačí k řešení následujících příkladů této kapitoly.

Příklad 14. (Obr. 21.) *Do půlkruhu o poloměru r vepište trojúhelník s vrcholem ve středu kružnice tak, aby jeho obsah byl maximální.*



Obr. 21.

Obsah trojúhelníka je

$$S = \tfrac{1}{2}\, r^2 \sin \alpha.$$

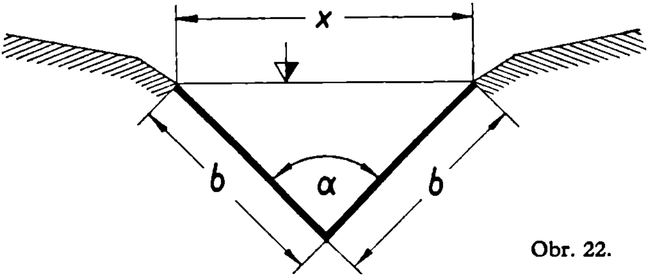
Poněvadž poloměr r je konstantní, závisí obsah trojúhelníka jen na velikosti středového úhlu α, který se může měnit v intervalu

$$0 < \alpha < \pi.$$

Jelikož funkční hodnota $\sin \alpha$ je v uvažovaném intervalu největší pro $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, je hledaný trojúhelník pravoúhlý.

Jeho obsah bude

$$S_{max} = \tfrac{1}{2}\, r^2.$$



Obr. 22.

Příklad 15. (Obr. 22.) *Určete rozměry a úhel stěn vodního příkopu, jehož profil má tvar rovnoramenného trojúhelníka o předepsaném obsahu S tak, aby součet bočních stran byl minimální* (tzv. nejmenší omočený obvod).

Poznámka. Takovým profilům, které mají při konstantním plošném obsahu nejmenší omočený obvod, říkáme v hydraulice *hydraulicky nejvýhodnější profily.*
Obsah trojúhelníka je

$$S = \tfrac{1}{2}\, b^2 \sin \alpha,$$

odkud pro stranu b vyplývá

$$b = \sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}}$$

a pro omočený obvod dostáváme

$$O = 2b = 2\sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}}.$$

Funkce $O = 2\sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}}$ nabývá minima, když zlomek $\frac{2S}{\sin\alpha}$ je minimální. To — při konstantním čitateli $2S$ — nastane, bude-li jmenovatel $\sin\alpha$ roven jedné, tj. pro $\alpha = \frac{\pi}{2}$. (Musí totiž zřejmě být $0 < \alpha < \pi$.) Tím je úloha rozřešena a uvažovaný profil bude tvaru pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka. Pro šířku příkopu x vyjde

$$x = 2\sqrt{S}$$

a omočený obvod má délku

$$O_{min} = 2\sqrt{2S}.$$

Příklad 16. (Obr. 23.) *Který z obdélníků má při dané délce úhlopříčky u největší* a) *obsah* b) *obvod*?

a) Označíme-li strany obdélníka a, b, pak platí (při označení podle obr. 23)

$$a = u.\cos\varphi, \quad b = u.\sin\varphi,$$

kde úhel φ splňuje nerovnost

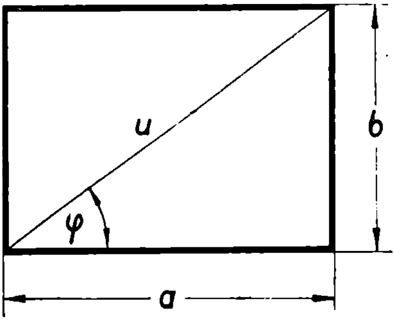
$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Obsah obdélníku je

$$S = a \, . \, b = u^2 \, . \sin \varphi \cos \varphi .$$

Poněvadž $\sin \varphi \, . \cos \varphi = \frac{1}{2} \, . \sin 2\varphi$, upravíme obsah obdélníka na tvar

$$S = \tfrac{1}{2} \, . \, u^2 \, . \sin 2\varphi .$$



Obr. 23.

Obsah obdélníka bude největší, když funkce sin 2φ bude maximální.
Položme tedy

$$\sin 2\varphi = 1,$$

čili

$$\varphi = \frac{\pi}{4} .$$

Hledaný obdélník bude čtvercem o obsahu

$$S_{max} = \tfrac{1}{2} \, . \, u^2 .$$

b) Obvod obdélníka je

$$O = 2\,(a + b) = 2u\,(\cos\varphi + \sin\varphi) =$$

$$= 2u\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \sin\varphi\right].$$

Výraz v lomené závorce upravíme podle vzorce

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\,.\,\cos\frac{\alpha - \beta}{2},$$

takže pro obvod obdržíme

$$O = 2u\left[2\sin\frac{\pi}{4}\,.\,\cos\frac{\pi - 4\varphi}{4}\right].$$

Jelikož hodnota $\sin\dfrac{\pi}{4}$ je konstantní, nastane maximum pro

$$\cos\frac{\pi - 4\varphi}{4} = 1,$$

čili pro

$$\frac{\pi - 4\varphi}{4} = 0,$$

tj. pro

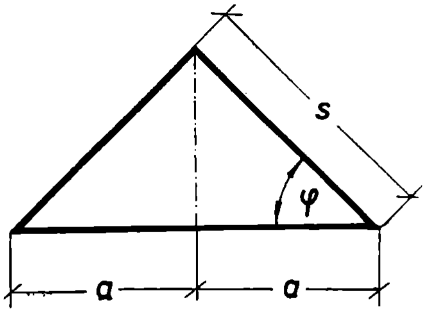
$$\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Pak

$$O_{max} = 2u\sqrt{2}.$$

Výsledný obrazec je opět čtverec.

Příklad 17. (Obr. 24.) *Je dána šířka štítu domu 2a. Jakou odchylku φ mají mít střešní roviny od vodorovné roviny, aby dešťové kapky stékaly od hřebene střechy k okapu v nejkratším čase.*



Obr. 24.

(Poznámka. Nebudeme hledět na tření a odpor vzduchu.)

Jak známo, je zrychlení tělesa pohybujícího se po nakloněné rovině dáno součinem $g \sin \varphi$, kde $g \left[\frac{m}{s^2}\right]$ je gravitační zrychlení a φ velikost úhlu, který svírá nakloněná rovina s rovinou vodorovnou. Pro dráhu s, kterou urazí těleso při tomto pohybu za dobu t, platí

$$s = \tfrac{1}{2} g \sin \varphi . t^2.$$

Odtud pro dobu t, potřebnou k vykonání dráhy s vychází

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g \sin\varphi}} = \sqrt{\frac{2a}{g \sin \varphi . \cos \varphi}},$$

neboť při našem označení je $s = \dfrac{a}{\cos\varphi}$, kde $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$.

Zavedeme-li ještě do posledního výrazu funkci dvojnásobného úhlu, vychází pro dobu t, která má být minimální,

$$t = \sqrt{\frac{4a}{g \sin 2\varphi}}.$$

Podobně, jako v předešlém příkladě, nastává tu minimum pro $\sin 2\varphi = 1$, tj. pro

$$\varphi = \frac{\pi}{4},$$

pak

$$t_{min} = 2\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Jak je vidět, nezávisí volba nejvhodnější odchylky na šířce štítu.

Příklad 18. (Obr. 25.) *Z plechu tvaru kruhové výseče o poloměru r a středovém úhlu $2\alpha < \pi$ vykrojte souměrně dle osy výseče obdélník tak, aby odpad materiálu byl minimální.*

Zaveďme označení r, x, y, z, φ, α podle obr. 25. Pak řešení úlohy spočívá v určení velikosti úhlu φ ($0 < \varphi < \alpha$), při kterém bude mít hledaný obdélník maximální obsah. Při našem označení je

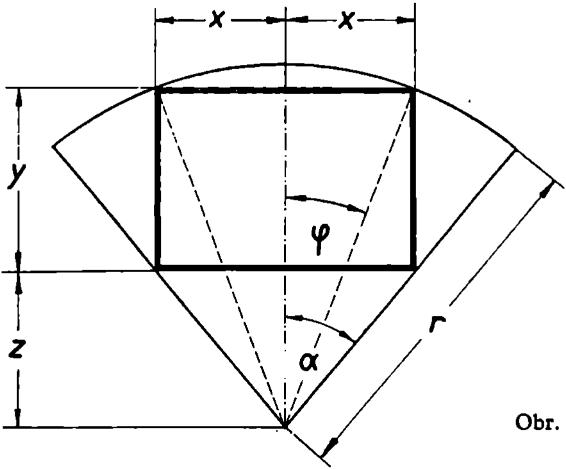
$$x = r \sin\varphi, \quad z + y = r\cos\varphi \text{ a } z = x \operatorname{cotg}\alpha,$$

odkud

$$y = r\cos\varphi - z = r(\cos\varphi - \sin\varphi \operatorname{cotg}\alpha).$$

Pro obsah $S = 2xy$ vyšetřovaného obdélníka tedy máme

$$S = 2r^2 . \sin\varphi . \left(\cos\varphi - \sin\varphi \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$$



Obr. 25.

čili

$$S = \frac{2r^2}{\sin\alpha} \sin\varphi \sin(\alpha - \varphi).$$

Užitím vzorce

$$\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 = \tfrac{1}{2} [\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \cos(\alpha_1 + \alpha_2)]$$

lze výraz pro S ještě upravit na tvar

$$S = \frac{r^2}{\sin\alpha} [\cos(2\varphi - \alpha) - \cos\alpha].$$

Poněvadž α a r jsou dané konstanty, bude obsah obdélníka největší, když funkce $\cos(2\varphi - \alpha)$ nabude největší hodnoty.

Položíme tedy

$$\cos(2\varphi - \alpha) = 1,$$

odkud

$$2\varphi - \alpha = 2k\pi \quad (k \text{ celé}).$$

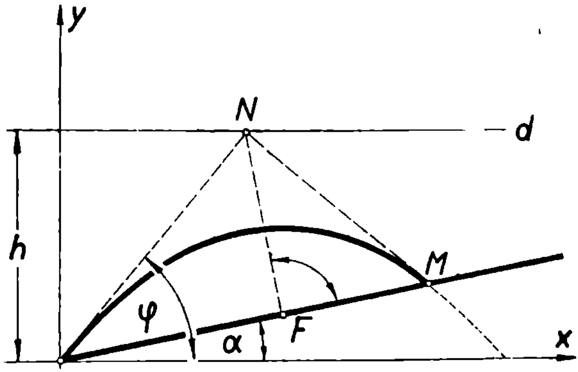
Vzhledem k podmínkám $0 < 2a < \pi$, $0 < \varphi < a$ má předešlá rovnice jediné řešení

$$\varphi = \frac{a}{2}.$$

Obsah hledaného obdélníka je

$$S_{max} = r^2 \frac{1 - \cos a}{\sin a} = r^2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}.$$

Příklad 19. (Obr. 26.) *Z bodu O je vymrštěno pod úhlem φ těleso počáteční rychlostí v_0. Určete elevační úhel φ tak, aby těleso dopadlo co nejdále od bodu O.*



Obr. 26.

Úlohu budeme řešit za předpokladu, že dráha tělesa leží ve svislé rovině (při střelbě tomu tak není) a že rovina, na kterou těleso dopadne, je kolmá k rovině dráhy, ale nikoli nutně vodorovná. Velikost její odchylky od vodorovné roviny označme α. Na obr. 26 je situace znázorněna v řezu svislou rovinou. Rovina dopadu je znázorněna přímkou OM. Vodorovná a svislá přímka procházejí bodem O jsou na obr. 26 označeny po řadě písmeny x a y a můžeme je dále považovat za osy souřadného systému. Poloha vymrštěného tělesa v okamžiku t je určena souřadnicemi

$$x = v_0\, t \cos\varphi, \quad y = v_0\, t \sin\varphi - \tfrac{1}{2} g t^2,$$

kde $g \left[\frac{m}{s^2}\right]$ značí gravitační zrychlení. Vyloučením proměnné t z těchto rovnic dostáváme rovnici křivky, po které se těleso pohybuje:

$$y = x \,.\, \mathrm{tg}\,\varphi - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \,.\, \cos^2\varphi}\,. \tag{1}$$

Vidíme, že je to rovnice paraboly procházející počátkem, jejíž osa je rovnoběžná s osou y. Stanovme nyní souřadnice bodu dopadu M. Bod M leží — v našem znázornění — na parabole a na přímce, která nám znázorňuje rovinu dopadu a má rovnici

$$y = x \,.\, \mathrm{tg}\,\alpha.$$

Dosadíme-li odtud do rovnice (1), dostáváme po úpravě rovnici

$$x\left(\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\varphi + \frac{g x}{2\, v_0^2 \,.\, \cos^2\varphi}\right) = 0.$$

Jeden kořen této rovnice je $x_1 = 0$, což je souřadnice bodu O výchozího bodu dráhy vymrštěného tělesa. Druhý kořen x_2 určíme anulováním výrazu v závorce:

$$\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\varphi + \frac{g x}{2\, v_0^2 \cos^2\varphi} = 0,$$

odkud

$$x_2 = \frac{2\,v_0^2 \cos^2\varphi\,(\sin\varphi\cos\alpha - \cos\varphi\sin\alpha)}{g\,.\cos\alpha\cos\varphi}$$

čili

$$x_2 = \frac{2\,v_0^2}{g\,.\cos\alpha}\,.\,\cos\varphi\,.\,\sin(\varphi - \alpha).$$

Tento výraz se dá ještě výhodně upravit podle vzorce

$$\cos\alpha_1\sin\alpha_2 = \tfrac{1}{2}\,[\sin(\alpha_1 + \alpha_2) - \sin(\alpha_1 - \alpha_2)]$$

na konečný tvar

$$x_2 = \frac{v_0^2}{g\,.\cos\alpha}\,[\sin(2\,\varphi - \alpha) - \sin\alpha].$$

Je patrno, že první souřadnice bodu M závisí na velikosti úhlu φ a na konstantách α, v_0. Poněvadž hledáme nejvzdálenější bod na nakloněné rovině, kterého můžeme dosáhnout při téže počáteční rychlosti v_0, musíme najít maximum funkce

$$d(\varphi) = \sin(2\,\varphi - \alpha).$$

Položme proto

$$\sin(2\,\varphi - \alpha) = 1.$$

Z této rovnice a ze samozřejmých podmínek $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \varphi$ pak vyjde jediné řešení

$$\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}.$$

Zkoumáme-li dopad na vodorovnou rovinu, pak $\alpha = 0$, takže hledaný elevační úhel je $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Poznamenejme, že v balistice jsou pro případy $a > 0$, $a < 0$ zavedeny termíny *přivrácený* a *odvrácený svah.*

Konstrukce řešení. Jsou sestrojeny osy x, y a polopřímka OM. Sestrojíme osu úhlu, jehož rameny jsou polopřímka OM a kladná část osy y. V horní polorovině vyťaté osou x vedeme ve vzdálenosti h*) rovnoběžku d s osou x. Její průsečík se zmíněnou osou úhlu označme N a veďme jím kolmici na polopřímku OM. Pata F této kolmice je ohniskem a přímka d řídící přímkou paraboly, která znázorňuje dráhu vymrštěného tělesa.

Příklad 20. *Určete délky stran pravoúhlého trojúhelníka, který má při konstantním součtu odvěsen nejkratší přeponu.*

Označme velikosti odvěsen trojúhelníka a, b velikost přepony c. Má-li jeden z ostrých úhlů trojúhelníka velikost φ, je (při označení $a + b = k$)

$$c\,(\cos\varphi + \sin\varphi) = k,$$

tj.

$$c\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \sin\varphi\right] = k.$$

Užitím stejné úpravy jako v příkladě 16 dostáváme rovnici

$$2c \sin\frac{\pi}{4} \cos\frac{\pi - 4\varphi}{4} = k$$

čili

$$c\sqrt{2}\cos\frac{\pi - 4\varphi}{4} = k,$$

*) h je maximální výška, kterou by dosáhlo těleso vymrštěné kolmo vzhůru $\left(h = \frac{v_0^2}{2g}\right)$.

odkud

$$c = \frac{k}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)}.$$

Minimum pro funkci c nastává, je-li $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)$ maximální, tj. pro

$$\frac{\pi}{4} - \varphi = 0,$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Je tedy

$$c_{min} = \frac{k}{\sqrt{2}} = \frac{k\sqrt{2}}{2}.$$

a hledaný trojúhelník je rovnoramenný.
Danou úlohu je možno řešit i užitím věty 6. Je totiž

$$c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + (k - a)^2 = 2a^2 - 2\,ka + k^2.$$

Minimum pro $c > 0$ nastane právě když c^2 bude minimální, tj. bude-li kvadratický trojčlen

$$2a^2 - 2ka + k^2$$

minimální.