1. kapitola

ZÁKLADNÍ POJMY A NEJJEDNODUŠŠÍ ÚLOHY

V této knížce se budeme zabývat studiem funkcí. K tomu si nejprve zavedeme řadu pojmů, kterých budeme často používat. Mnoho těchto pojmů zná čtenář ze školy, některé pro něho budou nové. Upozorňujeme čtenáře na brožurku *M. Šislera* a *J. Jarníka O funkcích*, která vyšla v roce 1962 jako 4. svazek *Školy mladých matematiků* a ve které jsou již některé z níže uvedených pojmů zavedeny.

Budeme stále pracovat s reálnými čísly. Reálná čísla zobrazujeme známým způsobem na číselné ose, přičemž dokonce často zaměňujeme při běžném vyjadřování číslo samo s jeho obrazem na číselné ose. Tak třeba hovoříme o „bodu tři" a máme na mysli reálné číslo 3, nebo říkáme, že vzdálenost bodů a a b je d a vyjadřujeme tím, že

$$|a - b| = |b - a| = d.$$

Pro některé množiny reálných čísel, jejichž obrazy vyplňují na číselné ose úsečky nebo polopřímky, zavádíme název intervaly a zvláštní označení.

Uzavřeným intervalem od a do b ($a < b$) rozumíme množinu všech čísel x, pro která je $a \leqq x \leqq b$. Tento interval značíme $\langle a, b\rangle$. Obrazy všech prvků intervalu $\langle a, b\rangle$ vyplňují na číselné ose úsečku, jejímiž krajními body jsou obrazy čísel a, b. Proto mluvíme o *krajních* (počátečním a koncovém) *bodech* intervalu. Otevřený interval (a, b) je množina všech čísel x, pro která je $a < x < b$. Pracujeme také s *polouzavřenými* či *polootevřenými* intervaly $<a, b)$ a $(a, b>$.

Všechny tyto intervaly nazýváme *konečné* nebo *vlastní*. *Nekonečné* nebo *nevlastní* jsou tyto intervaly:

Uzavřený (*otevřený*) *interval* od a do nekonečna, tj. množina všech čísel x, pro něž je $x \geqq a$ $(x > a)$, který označujeme $< a, \infty)$ $[(a, \infty)]$;

uzavřený (*otevřený*) *interval* od méně nekonečna do b, tj. množina všech čísel x, pro něž je $x \leqq b$ $(x < b)$, který označujeme $(-\infty, b>$ $[(-\infty, b)]$;

interval od méně nekonečna do nekonečna označujeme $(-\infty, \infty)$ a rozumíme jím množinu všech reálných čísel.

Řekli jsme, co rozumíme krajními body intervalů. Body, které nejsou krajní, nazýváme *vnitřní body* intervalu. Tak např. otevřený interval (a, b) obsahuje vesměs jen vnitřní body.

V našich úvahách bude důležitý pojem *okolí bodu*. Okolím bodu (čísla) a rozumíme kterýkoli otevřený interval obsahující číslo a. Například interval (6, 7,5) je okolím bodu 6,3. Někdy je užitečné rozlišovat mezi levým a pravým okolím bodu. *Levým* (*pravým*) *okolím bodu a* je každý otevřený interval s koncovým (počátečním) bodem a. Všimněme si, že levé a pravé okolí bodu a nedávají dohromady okolí bodu a. Aby vzniklo okolí bodu a, bylo by nutno ještě připojit bod a samotný. Okolí bodu a, ze kterého je vyňat bod a, budeme nazývat *redukované okolí bodu a*.

A nyní si připomeneme *definici funkce*. Nechť je dána množina reálných čísel M. Předpis, který každému číslu x z množiny M přiřazuje jisté (jediné) reálné číslo y, nazýváme funkce. Množina M je *definiční obor funkce*, jednotlivá čísla z definičního oboru jsou *argumenty*, čísla přiřazená funkcí argumentům se nazývají *funkční hodnoty*. Funkce označujeme písmeny f, g, φ, F, G apod., nebo zvláštními znaky jako sin, log, $\sqrt{\ }$ atd. To, že funkce f přiřazuje argumentu x funkční hodnotu y, zapisujeme

$$y = f(x)$$

a říkáme, že *funkce f nabývá v bodě (čísle) x hodnoty y.*

Všimněme si, že při definici funkce jsme vyšli z definičního oboru. Je důležité uvádět pro každou funkci vedle samotného předpisu vždy i definiční obor, i když se na to, zejména je-li dán předpis rovnicí, často zapomíná. V našich úvahách bude definiční obor vždycky hrát důležitou úlohu.

Dobrou pomůckou pro studium funkcí je jejich *grafické znázornění*, krátce *graf*.

Zavedeme v rovině známým způsobem souřadnice, tj. sestrojíme dvě navzájem kolmé číselné osy protínající se v bodě 0, který nazveme *počátek*. Jednu osu volíme obvykle vodorovnou a budeme ji většinou značit x. Druhá číselná osa je osa y. Nyní je možno každému bodu v rovině přiřadit dvě čísla, *souřadnice*, takto: Vedeme bodem P kolmice na obě číselné osy (souřadnicové osy x a y). Je-li pata kolmice na ose x obrazem čísla a, pata kolmice na ose y obrazem čísla b, řekneme, že bod P má souřadnice a, b, což značíme $P = [a; b]$. První souřadnice bodů ležících na ose y je nula stejně jako druhá souřadnice bodů ležících na ose x. Počátek 0 má obě souřadnice nulové, tj. $0 = [0; 0]$.

Je-li nyní dána funkce f a sestrojíme-li pro každé číslo x z jejího definičního oboru bod $[x; f(x)]$, nazýváme množinu všech takových bodů *grafem funkce f*. Ve všech případech, kterými se zde budeme zabývat, budou grafy funkcí určité čáry nebo křivky.

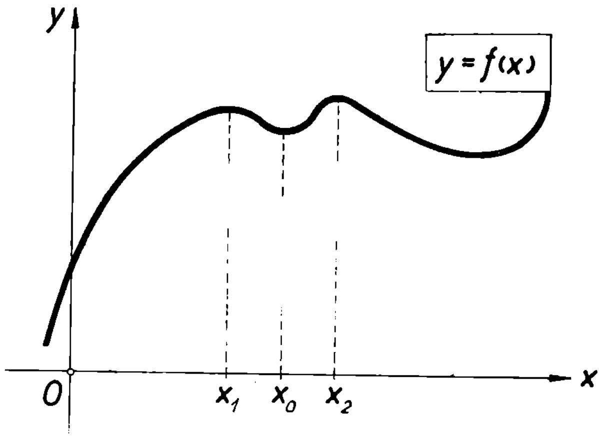
Na grafu funkce existují body, které mají pro nás zvláštní důležitost. Jsou to body, ve kterých graf dosahuje největší či nejmenší ypsilonové souřadnice. Zde je však třeba uvést přesnou definici, která se nemůže opírat jen o názornou představu. Zavedeme proto „početně" pojem tzv. extrémů a lokálních extrémů funkce. Začněme s *lokálními extrémy.*

Říkáme, že *funkce* f *nabývá v bodě* x_0 *ostrého lokálního minima* (*maxima*), *existuje-li takové redukované okolí bodu* x_0, *že pro všechny argumenty* x *z tohoto okolí je*

$$f(x) > f(x_0) \, (f(x) < f(x_0)).$$

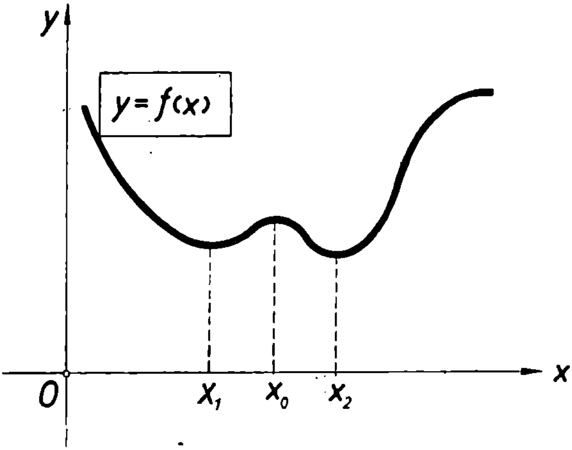
Pro lokální minimum nebo maximum zavádíme souhrnný název *lokální extrém.*

Je vidět, že k tomu, aby se mohlo mluvit o lokálním extrému funkce v bodě x_0, je nutné, aby funkce byla definována v jistém okolí bodu x_0. Toto okolí ovšem může být libovolně malé. Je třeba si dobře uvědomit, že naše definice popisuje skutečně jen jistou lokální vlastnost funkce. To snad dobře vyniká na připojených dvou obrázcích. Na obr. 1 je znázorněna funkce, mající v bodě x_0 ostré lokální minimum, ačkoli její hodnota v bodě x_0 je, celkově vzato,



Obr. 1.

jedna z největších. Body x_1, x_2 na ose x jsou krajní body okolí, v němž jsou funkční hodnoty $f(x)$ v definici požadovaném vztahu k číslu $f(x_0)$. (Podobně na obr. 2 pro ostré lokální maximum.)



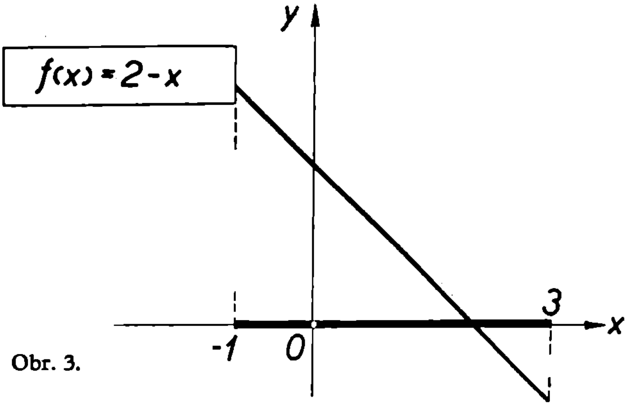
Obr. 2.

Tyto lokální extrémy budou mít v našich úvahách místo jako pomůcka k vyhledávání takových funkčních hodnot, které jsou v uvažovaném definičním oboru vůbec největší nebo nejmenší. Definujeme je takto:

Funkční hodnota $f(x_0)$ je ostrým maximem (minimem) funkce f v oboru M, platí-li pro každé x z oboru M nerovnost $f(x_0) > f(x)$, $(f(x_0) < f(x))$.

Užíváme také poněkud méně přehledné formulace „*funkce f nabývá v bodě x_0 ostrého maxima (minima) v oboru* M", nebo „*funkce f má v bodě x_0 ostré maximum (minimum) vzhledem k oboru* M".

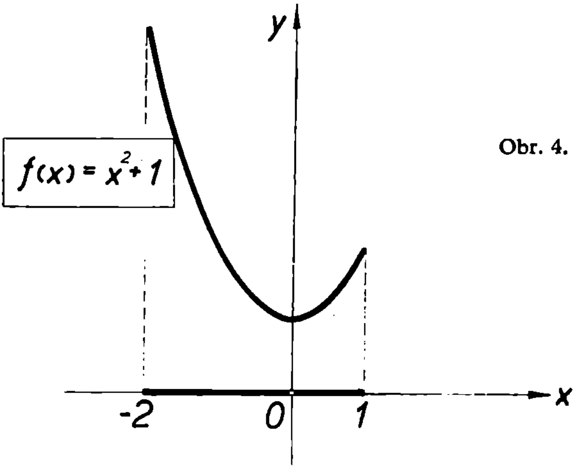
Například funkce $f(x) = 2-x$ definovaná v intervalu $<-1, 3>$ (obr. 3) nabývá ostrého maxima vzhledem k tomuto intervalu v bodě -1, ostrého minima v bodě 3.



Obr. 3.

Funkce $f(x) = x^2 + 1$ definovaná v intervalu $<-2, 1>$ (obr. 4) nabývá v bodě -2 ostrého maxima a v bodě 0 ostrého minima vzhledem k tomuto intervalu. V bodě 0 má také ostré lokální minimum. Kdybychom definovali $f(x) = x^2 + 1$ pouze pro otevřený interval $(-2; 1)$, neměla by tato funkce v intervalu $(-2; 1)$ vůbec ostré maximum. Žádné z čísel menších než 5 totiž nemůže být jejím maximem v $(-2; 1)$, neboť ke každému takovému číslu existuje v $(-2; 1)$ funkční hodnota větší. Číslo 5 pak maximem také není, neboť v $(-2; 1)$ funkce f této hodnoty nedosahuje. Tento příklad ukazuje, jak je důležité vedle funkčního předpisu brát v úvahu i definiční obor.

V posledním příkladu jsme dospěli k momentu, kdy v jistém bodě (byl to bod 0) nabývá funkce současně lokálního extrému i extrému vzhledem k intervalu. Než uvedeme věty týkající se souvislostí mezi lokálními extrémy a extrémy vzhledem k intervalu, je nutno zavést pojem spojité funkce. *Funkcí spojitou v intervalu I budeme* — zhruba řečeno — *rozumět takovou funkci, jejíž graf v tomto intervalu lze nakreslit nepřerušovaným tahem.**) Příkladem spojitých funkcí jsou třeba všechny mnohočleny

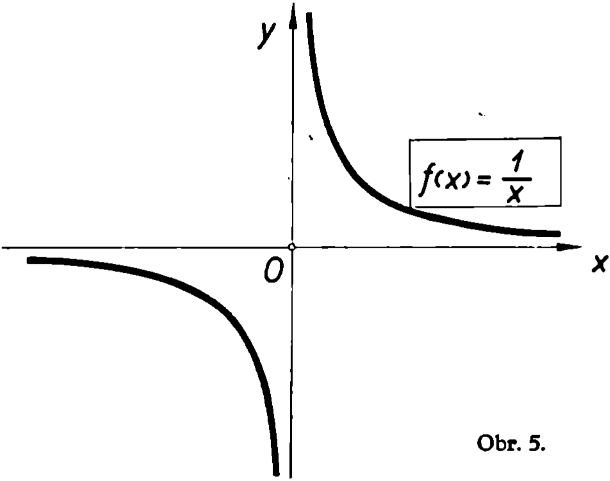


Obr. 4.

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, goniometrické funkce $\sin x$ a $\cos x$ apod. Tyto funkce jsou spojité v intervalu $(-\infty, \infty)$. Ale už třeba funkce $f(x) = \dfrac{1}{x}$ není spojitá

*) Definice zní takto: *Funkce f je spojitá v bodě x_0, když ke každému kladnému číslu ε existuje takové okolí o_{x_0} bodu x_0, že pro všecky argumenty x z tohoto okolí je $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.* (To znamená, že lze dosáhnout toho, aby se funkční hodnota libovolně málo změnila, pokud volíme dost malou změnu argumentu.) Dále definujeme: *Funkce f je spojitá v otevřeném intervalu (a, b), je-li spojitá v každém jeho bodě. Spojitost funkce v uzavřeném intervalu* se definuje obdobně, zavede-li se ještě pojem *spojitosti v bodě zleva* a *zprava.*

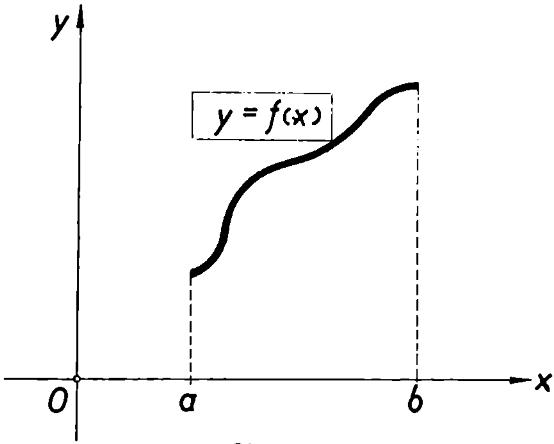
v intervalu $(-\infty, \infty)$, nýbrž jen v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. V bodě $x = 0$ je graf přerušen, funkce v něm není definována (obr. 5). Nyní můžeme vyslovit tyto věty:



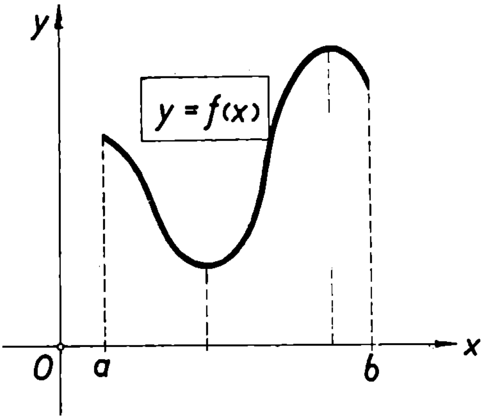
Obr. 5.

Věta 1. *Funkce f spojitá v intervalu $<a, b>$ nabývá svého minima (maxima) vzhledem k tomuto intervalu v bodě x_0, který je buďto krajním bodem intervalu $<a, b>$, nebo v němž funkce f nabývá také lokálního minima (maxima).* Důkaz věty podávat nebudeme, připojujeme alespoň pro lepší pochopení dva obrázky (obr. 6 a 7).

Věta 1 má tento význam pro určování extrému funkce vzhledem k uzavřenému intervalu: Zjistíme-li nějakým způsobem, že třeba lokální maxima této funkce nastávají v bodech $x_1, \ldots, x_n$ z uzavřeného intervalu $<a, b>$, stačí už jen porovnat čísla $f(a), f(b), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. To, které je z nich největší, je maximum funkce f vzhledem k $<a, b>$.



Obr. 6.



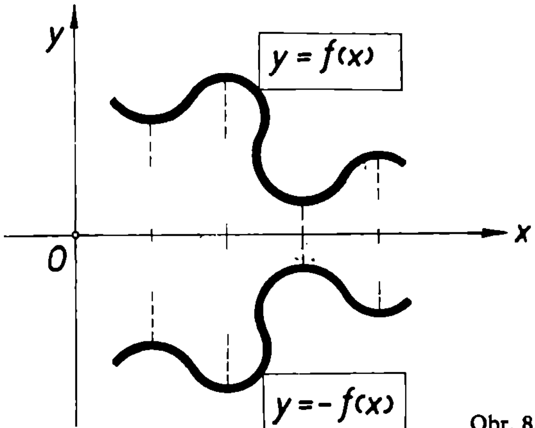
Obr. 7.

Ještě jednodušší situace nastává, jde-li o otevřený interval. (Tento případ je v úlohách z praxe častější.) Platí totiž tato věta:

Věta 2. *Nabývá-li spojitá funkce f v otevřeném intervalu (a, b) svého maxima (minima) vzhledem k (a, b) v bodě x_0, nabývá v bodě x_0 také lokálního maxima (minima).*

Oč je tu situace jednodušší, je zřejmé. Přečtěte si, ale pozorně, začátek věty 2. Na rozdíl od uzavřeného intervalu nemusí totiž vůbec existovat maximum (minimum) spojité funkce vzhledem k otevřenému intervalu. Tak tomu je třeba u funkce $f(x) = x^2 + 1$ v intervalu $(-2, 1)$. (Viz str. 11, obr. 4.) S příklady na užití věty 2 se setkáte zejména v poslední kapitole. Na závěr této úvodní části uvedeme ještě jednu užitečnou větu, jejíž platnost je ihned zřejmá:

Věta 3. *Nechť funkce f nabývá v bodě x_0 lokálního maxima (minima) příp. maxima (minima) vzhledem k intervalu I. Pak*



Obr. 8.

funkce $k.f$ nabývá v bodě x_0 opět lokálního maxima (minima) příp. maxima (minima) vzhledem k I, je-li $k > 0$. Je-li $k < 0$, nabývá funkce $k.f$ v bodě x_0 lokálního minima (maxima) příp. minima (maxima) vzhledem k I.

Případ $k > 0$ je ihned jasný. Pro $k < 0$ stačí uvážit, že grafy funkcí $f(x)$ a $-f(x)$ jsou souměrné podle osy x (viz obr. 8). Z definice extrému funkce vzhledem k intervalu plyne bezprostředně tato věta:

Věta 4. *Nechť interval I_1 je obsažen v intervalu I. Budiž f funkce definovaná v intervalu I (a tím i v intervalu I_1). Je-li x_0 číslo z intervalu I_1 a je-li $f(x_0) = M$ maximum (minimum) funkce f vzhledem k I, je M také maximem (minimem) funkce f vzhledem k I_1.*

Tím uzavíráme teoretickou část našeho výkladu k příkladům. Další doplňky z teorie si probereme až v poslední kapitole.