Úlohy o maximech a minimech funkcí

2. kapitola. Kdy je součin dvou čísel s konstantním součtem největší?

In: Jaromír Hroník (author): Úlohy o maximech a minimech funkcí. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1967. pp. 16–45.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403604

2. kapitola

KDY JE SOUČIN DVOU ČÍSEL S KONSTANTNÍM SOUČTEM NEJVĚTŠÍ?

Zvolme si pevné kladné číslo, např. 10. Víme, že existuje nesčíslně mnoho dvojic kladných reálných čísel, jejichž součet dává právě 10. Taková dvojice jsou např.:

$$1, 9; 2, 8; 3, 7; \frac{7}{2}, \frac{13}{2}; \frac{14}{3}, \frac{16}{3}; 5, 5; \ldots \text{ atd.}$$

Utvořme nyní součiny čísel uvedených dvojic. Dostáváme tyto výsledky:

$$9; 16; 21; 22\frac{3}{4}; 24\frac{8}{9}; 25.$$

Naskýtá se nám tu otázka, která z těchto dvojic čísel má tu vlastnost, že dává největší součin?

Z uvedených výsledků se dá usuzovat, že *maximální součin bude* patrně *při rovnosti obou čísel.* Vskutku důkaz, který následuje, nám správnost předběžného úsudku potvrdí.

Důkaz. Uvažujme libovolnou dvojici kladných čísel x, y, jejichž součet je pevné číslo a. Za předpokladu, že $x \geqq y$, můžeme položit

$$x = \tfrac{1}{2}a + d, \qquad y = \tfrac{1}{2}a - d,$$

kde d je nějaké reálné číslo, splňující nerovnost $0 \leqq d < \frac{1}{2}a$. Utvořme součin:

$$xy = \tfrac{1}{4}a^2 - d^2.$$

Z tohoto vztahu je ihned vidět, že součin xy bude tím větší, čím menší bude číslo d. Tedy největší hodnoty nabude součin, když číslo d bude rovno nule. V tom případě pak

$$x_0 = y_0 = \tfrac{1}{2}a.$$

Výsledek důkazu můžeme vyslovit větou:

Věta 5. *Ze všech dvojic kladných reálných čísel x, y, jejichž součet je konstantní a roven číslu a, má největší součin dvojice $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}a$.*

Na základě této poučky se dají poměrně snadno řešit mnohé příklady z geometrie i fyziky. Uveďme si některé z nich.

Příklad 1. *Je dán obvod kruhové výseče l. Určete poloměr a příslušný oblouk výseče tak, aby její plošný obsah byl maximální.*

Označíme-li poloměr r, oblouk výseče s a příslušný středový úhel α, pak obvod

$$l = 2r + s = 2r + r\,.\,\mathrm{arc}\,\alpha.$$

Z tohoto vztahu určíme

$$\mathrm{arc}\,\alpha = \frac{l - 2r}{r},$$

kde r splňuje nerovnost

$$0 < r < \frac{l}{2}.$$

Obsah výseče je

$$S = \tfrac{1}{2}r^2\,.\,\mathrm{arc}\,\alpha,$$

čili

$$S = \tfrac{1}{2}r\,(l - 2r),$$

$$S = r\left(\frac{l}{2} - r\right).$$

Vidíme, že obsah výseče je roven součinu dvou činitelů r a $\frac{l}{2} - r$, jejichž součet je roven $\frac{l}{2}$ a to je konstanta. Podle věty 5 nabude tudíž uvažovaný součin největší hodnoty právě tehdy, když si budou oba činitelé rovni. Tedy

$$r = \frac{l}{2} - r$$

neboli

$$r = \frac{l}{4}.$$

Oblouk výseče pak je

$$s = \frac{l}{2}$$

a maximální obsah hledané výseče

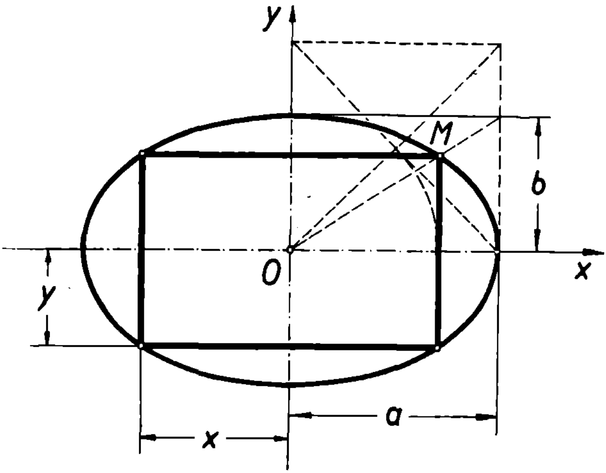
$$S_{max} = \frac{1}{16} l^2.$$

Výsledek ovšem nezávisí na poloměru výseče, nýbrž na jejím tvaru, tj. na poměru $l : r$.

Příklad 2. (Obr. 9.) *Do elipsy o daných poloosách a, b vepište obdélník největšího obsahu.*

Obsah obdélníka označme $S = 4xy$, kde x, y jsou souřadnice vrcholu M, které splňují nerovnosti $0 < x < a$, $0 < y < b$ (obr. 9). Poněvadž vrchol M leží na elipse, musí jeho souřadnice vyhovovat rovnici elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Obr. 9.

Z této rovnice vyplývá, že

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Obsah obdélníka je tedy

$$S = 4\frac{b}{a} \cdot x\sqrt{a^2 - x^2}$$

neboli

$$S = 4\frac{b}{a}\sqrt{x^2(a^2 - x^2)}.$$

Pro vyšetření maximálního obsahu obdélníka je rozhodující výraz $\sqrt{x^2(a^2 - x^2)}$, neboť koeficient $4\frac{b}{a}$ je konstanta. Jestliže součin pod odmocnítkem bude maximální, bude největší i jeho odmocnina. Proto můžeme zkoumat jen výraz

$$x^2 (a^2 - x^2).$$

Tento součin se skládá ze dvou činitelů, jejichž součet je roven a^2 a tudíž konstantní. Podle věty 5 nabude uvažovaný součin největší hodnoty právě tehdy, když

$$x^2 = a^2 - x^2,$$

čili když

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

Z rovnice elipsy vypočteme

$$y = \frac{b}{2}\sqrt{2}.$$

Rozměry hledaného obdélníka budou tedy v poměru

$$x : y = a : b$$

a jeho obsah

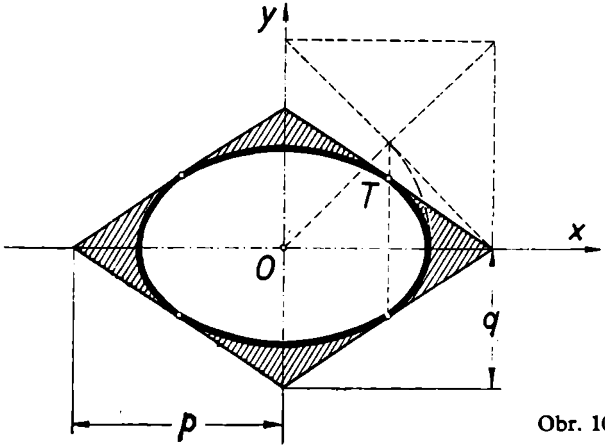
$$S_{max} = 2ab.$$

Nastane-li zvláštní případ, že elipsa přejde v kružnici ($a = b$), vyplývá z uvedené úměry, že hledaným výsledkem bude čtverec. Konstrukce výsledného obdélníku (pro $a \neq b$) je znázorněna na obr. 9.

Příklad 3. (Obr. 10.) *Z kosočtverce o daných úhlopříčkách délek $2p$, $2q$, kde $2p > 2q$, vykrojte elipsu o největším plošném obsahu.*

Obsah elipsy je $S = \pi ab$, kde a je hlavní poloosa elipsy, b vedlejší poloosa.

Strany kosočtverce budou ležet v tečnách hledané elipsy.



Obr. 10.

Položme delší úhlopříčku kosočtverce do osy x a kratší úhlopříčku do osy y, takže polovina úhlopříčky p bude právě úsek tečny na ose x, q pak bude úsek na ose y. Strana kosočtverce tedy leží v přímce o rovnici

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1. \tag{1}$$

Tečna k elipse v bodě $T = [x_0, y_0]$ má rovnici

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1. \tag{2}$$

Poněvadž se jedná o dvojí analytické vyjádření téže přímky, určíme porovnáním příslušných členů z obou rovnic (1), (2) souřadnice dotykového bodu:

$$x_0 = \frac{a^2}{p}, \quad y_0 = \frac{b^2}{q}.$$

Jelikož dotykový bod $[x_0, y_0]$ leží jak na elipse, tak i na její tečně, obdržíme po dosazení jeho souřadnic, např. do rovnice (1) vztah

$$\frac{a^2}{p^2} + \frac{b^2}{q^2} = 1,$$

z něhož určíme

$$b = \frac{q}{p}\sqrt{p^2 - a^2}, \text{kde } (0 < a < p).$$

Obsah elipsy je tedy

$$S = \pi ab = \frac{\pi q}{p} \cdot a\sqrt{p^2 - a^2} = \frac{\pi q}{p}\sqrt{a^2(p^2 - a^2)}.$$

Stačí opět zkoumat jen výraz pod odmocnítkem, neboť koeficient $\frac{\pi q}{P}$ je konstanta. Součin $a^2(p^2 - a^2)$ se skládá z činitelů, jejichž součet je roven p^2 a tudíž konstantní. Proto součin nabude maximální hodnoty, když

$$a^2 = p^2 - a^2$$

čili pro

$$a = \frac{p}{2}\sqrt{2}.$$

Pro vedlejší poloosu pak vychází

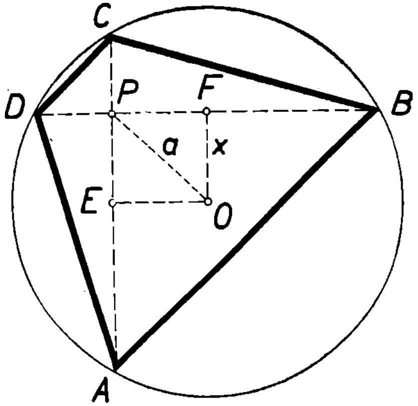
$$b = \frac{q}{2}\sqrt{2},$$

takže obsah hledané elipsy bude

$$S_{max} = \tfrac{1}{2}\pi pq.$$

Na obr. 10 je naznačena konstrukce hlavní poloosy hledané elipsy. Nad polovinou delší úhlopříčky kosodélníka je sestrojen čtverec; poloviční délka jeho úhlopříčky je velikost poloosy elipsy.

Příklad 4. (Obr. 11.) *Uvnitř kružnice o poloměru r je dán bod P, různý od jejího středu. Tímto bodem veďte dvě na sebe kolmé tětivy AC a BD tak, aby čtyřúhelník ABCD, sestrojený spojením koncových bodů tětiv, měl maximální obsah.*



Obr. 11.

Označme vzdálenost bodů O, P $a = OP$ $(0 < a < r)$ a vzdálenost středu kružnice od tětivy BD $x = OF$ (viz obr. 11).
Obsah čtyřúhelníka *je*

$$S = \tfrac{1}{2}\,AC.BD = 2BF.AE,$$

kde E je střed tětivy AC a F střed tětivy BD.

Podle Pythagorovy věty platí

$$BF = \sqrt{r^2 - x^2},\ AE = \sqrt{r^2 - OE^2} = \sqrt{r^2 - (a^2 - x^2)}.$$

Obsah čtyřúhelníka je pak

$$S = 2\sqrt{(r^2 - x^2)\,.\,(r^2 - a^2 + x^2)},$$

kde x splňuje nerovnosti $0 \leqq x < r$. Jelikož součinitelé pod odmocnítkem mají opět konstantní součet, maximum nastane, když

$$r^2 - x^2 = r^2 - a^2 + x^2,$$

čili pro

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{2}\,.$$

Čtenáři se mohou lehko přesvědčit, že v tomto případě budou obě tětivy téže délky a hledaný čtyřúhelník bude tedy rovnoramenným lichoběžníkem o obsahu

$$S_{max} = 2r^2 - a^2.$$

Při řešení jsme mlčky předpokládali, že žádná z úhlopříček čtyřúhelníka neprochází středem kružnice, tj. že $x > 0$. Připustíme-li možnost $x = 0$, je vzniklý čtyřúhelník deltoid o obsahu

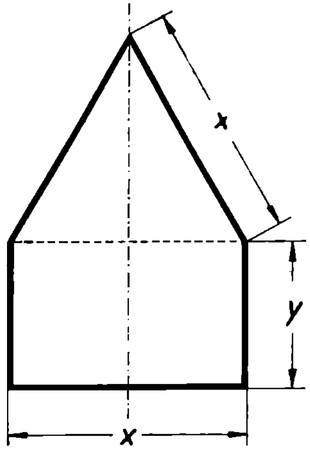
$$S = 2r\sqrt{r^2 - a^2}.$$

Lze však snadno dokázat, že pro každé $a \neq 0$ je

$$2r^2 - a^2 > 2r\sqrt{r^2 - a^2},$$

takže výsledek zůstává v platnosti.

Příklad 5. (Obr. 12.) *Obrazec skládající se z obdélníka o rozměrech x, y a rovnostranného trojúhelníka o délce stran* *x má předepsaný obvod l. Určete rozměry obrazce tak, aby jeho plošný obsah byl maximální.*



Obr. 12.

Obvod obrazce je

$$l = 3x + 2y,$$

z čehož

$$y = \frac{l - 3x}{2}.$$

Obsah obrazce pak je

$$S = xy + \frac{x^2}{4}\sqrt{3} = x\left(y + \frac{x}{4}\sqrt{3}\right) =$$

$$= x\left(\frac{l - 3x}{2} + \frac{x}{4}\sqrt{3}\right)$$

tj.

$$S = \frac{x}{4}[2l - (6 - \sqrt{3})\,x];$$

číslo x je z intervalu $\left(0, \frac{l}{3}\right)$ a proto tím spíše pro ně platí

$$0 < x < \frac{2l}{6 - \sqrt{3}},$$

čehož hned použijeme. Vytkneme-li totiž výraz $6 - \sqrt{3}$, obdržíme

$$S = \frac{6 - \sqrt{3}}{4} \cdot x\left(\frac{2l}{6 - \sqrt{3}} - x\right),$$

kde oba poslední činitelé jsou kladní. Jelikož jejich součet $x + \frac{2l}{6 - \sqrt{3}} - x$ je opět konstantní, maximum součinu nastane, když

$$x = \frac{2l}{6 - \sqrt{3}} - x,$$

čili

$$x = \frac{l}{6 - \sqrt{3}};$$

pak

$$y = \frac{l\,(3 - \sqrt{3})}{2\,(6 - \sqrt{3})} = \frac{x}{2}(3 - \sqrt{3})$$

a

$$S_{max} = \frac{l^2}{4\,(6 - \sqrt{3})}.$$

Příklad 6. *Určete rozměry rotačního kužele, který má při daném konstantním povrchu S největší objem.*

Označíme-li písmenem x poloměr podstavy kužele, písmenem y výšku kužele, je povrch (podstava + plášť)

$$S = \pi x^2 + \pi x \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Objem kužele je

$$V = \tfrac{1}{3} \pi x^2 . y.$$

Ze vztahu pro povrch plyne

$$y = \sqrt{\frac{(S - \pi x^2)^2}{\pi^2 x^2} - x^2} = \frac{\sqrt{S (S - 2\pi x^2)}}{\pi x} \cdot \qquad (3)$$

Aby výraz pod odmocnítkem byl při $x > 0$ kladný, musí x vyhovovat podmínce

$$0 < x < \sqrt{\frac{S}{2\pi}} \cdot$$

Dosadíme-li do výrazu pro objem za y podle (3), obdržíme

$$V = \tfrac{1}{3} . x \sqrt{S (S - 2\pi x^2)} = \frac{\sqrt{S}}{3} \sqrt{x^2 . (S - 2\pi x^2)}.$$

Pro vyšetření maximálního objemu kužele je rozhodující výraz $x^2 (S - 2\pi x^2)$, který lze dále upravit na tvar

$$2\pi x^2 \left(\frac{S}{2\pi} - x^2\right).$$

Jelikož součin $x^2 \left(\frac{S}{2\pi} - x^2\right)$ má konstantní součet činitelů rovný $\frac{S}{2\pi}$, nastane maximum, když bude

$$x^2 = \frac{S}{2\pi} - x^2,$$

tj.

$$2x^2 = \frac{S}{2\pi},$$

odkud

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

Pro výšku y pak vychází

$$y = \sqrt{\frac{2S}{\pi}} = 2x\sqrt{2}.$$

Ze všech rotačních kuželů daného povrchu S má tedy maximální objem kužel, pro jehož průměr podstavy $2x$ a výšku y platí

$$2x : y = 1 : \sqrt{2};$$

jeho objem je

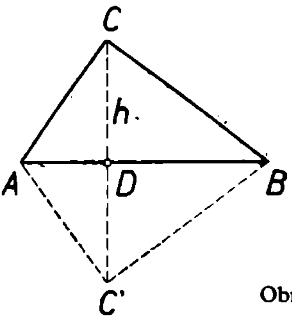
$$V_{max} = \frac{\sqrt{2\pi}}{12\pi} S \sqrt{S}.$$

Příklad 7. (Obr. 13.) *V trojúhelníku je dán obvod $a + b + c = 2s$. Určete délky stran tohoto trojúhelníka tak, aby rotací trojúhelníka kolem jedné z nich vzniklo těleso největšího objemu.*

Úlohu si rozdělíme na dvě části.

Označme c stranu, kolem které trojúhelník rotuje a předpokládejme nejprve, že její délka je pevná. Určíme délky zbývajících stran tak, aby těleso vzniklé rotací mělo (při daném c) největší objem V. Označíme-li $h = CD$ (viz obr. 13) výšku příslušnou ke straně c, vychází pro objem tělesa vzniklého rotací

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h^2 . AD + \tfrac{1}{3}\pi h^2 . DB = \tfrac{1}{3}\pi h^2 . c^{*})$$



Obr. 13.

Poněvadž délka strany c je podle předpokladu konstantní, bude mít uvažované rotační těleso největší objem tehdy, když výška h bude nejdelší. V tomto případě musí býti rovněž obsah uvažovaného trojúhelníka maximální. Hledáme tedy podmínku, při které bude míti trojúhelník o daném obvodě $2s$ a délce jedné strany c největší obsah.

Podle Heronova vzorce platí, že obsah trojúhelníka je

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ kde } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Jelikož s, $s-c$ jsou konstanty, hledáme maximum součinu

$$(s-a)(s-b).$$

*) Na obr. 13 leží pata D výšky CD mezi body A, B a tomu odpovídá náš výpočet objemu rotačního tělesa. Rozvažte sami, že kdyby pata D výšky CD padla do některého z bodů A, B nebo vně úsečky AB, zda by vyšlo pro objem V opět $V = \frac{1}{3}\pi h^2 c$.

Poněvadž součet jeho činitelů

$$s-a+s-b=2s-(a+b)=c$$

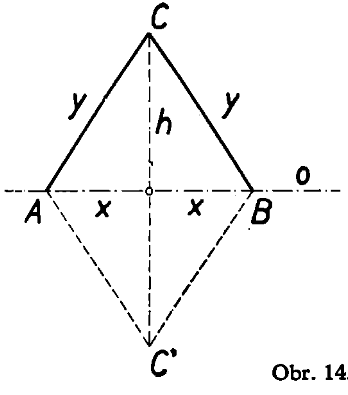
je konstantní, nastane maximum součinu při rovnosti

$$s-a=s-b$$

čili pro

$$a=b.$$

Hledaný trojúhelník bude rovnoramenný.



Obr. 14.

Přikročme nyní k druhé části úlohy. Z první části víme, že zvolíme-li si stranu c, ležící v ose rotace, musí zbývající dvě strany býti téže délky, takže trojúhelník ABC je rovnoramenný. Zavedeme-li v něm označení podle obr. 14, dostáváme pro obvod $2s$

$$2s=2x+2y$$

a z toho

$$y=s-x.$$

Podle Pythagorovy věty platí

$$h^2 = y^2 - x^2,$$

takže pro objem V rotačního tělesa vyjde

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 2x = \frac{2}{3}\pi h^2 . x = \frac{2}{3}\pi x (y^2 - x^2) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi x\ [(s-x)^2 - x^2],$$

neboli

$$V = \frac{4}{3}\pi s x\left(\frac{s}{2} - x\right).$$

Jelikož $\frac{4}{3}\pi s$ je kladná konstanta, hledáme maximum součinu

$$x\left(\frac{s}{2} - x\right).$$

Poněvadž součin má opět konstantní součet činitelů, nastává maximum, když

$$x = \frac{s}{2} - x$$

čili pro

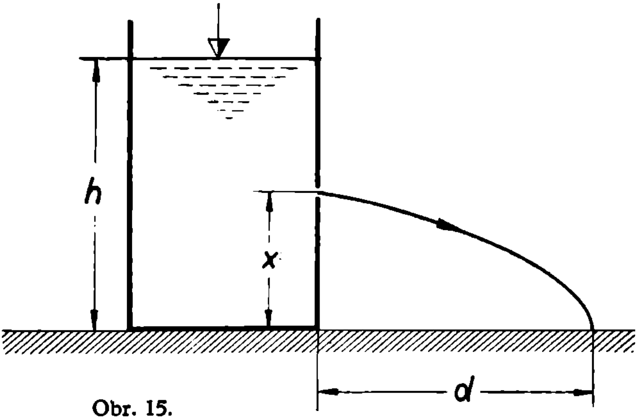
$$x = \frac{s}{4}.$$

Hledané velikosti stran jsou tedy

$$AB = \frac{s}{2}, \quad AC = BC = \frac{3}{4}s.$$

Jinými slovy: Aby rotací trojúhelníka daného obvodu $2s$ kolem jedné jeho strany vzniklo těleso maximálního objemu, je třeba volit trojúhelník rovnoramenný, jehož délky stran jsou v poměru 2 : 3 : 3, přičemž kratší strana leží v ose rotace. Objem V_{max} vzniklého rotačního tělesa pak je

$$V_{max} = \frac{1}{12} \pi s^3.$$



Obr. 15.

Příklad 8. (Obr. 15.) *Nádoba tvaru rotačního válce je postavena na vodorovné podložce a naplněna kapalinou do výšky h. V jaké výšce x je třeba navrtat otvor do stěny nádoby, má-li kapalina, která jím bude vytékat, dopadnout na podložku co nejdále od stěny nádoby?* (Tloušťku dna při výpočtu zanedbejte!)

Z Torricelliova vzorce plyne pro výtokovou rychlost vztah

$$v = \sqrt{2g\,(h - x)} \quad \left[\frac{m}{s}\right],$$

kde $g\left[\frac{m}{s^2}\right]$ je gravitační zrychlení. Podle vzorce pro dráhu volného pádu trvá pád kapaliny $\sqrt{\frac{2x}{g}}$ vteřin. Vzdálenost d místa dopadu kapaliny od stěny nádoby je dána součinem výtokové rychlosti a času potřebného k dopadu kapaliny, tj.

$$d = \sqrt{2g(h-x)} \cdot \sqrt{\frac{2x}{g}} = 2\sqrt{x(h-x)}.$$

Poněvadž vzdálenost d bude největší, když i její čtverec bude největší, stačí proto zkoumat jen součin

$$x(h-x).$$

Jelikož jeho činitelé mají opět konstantní součet, nastane maximum součinu při

$$x = h - x,$$

tj. pro

$$x = \frac{h}{2}.$$

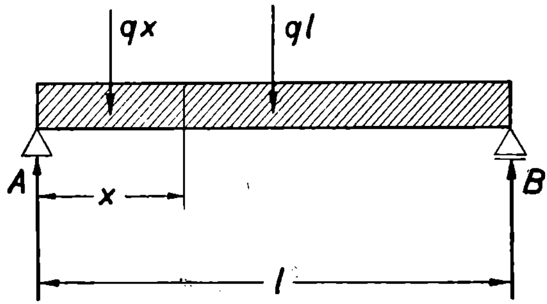
Pro tento případ vyjde vzdálenost d_{max} místa dopadu od stěny nádoby rovná výchozí výšce hladiny v nádobě:

$$d_{max} = h.$$

V mechanice se shledáváme s úlohami, které jsou rozřešeny v příkladech 9 a 10.

Příklad 9. (Obr. 16.) *Určete největší ohybový moment rovnoměrně zatíženého prostého nosníku délky l, který spočívá svými konci na dvou podporách.*

Ohybový moment $M(x)$ na nosníku v určitém řezu je dán algebraickým součtem jednotlivých momentů



Obr. 16.

$M(x) = \sum_{1}^{n} P_i a_i$ od vnějších sil P_i, které působí po jedné straně řezu. (Symbol a_i značí rameno síly P_i k řezu x.)

Celkové zatížení uvažovaného nosníku je $Q = ql$, kde q je zatížení na jednotku délky nosníku včetně vlastní váhy.

Určíme nejdříve podporové tlaky, tzv. podporové reakce. Jsou to síly, které splňují statickou podmínku rovnováhy ve svislém směru.

$$A = B = \tfrac{1}{2}\, ql.$$

Označme x vzdálenost roviny řezu od levé podpory, kde x splňuje nerovnost

$$0 < x < l.$$

Ohybový moment je dán vztahem

$$M(x) = Ax - qx\frac{x}{2} = \tfrac{1}{2}\, qlx - q \, . \frac{x^2}{2} = \tfrac{1}{2} qx\,(l - x).$$

Jelikož $\frac{1}{2}q$ je konstanta, soustředíme své úvahy jen na součin

$$x \, . (l - x).$$

Podle úvah z předcházejících příkladů nastane maximum zmíněného součinu, když

$$x = l - x$$

čili

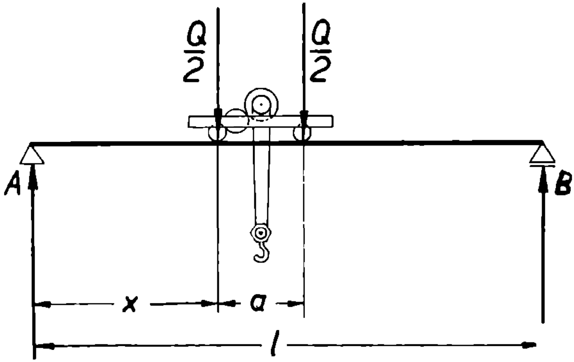
$$x = \frac{l}{2}.$$

Pak největší ohybový moment rovnoměrně zatíženého prostého nosníku je uprostřed jeho délky a rovná se

$$M_{max} = \tfrac{1}{2}q \cdot \frac{l}{2}\left(l - \frac{l}{2}\right) = \frac{1}{8}\,ql^2.$$

Nosník se dimenzuje na maximální ohybový moment.

Příklad 10. (Obr. 17.) *Určete polohu jeřábového vozíku (kočky) na prostém nosníku, při které bude nosník namáhán největším ohybovým momentem, jaký může vzniknout pod levým z obou břemen.*



Obr. 17.

Označme A, B reakce v podporách, l délku nosníku, a vzdálenost os jeřábového vozíku (tzv. rozvor), x libovolnou vzdálenost bližšího kola vozíku od levé podpory a $\frac{Q}{2}$ podporové tlaky jeřábové kočky.

Z podmínek rovnováhy vypočteme podporovou reakci A.

$$A\,l = \frac{Q}{2}(l - x) + \frac{Q}{2}(l - x - a)$$

čili

$$A = \frac{Q}{2\,l}(2\,l - 2\,x - a), \quad \text{kde} \quad 0 < x < l - a.$$

Ohybový moment ve vzdálenosti x od levé podpory je vyjádřen vztahem

$$M(x) = Ax = \frac{Q}{2l}\,x\,(2\,l - a - 2x) =$$

$$= \frac{Q}{4l}\,2x\,(2l - a - 2x).$$

Jelikož součin $2x\,(2\,l - a - 2x)$ má konstantní součet roven $2\,l - a$, dosáhne uvažovaný součin největší hodnoty, když

$$2x = 2\,l - a - 2x$$

neboli

$$x = \tfrac{1}{2}\left(l - \frac{a}{2}\right).$$

Maximální ohybový moment je

$$M_{max} = \frac{Q}{4}\left(l - a + \frac{a^2}{4l}\right).$$

Nevznikne tedy, jak bychom očekávali, největší ohybový moment uprostřed nosníku, nýbrž v bodě, který je vzdálen o čtvrtinu rozvoru od středu nosníku.

Při řešení předešlých deseti úloh jsme se opírali o větu 5 uvedenou na str. 17, přičemž — v souladu s tím, co bylo řečeno v předmluvě — zcela ustoupilo do pozadí „funkční hledisko". Nepoužívali jsme ani termínů „maximum funkce" nebo „lokální extrém", které již byly zavedeny; kdybychom chtěli citovanou větu a rozřešení úlohy formulovat s použitím pojmu funkce a pojmu extrému, zněla by tato věta takto:

Funkce $y = x(s - x)$, kde $s > 0$, má v intervalu $(0, s)$ maximum v bodě $x = \frac{s}{2}$.

Předně uvažme, že omezení definičního oboru na interval $(0, s)$ tu není podstatné. Souviselo to — v původním znění věty — s tím, že jsme se při vyhledávání sčítanců s konstantním kladným součtem (zde s) a maximálním součinem již předem omezili jen na sčítance kladné. Projdete-li si však postup na str. 16, shledáte, že na výsledku se nic nezmění, připustíme-li jako sčítance libovolná reálná čísla. Dokonce ani předpoklad $s > 0$ tu není nutný.*) Platí tedy:

Věta. *Funkce $y = x(s - x)$ má v intervalu $(-\infty, \infty)$ maximum v bodě $x = \frac{s}{2}$.*

Funkce $y = x(s - x)$ je jen zvláštním případem kvadratické funkce $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Nyní určíme extrémy této funkce v intervalu $(-\infty, \infty)$. Pro zjednodušení zápisu budeme vyšetřovat funkci $f(x) = y - c =$

*) Předpoklad $s > 0$ odpovídá předpokladu $a > 0$ na str. 16, který zřejmě není podstatný.

$= ax^2 + bx$, která má zřejmě extrémy v týchž bodech jako funkce $y = ax^2 + bx + c$, a rozdělíme vyšetřování na 3 případy:

I. Nechť $a > 0$, $b \neq 0$. Pišme

$$f(x) = ax^2 + bx = ax\left(x + \frac{b}{a}\right).$$

Činitelé ax i $\left(x + \frac{b}{a}\right)$ mají pro každé x o dostatečně velké absolutní hodnotě $\left(|x| > \left|\frac{b}{a}\right|\right)$ stejné znaménko, takže jejich součin je kladný a rostoucí prostou hodnotou argumentu x může nabývat libovolně velké hodnoty. Funkce f (a tím i funkce $ax^2 + bx + c$) tudíž nemá v intervalu $(-\infty, \infty)$ maximum.

Pro vyhledání minima této funkce použijme vyjádření

$$f(x) = -a.x\left(-x - \frac{b}{a}\right).$$

Lehko odvodíte, že součin $x\left(-x - \frac{b}{a}\right)$ nabývá pro vhodné argumenty x kladných hodnot.*) Existují tedy argumenty, pro které jsou funkční hodnoty $f(x)$ záporné. Proto má-li funkce f v intervalu $(-\infty, \infty)$ minimum, je to číslo záporné a funkce ho nabývá v tom bodě, ve kte-

*) Je-li $\frac{b}{a} > 0$, jsou to argumenty x z intervalu $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$, je-li $\frac{b}{a} < 0$, jsou to argumenty x z intervalu $\left(0, -\frac{b}{a}\right)$.

rém je součin $x\left(-x - \frac{b}{a}\right)$ největší. Jde tu však o součin s konstantním součtem činitelů $x + \left(-x - \frac{b}{a}\right) = -\frac{b}{a}$, jehož maximum nastává podle věty 5 pro $x = -\frac{b}{2a}$. V bodě $-\frac{b}{2a}$ má tedy funkce f a tím i funkce $ax^2 + bx + c$ $(a > 0,\ b \neq 0)$ minimum.

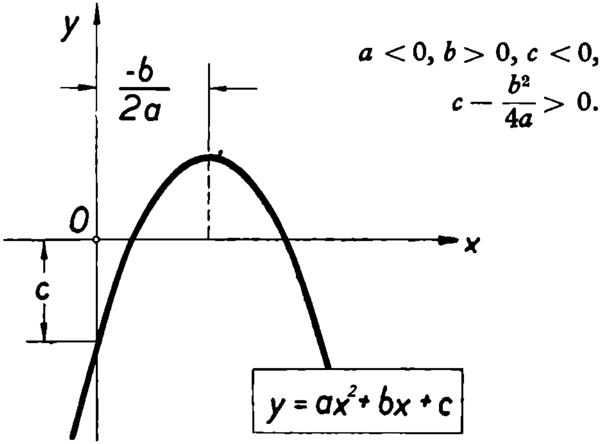
II. Nechť $a < 0$, $b \neq 0$. Všimněme si funkce $-f(x) = -ax^2 - bx$. Koeficient kvadratického členu je zde opět kladný, takže podle předešlého odstavce nemá funkce $-f(x)$ $(a < 0,\ b \neq 0)$ v intervalu $(-\infty, \infty)$ minimum a nabývá maxima v bodě $-\frac{-b}{-2a} = -\frac{b}{2a}$. Podle věty 3 na str. 14 to znamená, že pro $a < 0$, $b \neq 0$ nemá v intervalu $(-\infty, \infty)$ funkce $f(x) = ax^2 + bx$ (a tím i funkce $ax^2 + bx + c$) minimum, ale nabývá v bodě $x = -\frac{b}{2a}$ maxima.

III. Nechť $b = 0$, $a \neq 0$. Tu je $f(x) = ax^2$. Protože funkce $y = x^2$ zřejmě nemá v intervalu $(-\infty, \infty)$ maximum a minima nabývá v bodě $x = 0$, platí pro extrémy funkce $ax^2 + bx + c$ $(b = 0)$ stejné závěry jako v bodech I a II. O tom se lehko sami přesvědčíte.

Můžeme tedy shrnout:

Věta 6. *Kvadratická funkce $y = ax^2 + bx + c$ nemá pro $a > 0$ v intervalu $(-\infty, \infty)$ maximum. Minima nabývá v bodě $-\frac{b}{2a}$. Pro $a < 0$ nemá funkce $y = ax^2 + bx + c$ v intervalu $(-\infty, \infty)$ minima a nabývá maxima v bodě $-\frac{b}{2a}$.*

Oba případy ($a < 0$, $a > 0$) jsou znázorněny na obr. 18a, b; grafem funkce $y = ax^2 + bx + c$ je — jak víte — parabola.



Obr. 18a.

Příklad 11. *Kladné číslo a rozložte na dva sčítance tak, aby součet druhých mocnin těchto čísel byl nejmenší.*

Označíme-li obě hledaná čísla x, z musí platit, že

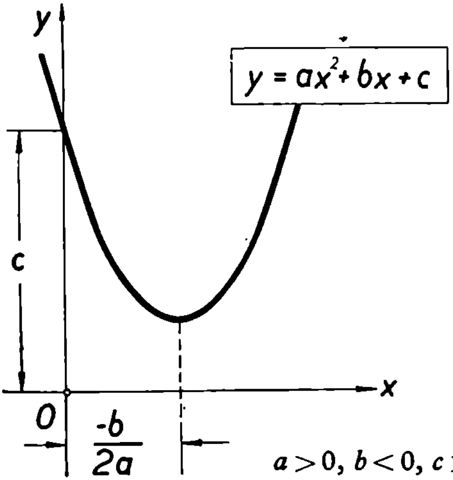
$$x + z = a, \tag{1}$$

přičemž číslo

$$y = x^2 + z^2 \tag{2}$$

má být minimální. Poněvadž

$$z = a - x,$$



Obr. 18b.

$$a > 0,\ b < 0,\ c > 0,\ c - \frac{b^2}{4a} > 0.$$

obdržíme po dosazení do rovnice (2)

$$y = x^2 + (a - x)^2$$

čili

$$y = 2x^2 - 2ax + a^2.$$

Tato funkce nabývá podle věty 6 v intervalu $(-\infty, \infty)$ minima pro

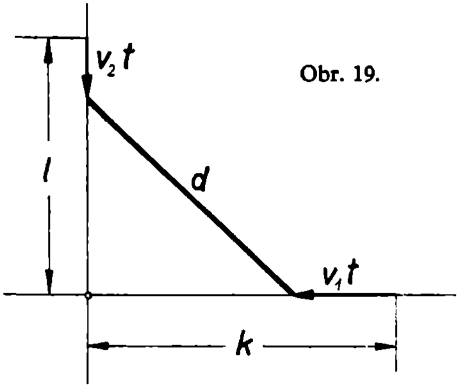
$$x = -\frac{-2a}{2.2} = \frac{a}{2}.$$

Součet druhých mocnin sčítanců pak je

$$y_{min} = \tfrac{1}{2} \cdot a^2.$$

P o z n á m k a. Úloha rozložit kladné číslo a na dva sčítance tak, aby součet druhých mocnin sčítanců byl maximální, je podle věty 6 neřešitelná.

Příklad 12. (Obr. 19.) *Po dvou přímých silnicích, které se kolmo protínají, se pohybují konstantními rychlostmi dvě vozidla směrem ke křižovatce. Za jaký čas t budou obě vozidla sobě nejblíže, jsou-li jejich vzdálenosti od křižovatky v okamžiku t po řadě k a l?*



Obr. 19.

Rychlost prvého vozidla je v_1, druhého v_2. Vzdálenost $d(t)$ obou vozidel v okamžiku $t_0 + t$ lze vyjádřit podle Pythagorovy věty vztahem

$$d(t) = \sqrt{(k - v_1 t)^2 + (l - v_2 t)^2}.$$

Bude-li d nejmenší, bude i dvojmoc d^2 nejmenší. Stačí proto zkoumat jen funkci

$$f(t) = (k - v_1 t)^2 + (l - v_2 t)^2$$

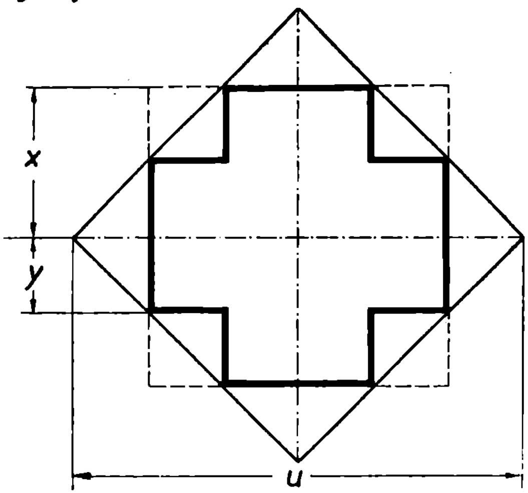
neboli

$$f(t) = (v_1^2 + v_2^2)t^2 - 2(kv_1 + lv_2)t + k^2 + l^2.$$

Obdrželi jsme kvadratickou funkci argumentu t, jejíž koeficient $v_1^2 + v_2^2$ při kvadratickém členu je kladný. Podle věty 6 má tato funkce minimum v bodě

$$t = \frac{kv_1 + lv_2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

Příklad 13. (Obr. 20.) *Do čtverce o dané úhlopříčce u vepište obrazec tvaru kříže složeného ze dvou stejně širokých pruhů, souměrných podle úhlopříček tak, aby plošný obsah kříže byl největší.*



Obr. 20.

Obsah kříže S je při označení podle obr. 20.

$$S = 4x^2 - 4(x - y)^2,$$

přičemž

$$y = \frac{u}{2} - x$$

a argument x splňuje nerovnost

$$\frac{u}{6} < x < \frac{u}{2}.$$

Vyloučíme-li y, obdržíme pro obsah vztah

$$S = 4x^2 - 4\left(2x - \frac{u}{2}\right)^2$$

čili

$$S = -12x^2 + 8ux - u^2.$$

Tato kvadratická funkce nabývá podle věty 6 maximální hodnoty pro

$$x = \frac{u}{3},$$

pak

$$y = \frac{u}{6},$$

takže obsah hledaného obrazce je

$$S_{max} = \frac{1}{3} \cdot u^2.$$

Dosadíme-li do výsledného obsahu stranu čtverce podle vztahu $u = a\sqrt{2}$ vychází, že obsah kříže zaujímá dvě třetiny obsahu daného čtverce

$$S_{max} = \frac{2}{3} \cdot a^2.$$

Poznámka. Příklady 1—10 z této kapitoly můžeme též řešit právě uvedeným způsobem. To je zřejmé, neboť věta

5, o kterou se opírala podaná řešení příkladů 1—10, je jen důsledkem věty 6, o kterou se opírají řešení příkladů 11, 12 a 13.

Cvičení

1. Do rovnoramenného trojúhelníka o základně z a k ní příslušné výšce h vepište obdélník největšího obsahu. [$x = \frac{1}{2}z$; $y = \frac{1}{2}h$]
2. Do kruhové výseče o poloměru r a středovém úhlu $2\alpha < \pi$ vepište symetricky dle osy výseče rovnoramenný trojúhelník s hlavním vrcholem ve středu oblouku tak, aby obsah trojúhelníka byl maximální. [a) Je-li $\alpha \leqq 60°$, pak výška $h = \frac{1}{2} \cdot r$; b) pro $\alpha \geqq 60°$ je $h = r(1 - \cos\alpha)$.]
3. Do rotačního kužele o poloměru r a výšce h vepište rotační válec o největším plášti. [Poloměr $x = \frac{1}{2}r$; výška $v = \frac{1}{2}.h$]
4. Do koule o poloměru r vepište rotační válec největšího pláště. $\left[\text{Rovnostranný válec o poloměru } \frac{r}{2}\sqrt{2}\right]$
5. Výkon turbíny N je funkcí počtu obrátek n. Určete počet obrátek tak, aby výkon turbíny byl maximální, jestliže výkon je vyjádřen vztahem $N = \alpha n - \beta n^2$. Koeficienty jsou např. $\alpha = 0{,}45543 \left[\frac{m^2 kg}{s^2}\right]$, $\beta = 0{,}0010344 \left[\frac{m^2 kg}{s}\right]$. $\left[n = \frac{\alpha}{2\beta} \doteq 220.\right]$