2. kapitola

TĚTIVOVÝ ČTYŘÚHELNÍK

Definice. Konvexní čtyřúhelník, který je vepsán do kružnice, se nazývá tětivový.

Čtverec, obdélník, rovnoramenný lichoběžník jsou zvláštní případy tětivových čtyřúhelníků. Na obr. 12 je narýsován obecný případ.

Věta 5. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby daný konvexní čtyřúhelník ABCD byl tětivový, je: součet protějších úhlů je 180°.*

Důkaz (obr. 12). Úhel $\beta = \sphericalangle ABC$ je obvodový nad jedním z oblouků AC kružnice k, která je opsána čtyřúhelníku $ABCD$. Protější úhel $\delta = \sphericalangle ADC$ je obvodový nad druhým obloukem AC. Proto

$$\beta + \delta = 180°.$$

O druhých dvou úhlech α, γ platí potom nutně totéž.

Mějme obráceně čtyřúhelník $ABCD$, o jehož protějších úhlech α, γ platí

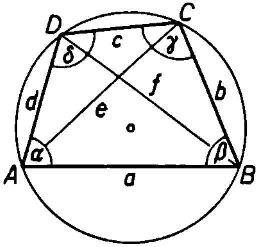
$$\alpha + \gamma = 180°.$$

Trojúhelníku ABD opišme kružnici k. Úhel $\alpha = \sphericalangle BAD$ je v ní obvodovým úhlem nad obloukem $\widehat{BD}$. Obvodový úhel nad druhým obloukem $\widehat{BD}$ má velikost $180° - \alpha = \gamma$ a proto vrchol C je nutně bodem tohoto druhého oblouku. To však znamená, že čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový.

Věta 6. *O úhlopříčkách e, f tětivového čtyřúhelníka platí tzv. Ptolemaiova věta:*

$$ef = ac + bd,$$

kde a, b, c, d jsou délky stran uvažovaného čtyřúhelníka.



Obr. 12

D ů k a z (obr. 12). Nechť je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$ a označme $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$, $AC = e$, $BD = f$ a úhly při vrcholech A, B, C, D po řadě α, β, γ, δ. Na trojúhelníky ABD, BCD použijeme kosinové věty:

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos \alpha, \qquad (1)$$
$$f^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \gamma.$$

Poněvadž však

$$\gamma = 180° - \alpha,$$

změní se druhá rovnice na

$$f^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos \alpha. \qquad (2)$$

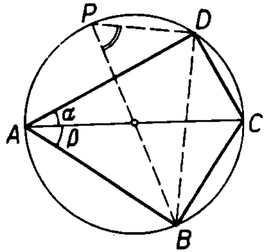
Vyloučením cos α z rovnic (1) a (2) dojdeme k rovnici

$$f^2(ad + bc) = (ab + cd)(ac + bd). \qquad (3)$$

Podobným způsobem z trojúhelníků ABC, ACD dostaneme

$$e^2 (ab + cd) = (ad + bc)(ac + bd) . \qquad (4)$$

Vynásobením rovnic (3), (4) obdržíme již Ptolemaiovu větu.



Obr. 13

Ptolemaiův vzorec může být východiskem k odvození mnoha jiných vzorců rovinné geometrie. Jako doklad pro toto tvrzení odvodíme vzorec pro $\sin(\alpha + \beta)$, jestliže úhly α, β i jejich součet jsou ostré úhly.

V obr. 13 je narýsován tětivový čtyřúhelník $ABCD$ tak, že úhlopříčka AC je průměrem opsané kružnice. Označme

$$\sphericalangle\, CAD = \alpha, \quad \sphericalangle\, CAB = \beta$$

a položme ještě $AC = 1$. Potom z pravoúhlého trojúhelníka ACD máme

$$\sin \alpha = CD : AC = CD, \quad \cos \alpha = AD. \qquad (1)$$

Z pravoúhlého trojúhelníka ACB

$$\sin \beta = BC : AC = BC, \quad \cos \beta = AB. \qquad (2)$$

Jestliže BP je průměr kružnice, je

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BPD = \alpha + \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = BD : BP = BD. \tag{3}$$

Pro čtyřúhelník platí Ptolemaiova věta:

$$AC \,.\, BD = AB \,.\, CD + BC \,.\, AD.$$

Do ní dosadíme z rovnic (1), (2), (3) a dostaneme

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha,$$

což je žádaný vzorec.

Příklady

1. Je dán kosoúhlý trojúhelník ABC. Jeho ortocentrum je V a pata výšky z vrcholu C je D. Z bodu D spusťme kolmice na stranu BC, na výšku BV a AV a na stranu AC; jejich paty po řadě označme K, N, M, L. Dokažte, že tyto paty leží v přímce.

Řešení (obr. 14). Čtyřúhelník $BDNK$ je tětivový. Kružnice jemu opsaná má průměr BD. Proto

$$\sphericalangle KNB = \sphericalangle KDB = 90° - \beta. \tag{1}$$

Čtyřúhelník $DNVM$ je také tětivový (proč?) a tudíž

$$90° - \beta = \sphericalangle MDV = \sphericalangle MNV. \tag{b}$$

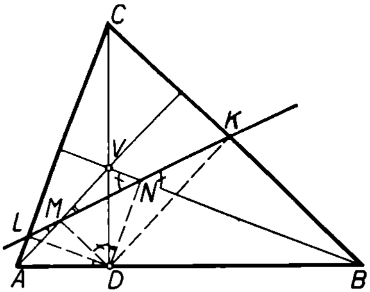
Porovnáním s rovnicí (a) dostáváme

$$\sphericalangle KNB = \sphericalangle MNV,$$

což znamená, že body K, N, M leží v přímce.

Podobně se dá ukázat, že i body L, M, N leží v přímce.

Poněvadž obě získané přímky mají společné dva různé body M, N, splývají. Všechny čtyři body leží tedy v přímce, jak jsme měli dokázat.



Obr. 14

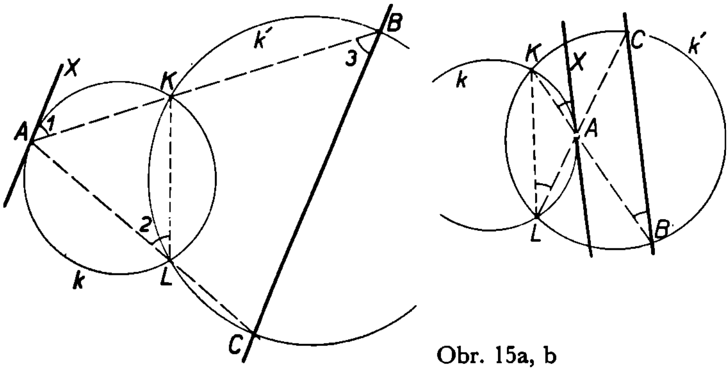
Sami už proveďte důkaz pro tupoúhlý trojúhelník s tupým úhlem při vrcholu A nebo B.

2. Jsou dány dvě kružnice k, k', které mají společné dva různé body K, L. Libovolný bod $A \neq K$, L kružnice k spojme s body K, L. Tyto dvě přímky protnou kružnici k' v dalších dvou bodech B, C. Dokažte, že přímka BC je rovnoběžná s tečnou, sestrojenou v bodě A ke kružnici k.

Důkaz (obr. 15a). a) Předpokládejme nejprve, že bod K leží mezi body A, B a bod L mezi body A, C. Čtyřúhelník $BCLK$ je tětivový a tudíž

$$\sphericalangle KBC = \sphericalangle KLA = \sphericalangle KAX,$$

kde X je libovolný bod tečny v bodě A kružnice k, neležící v polorovině ABC. (Tyto tři úhly jsou v obr. 15a označeny po řadě 3, 2, 1.) Ale úhly KBC, KAX jsou střídavé při přímkách BC, AX a poněvadž jsou shodné, plyne z toho, že přímky AX, BC jsou vzájemně rovnoběžné.



Obr. 15a, b

b) Předpokládejme nyní, že bod A leží mezi body B, K a mezi C, L (obr. 15b). Znovu platí (X je bod tečny kružnice k v bodě A, ležící v polorovině ABC):

$$\sphericalangle KBC = \sphericalangle KLC = \sphericalangle KAX.$$

Důsledek toho je tentýž jako v případě a).

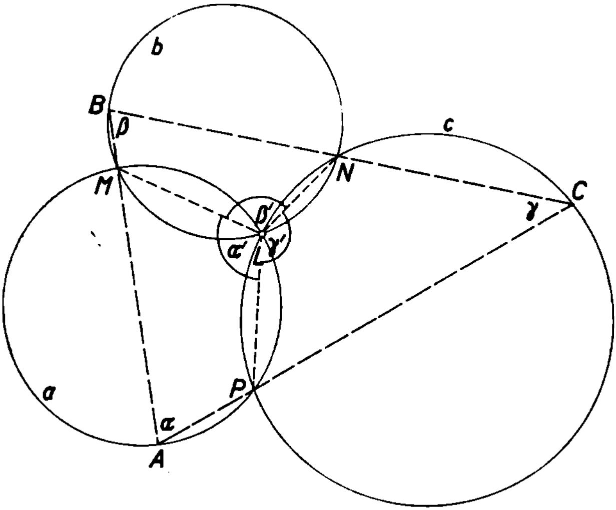
c) Případ, kdy bod B leží mezi body A, K a L mezi A, C (nebo K mezi A, B a C mezi A, L), přenechávám čtenáři.

3. Jsou dány tři různé kružnice a, b, c, které procházejí bodem L. Jejich další průsečíky jsou $M = a \,.\, b$, $N = b \,.\, c$, $P = a \,.\, c$. Na kružnici a zvolme libovolný bod A. Přímka AM protne kružnici b ještě v bodě B a přímka

BN protne kružnici *c* v bodě *C*. Dokažte, že přímka *AC* prochází bodem *P*.

Důkaz (obr. 16). Sestrojme přímky *PL*, *ML*, *NL*. Čtyřúhelník *AMLP* je tětivový a proto o jeho protějších úhlech α, α' platí

$$\alpha + \alpha' = 180°.$$



Obr. 16

Totéž se dá říci o protějších úhlech β, β' v tětivovém čtyřúhelníku *BMLN* a o úhlech γ, γ' v tětivovém čtyřúhelníku *CNLP*. Tedy

$$\beta + \beta' = 180°,$$
$$\gamma + \gamma' = 180°.$$

Napsané tři rovnice sečteme:

$$\alpha + \beta + \gamma + \alpha' + \beta' + \gamma' = 540^\circ.$$

Poněvadž

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ,$$

dostáváme

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ,$$

což znamená, že body A, P, C leží v přímce.

Dokažte už sami, že věta platí, i když bod P leží vně úsečky AC.

Poznámka. Jiný důkaz spočívá v tom, že

$$\sphericalangle APL + \sphericalangle CPL = 180^\circ.$$

4. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$ a na kružnici jemu opsané bod M různý od vrcholů. Součin vzdáleností bodu M od dvou protějších stran je roven součinu vzdáleností téhož bodu od druhých dvou protějších stran. Dokažte.

Důkaz (obr. 17). Sestrojme z bodu M kolmice na strany AB, BC, CD a AD a jejich paty postupně označme E, F, G, H. Spojme ještě bod M s body B, D. Pro stručnější vyjadřování označme

$$ME = e,\ MF = f,\ MG = g,\ MH = h,$$
$$MB = p,\ MD = q.$$

Všimněme si, že

$$\sphericalangle MBA = \sphericalangle MDA$$

a proto

$$\triangle MEB \sim \triangle MHD.$$

Z podobnosti obou trojúhelníků pak plyne

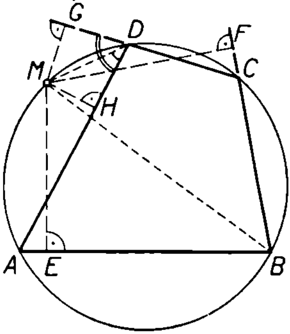
$$ME : MB = MH : MD,$$

což jinak zapsáno dá

$$e : p = h : q \quad \text{čili} \quad p : q = e : h. \tag{1}$$

Z týchž důvodů jako prve je

$$\triangle\, MDG \sim \triangle\, MBF.$$



Obr. 17

O stranách těchto trojúhelníků potom platí

$$MD : MG = MB : MF,$$

což jinak psáno dá

$$q : g = p : f \quad \text{čili} \quad p : q = f : g. \tag{2}$$

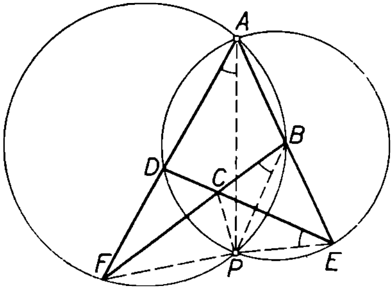
Spojením rovnic (1), (2) získáme žádaný vztah

$$eg = fh.$$

5. Je dán různoběžník $ABCD$. Jeho protější strany se (v prodloužení) protínají v bodech $E \equiv AB \,.\, CD$, $F \equiv AD \,.\, BC$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům ABF, CDF, ADE, BCE procházejí jediným bodem.

Důkaz (obr. 18). Nejprve si uvědomíme, že body A, B, C, D leží v téže polorovině vyťaté přímkou EF. Trojúhelníkům ABF, ADE opišme kružnice, jejichž další společný bod označme $P \not\equiv A$. (Kružnice se nemohou dotýkat.) I platí

$$\sphericalangle PBF = \sphericalangle PAF \equiv \sphericalangle PAD = \sphericalangle PED,$$



Obr. 18

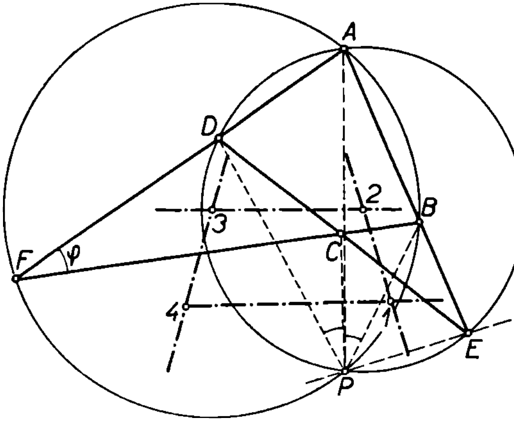
neboť tu jde vesměs o úhly obvodové buď v první, nebo v druhé kružnici. Mimoto vrcholy uvažovaných úhlů leží v téže polorovině vyťaté příslušnou sečnou. Napsaný výsledek můžeme též zapsat

$$\sphericalangle PBC = \sphericalangle PEC.$$

Proto kružnice proložená body B, C, E nutně prochází i bodem P. Jinak řečeno: kružnice opsaná trojúhelníku BCE prochází též bodem P.

Poněvadž totéž můžeme dokázat i o kružnici opsané trojúhelníku CDF, je tím vyslovená věta dokázána.

6. Středy čtyř kružnic, o nichž jsme mluvili v předchozím příkladě, leží na kružnici (říkáme, že tyto čtyři body jsou koncyklické).



Obr. 19

D ů k a z (obr. 19). Označme *1*, *2*, *3*, *4* středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům *BCE*, *ADE*, *ABF*, *CDF*. Tyto středy dostaneme, jestliže sestrojíme symetrály úseček *AE*, *BE*, *CE*, *DE*, *AF*, *BF*, *CF*, *DF*, ale také symetrály úseček *AP*, *BP*, *CP*, *DP*, *EP*, *FP* (vzhledem k větě dokázané v příkl. 5). Ze sestrojení je patrno, že středy *1*, *2* leží na ose souměrnosti úsečky *PE*; středy *2* a *3* leží na ose souměrnosti úsečky *AP* atd. Čtyřúhelník *1234* má tu vlastnost, že každá jeho strana i úhlopříčka je osou souměrnosti nějaké úsečky dříve jmenované.

Označme nyní

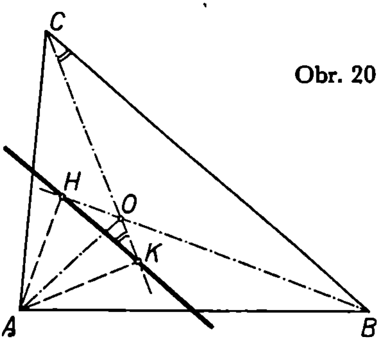
$$\sphericalangle AFB = \varphi.$$

Je patrno, že platí

$$\sphericalangle AFB = \sphericalangle APB \text{ (obvodové úhly v kružnici } ABF\text{)},$$
$$\sphericalangle AFB = \sphericalangle DPC \text{ (obvodové úhly v kružnici } CDF\text{)}.$$

Potom také

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle 231,$$
$$\sphericalangle DPC = \sphericalangle 241.$$



Obr. 20

Nad úsečkou *12* jsou tudíž sestrojeny dva shodné úhly a proto kružnice opsaná trojúhelníku *123* prochází i bodem *4*, a to jsme měli dokázat.

7. Jsou-li H, K paty kolmic, spuštěných z vrcholu A trojúhelníka ABC na osy vnitřních úhlů β, γ, je přímka HK rovnoběžná se stranou BC.

Důkaz (obr. 20). Průsečík os vnitřních úhlů označme O. Pak čtyřúhelník $AKOH$ je tětivový, neboť trojúhelníky AOH, AOK jsou pravoúhlé se společnou přeponou AO a mají tudíž společnou opsanou kružnici. Proto je

$$\sphericalangle HKO = \sphericalangle HAO = 90° - \tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}\gamma.$$

Vidíme, že střídavé úhly (v obr. jsou dvakrát zatržené) při přímkách BC, HK jsou shodné a proto přímky BC, HK jsou vzájemně rovnoběžné, jak jsme měli dokázat.

8. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Přímky AD, BC se protínají v bodě E. Kružnice opsaná trojúhelníku ACE protne přímky AB, CD po druhé v bodech P, Q. Dokažte, že $EP = EQ$.

Řešení. a) Jestliže $P \equiv Q$, je věta triviální.

b) Předpokládejme tedy, že body A, P, Q, E tvoří čtyřúhelník $APQE$. Ten je tětivový a platí tudíž

$$\sphericalangle QPE = \sphericalangle QCE = 180° - \gamma = \alpha,$$

kde α, γ jsou vnitřní úhly daného čtyřúhelníku při vrcholech A, C. Podobně platí

$$\sphericalangle PQE = 180° - \sphericalangle PAE = \alpha .$$

Z toho plyne, že trojúhelník PQE je rovnoramenný a tudíž $EP = EQ$.

c) Může se stát, že jmenované čtyři body tvoří tětivový čtyřúhelník $APEQ$ nebo $AQPE$. Potom jsou přirozeně při důkaze jiné rovnice, ale věta stejně platí. Proveďte už sami.

9. Střed kružnice opsané danému trojúhelníku ABC označme S. Je-li $\sphericalangle ASP = \beta - \gamma$ $(\beta > \gamma)$, kde P je bod poloroviny opačné k polorovině ACB, jsou přímky SP, BC k sobě kolmé. Dokažte.

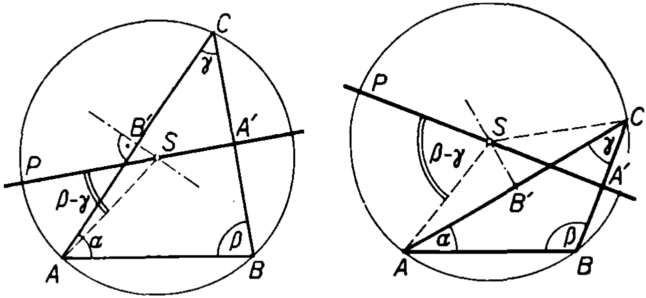
Řešení. Je nutné rozlišovat několik případů.

a) Trojúhelník ABC je ostroúhlý (obr. 21a). Střed strany AC označme B' a počítejme velikosti úhlů ve čtyřúhelníku $SB'CA'$, kde A' je průsečík přímky SP se stranou BC.

$$\sphericalangle SB'C = 90°, \quad \sphericalangle B'CA' = \gamma,$$
$$\sphericalangle ASB' = \beta, \quad \sphericalangle ASP = \beta - \gamma$$

a z toho

$$\sphericalangle PSB' = \beta - (\beta - \gamma) = \gamma.$$



Obr. 21a, b

Dále je

$$\sphericalangle B'SA' = 180° - \gamma.$$

Čtyřúhelník $SB'CA'$ je tudíž tětivový a poněvadž

$$\sphericalangle SB'C = 90°, \quad \text{je i } \sphericalangle SA'C = 90°,$$

tj. přímky SP, BC jsou vzájemně kolmé.

b) Trojúhelník ABC je tupoúhlý s tupým úhlem při vrcholu B (obr. 21b). Při stejném označení jako v případě a) platí

$$\sphericalangle SA'C = 90°.$$

Poněvadž

$$\sphericalangle ASC = 360° - 2\,\beta,$$

je

$$\sphericalangle CSA' = 360° - 2\,\beta - (180° - \beta + \gamma) = \alpha.$$

Dále

$$\sphericalangle SCB' = \sphericalangle SAB' = 90° - \tfrac{1}{2}(360° - 2\beta) = \beta - 90°,$$

takže

$$\sphericalangle SCA' = \sphericalangle SCB' + \gamma = 90° - \alpha.$$

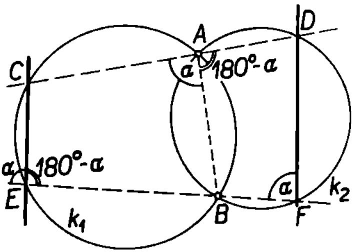
Trojúhelník SCA' je tedy pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu A', čímž je důkaz proveden.

c) Jestliže trojúhelník ABC je tupoúhlý s tupým úhlem třeba při vrcholu A, dokazuje se vyslovená věta stejným způsobem.

10. Dvě různé kružnice k_1, k_2 mají společné dva různé body A, B. Bodem A proložme libovolnou přímku, která protne podruhé kružnici k_1 v bodě C a kružnici k_2 v bodě D. Proložme ještě libovolnou přímku bodem B a ta protne kružnice k_1, k_2 po řadě v bodech E, F. Dokažte, že přímky CE, DF jsou navzájem rovnoběžné.

Důkaz. a) Předpokládejme, že body E, F leží v téže polorovině určené přímkou CD (obr. 22a). Potom čtyřúhelník $ABFD$ je tětivový. Označíme-li $\sphericalangle BFD = \alpha$, musí být

$$\sphericalangle BAD = 180° - \alpha.$$

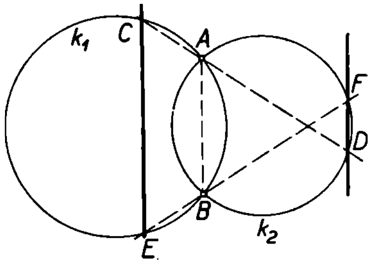


Obr. 22a

Poněvadž i čtyřúhelník $ABEC$ je tětivový, máme

$$\sphericalangle CAB = \alpha \quad \text{a} \quad \sphericalangle CEB = 180° - \alpha.$$

Je vidět, že přilehlé úhly $\sphericalangle BFD$, $\sphericalangle CEB$ při přímkách CE, DF jsou výplňkové, a to znamená, že přímky CE, DF jsou rovnoběžné, jak jsme měli dokázat.



Obr. 22b

b) Předpokládejme dále, že body E, F leží v opačných polorovinách, vyťatých přímkou CD (obr. 22b), a to tak, že body F, D leží v téže polorovině vyťaté přímkou AB a body C, E v polorovině opačné. Potom buď čtyřúhelník $ABDF$, nebo čtyřúhelník $ABFD$ je tětivový. Všimněme si prvního případu. Označíme-li opět $\sphericalangle BFD = \alpha$, můžeme dojít postupně k těmto vztahům:

$$\begin{aligned} \sphericalangle BFD &= \sphericalangle BAD = \alpha, \\ \sphericalangle BAC &= 180° - \alpha, \\ \sphericalangle CEB &= \sphericalangle CEF = \alpha, \end{aligned}$$

neboť čtyřúhelník $ABEC$ je tětivový. Přímka EF tvoří při přímkách CE, FD shodné střídavé úhly a proto přímky CE, FD jsou vzájemně rovnoběžné.

Případ tětivového čtyřúhelníku $ABFD$ se řeší podobně.

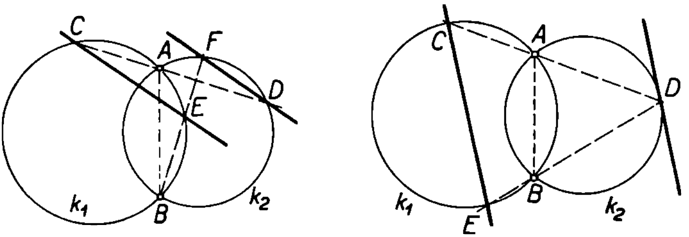
c) Předpokládejme, že body E, F leží v opačných polorovinách vyťatých přímkou CD a současně body D, E, F leží v téže polorovině, vyťaté přímkou AB, zatímco bod C leží v polorovině opačné (obr. 22c). Pak platí

$$\begin{aligned} \sphericalangle BED &= \sphericalangle BAD = \alpha, \\ \sphericalangle CAB &= \sphericalangle CEB = 180° - \alpha, \\ \sphericalangle CEF &= \alpha \end{aligned}$$

a z toho již plyne, že přímky CE, FD jsou navzájem rovnoběžné.

d) Jiná možnost je ta, že všechny čtyři body C, D, E, F leží v téže polorovině, vyťaté přímkou AB. A opět tu můžeme rozlišovat, kdy body na oblouku $\widehat{AB}$ kružnice k_1 jsou v pořadí A, C, E, B a přitom pořadí bodů na oblouku $\widehat{AB}$ kružnice k_2 je A, F, D, B nebo obě skupiny jsou v jiném pořadí. Nebudeme všechny možnosti uvádět, přenecháme to píli čtenářů. Avšak vždy platí, že přímky CE, DF jsou navzájem rovnoběžné.

e) Všimněme si ještě případu, kdy body D, F (nebo body E, C) splynou. Mohli bychom si všimnout toho, na kterém oblouku kružnic k_2 (nebo k_1) jsou splynuvší body.



Obr. 22c, d

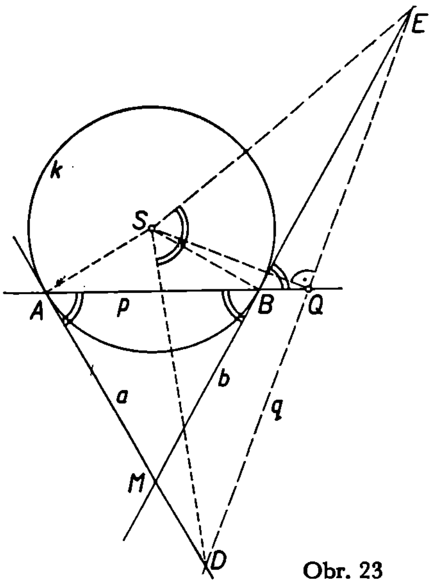
V obr. 22d je nakreslen případ, že $D \equiv F$ a přitom tento bod je od bodů C, E oddělen přímkou AB. Potom přímka DF přejde v tečnu $t \equiv DM$ kružnice k_2 v bodě $D \equiv F$. I platí

$$\begin{aligned} \sphericalangle MDA &= \sphericalangle ABD = \alpha, \\ \sphericalangle ABE &= 180° - \alpha, \\ \sphericalangle ECA &= \alpha \end{aligned}$$

a přímky t, CE jsou opět rovnoběžné.

f) Za zmínku stojí i případ, kdy přímka CD nebo přímka EF, nebo obě současně se stanou tečnou kružnice k_1 (kružnice k_2). I potom platí vyslovená věta.

11. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a její sečna p, která není průměrem. V průsečících A, B přímky p s danou kružnicí jsou sestrojeny tečny a, b dané kružnice. Na prodloužení tětivy AB za bod B je dán bod Q. Přímka q, která prochází bodem Q kolmo na přímku SQ, protne tečny a, b po řadě v bodech D, E. Dokažte, že $QD = QE$.



Obr. 23

Řešení (obr. 23). Čtyřúhelník $SBQE$ je tětivový, neboť

$$\sphericalangle SBE = \sphericalangle SQE = 90°,$$

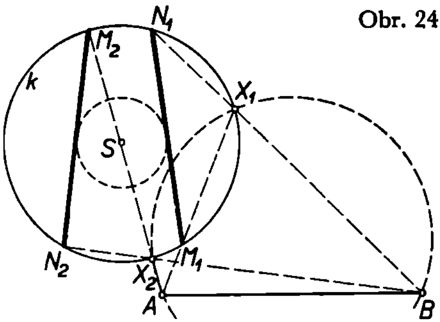
a proto

$$\sphericalangle QSE = \sphericalangle QBE.$$

Také čtyřúhelník $SADQ$ je tětivový, neboť dva jeho protější úhly jsou pravé. Z toho plyne shodnost úhlů a důs-

$$\sphericalangle DAQ = \sphericalangle DSQ = \sphericalangle MBA = \sphericalangle EBQ = \sphericalangle ESQ$$

ledkem toho je, že trojúhelník DES je rovnoramenný a vyslovená věta je pravdivá.



Obr. 24

12. Je dána kružnice k a dva různé body A, B vně kružnice. Na kružnici k najděte bod X tak, aby přímky AX, BX proťaly kružnici k v bodech M, N té vlastnosti, že tětiva MN má danou délku $d \neq 0$.

Řešení (obr. 24). Je-li dána délka tětivy MN v kružnici k, je tím dán v této kružnici i obvodový úhel MXN. Ale tu

buď $\sphericalangle MXN = \sphericalangle AXB$ $(= \omega)$,

neboť to jsou úhly vrcholové,

nebo $\sphericalangle MXN = 180° - \sphericalangle AXB$ $(= 180° - \omega)$,

neboť to jsou úhly vedlejší.

Z toho pak máme tuto konstrukci. Nad úsečkou AB sestrojíme kruhový oblouk, z jehož bodů je úsečku AB vidět pod úhlem ω (nebo pod úhlem $180° - \omega$). Body společné tomuto oblouku a dané kružnici jsou hledané body.

Správnost konstrukce plyne z předešlého.

Úloha má nejvýše čtyři různá řešení, neboť množina všech bodů, z nichž úsečku AB je vidět pod úhlem ω, jsou dva kruhové oblouky a ty mohou mít s danou kružnicí k společné nejvýše čtyři různé body. Mohou však být také jen tři, dva nebo pouze jeden. Avšak je také možné, že neexistuje žádný společný bod, a pak úloha nemá žádné řešení.

Kdyby $MN = AB$ a body A, B byly zvoleny na kružnici k, potom by úloha měla nekonečně mnoho řešení. Každý bod kružnice k, vyjma body $A \equiv M$, $B \equiv N$, by splňoval podmínky dané úlohy.

13. Danému rovnostrannému trojúhelníku ABC je opsána kružnice a na ní je zvolen libovolný bod M různý od vrcholů A, B, C. Je-li M na kratším oblouku AC, dokažte, že platí $MB = MA + MC$.

Řešení (obr. 25). a) Čtyřúhelník $ABCM$ je tětivový a proto o něm platí Ptolemaiova věta:

$$AC . MB = AB . CM + BC . AM.$$

Poněvadž však

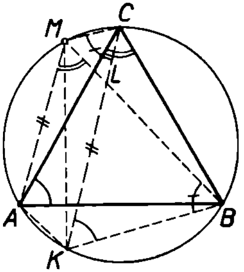
$$AC = BC = AB,$$

přejde po zkrácení napsaná rovnice v rovnici

$$MB = MA + MC,$$

což je žádaný vztah.

b). Uvedeme zde ještě jeden důkaz, v němž budeme užívat jen vlastností obvodových úhlů nad týmž obloukem.



Obr. 25

Bodem C vedená rovnoběžka s přímkou MA protne znovu kružnici v bodě K. Čtyřúhelník $AMCK$ je rovnoramenný lichoběžník. Jeho úhlopříčky jsou shodné a proto i obvodové úhly nad oběma úhlopříčkami jsou shodné (mají-li ovšem svůj vrchol oba na delším kruhovém oblouku nebo na kratším). Proto, je-li obvodový úhel nad úhlopříčkou AC roven 60°, je i obvodový úhel nad úhlopříčkou KM roven 60°.

Všimněme si, že

$$\begin{aligned}
\sphericalangle CAB &= \sphericalangle CKB = \sphericalangle CMB = 60^\circ, \\
\sphericalangle ACB &= \sphericalangle AMB = 60^\circ, \\
\sphericalangle KBM &= \sphericalangle KCM = \sphericalangle ABC = 60^\circ
\end{aligned}$$

a tudíž trojúhelník CML — kde L je průsečík přímek MB, CK — je rovnostranný. Z toho

$$MC = ML.$$

Avšak také trojúhelník BKL je rovnostranný a tedy

$$BL = BK.$$

K tomu ještě dodejme, že

$$\sphericalangle ABM = \sphericalangle KMB,$$

neboť to jsou obvodové úhly nad shodnými tětivami, a proto

$$MA = BK.$$

Máme tedy

$$MB = ML + LB = MC + BK = MC + MA,$$

a to jsme měli dokázat.

Cvičení

1. Je dána úsečka AB a přímka $p \neq AB$. Na přímce p najděte bod, z něhož je úsečku AB vidět pod úhlem 75°.

2. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a její průměr MN. Najděte bod X, z něhož je danou kružnici vidět pod úhlem $\alpha = 98°$ a její průměr MN pod úhlem $\beta = 45°$.

3. Jsou dány úsečky $AB = 7$ cm, $BC = 4$ cm, svírající spolu úhel 90°. Sestrojte bod X, z něhož je první úsečku vidět pod úhlem 75° a druhou pod úhlem 60°.

4. Vypočtěte vnitřní úhly ortického trojúhelníka. Dokažte, že je-li daný trojúhelník ABC ostroúhlý a jeden jeho úhel menší než 45°, pak ortický trojúhelník je tupoúhlý.

5. Podívejte se na obr. 9a, b. Ukažte, že vrchol A půlí oblouk $B''C''$, vrchol B oblouk $A''C''$ a vrchol C oblouk $A''B''$. Dokažte dále, že trojúhelník $A''B''C''$ je stejnolehlý s ortickým trojúhelníkem.

6. Na základě výsledku předchozího cvičení sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány body A'', B'', C''.

7. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dán jeho trojúhelník ortický.

8. Dvě různé kružnice k, k' mají společné právě dva různé body A, B. Bodem A veďme libovolnou přímku, která kružnice protne kromě bodu A ještě v bodech P, P', různých od bodu B. Ukažte, že trojúhelníky BPP' takto získané lze roztřídit do tří skupin tak, že každé dva trojúhelníky téže skupiny jsou navzájem podobné.

9. Jsou dány dvě různé přímky m, n a číslo $r > 0$. Sestrojte kružnici poloměru r, která má střed na přímce m a přímku n protíná pod úhlem $\alpha = 60°$.

10. Jsou dány dvě kružnice, které nemají žádný společný bod a každá leží vně druhé. Kružnice opsaná nad jejich střednou jako nad průměrem obsahuje všechny čtyři průsečíky vnitřních tečen s vnějšími.

11. Jsou dány dvě kružnice k, k', které mají společné právě dva různé body K, L. Libovolný bod $A \neq K, L$ kružnice k spojme s body K, L a tyto dvě přímky protnou kružnici k' v bodech B, C. Dokažte, že přímka BC je rovnoběžná s tečnou sestrojenou ke kružnici k v bodě A.

12. Na dané kružnici k jsou dány dva různé body A, B. Jimi jsou proloženy libovolné různé a vzájemně rovnoběžné tětivy AA', BB'. Body A', B' jsou proloženy opět libovolné, různé (a jiné než jsou AA', BB') tětivy $A'A''$, $B'B''$. Ukažte, že tětiva AA'' je rovnoběžná s tětivou BB''.

13. Danému různostrannému trojúhelníku ABC opište rovnostranný trojúhelník KLM tak, aby strana KL byla rovnoběžná s danou přímkou s, která není rovnoběžná se žádnou stranou daného trojúhelníka, a aby vrchol A ležel mezi body L, M, vrchol B mezi K, M a vrchol C mezi body K, L.

14. Sestrojte tětivový čtyřúhelník, je-li dáno $a = 8$, $b = 6$, $d = 5$, $\beta = 60°$.

15. Z rovnic (3) a (4) na str. 21-22 odvoďte vztah

$$e : f = (ab + cd) : (ad + bc).$$

16. Z Ptolemaiovy věty vyvoďte vzorec pro $\cos(\alpha - \beta)$ opět za předpokladu, že $\alpha < 90°$, $\beta < 90°$. (Označte $\sphericalangle CAD = \alpha$, $\sphericalangle ACB = \beta$.)

17. Je dán libovolný trojúhelník ABC. Na straně BC zvolme libovolný bod A', na straně AC libovolný bod B' a na straně AB libovolný bod C'. Zvolené body jsou vesměs různé od vrcholů A, B, C. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům $AB'C'$, $BA'C'$, $CA'B'$ procházejí jediným bodem.

18. Střed O vepsané kružnice danému trojúhelníku ABC, střed O_c kružnice vně vepsané (která se strany AB dotýká ve vnitřním bodě) a vrcholy A, B leží na téže kružnici.

19. Kružnice opsaná danému trojúhelníku ABC a kružnice opsaná trojúhelníku, jehož dva vrcholy jsou A, B a třetí vrchol je ortocentrum, jsou shodné. Dokažte.

20. Je dána kružnice k a její pevná tečna t s bodem dotyku T. Libovolné dvě různé a vzájemně rovnoběžné tečny $a \not\equiv t \not\equiv b$ kružnice k vytnou na tečně t dva body A, B. Dokažte, že součin $AT . BT$ je nezávislý na směru tečen a, b.

21. K danému trojúhelníku ABC je trojúhelník DEF ortický (D leží na BC, E na AC, F na AB). Dokažte, že $\triangle ABC \sim \triangle DEC$. Najděte ještě další dva trojúhelníky podobné danému.

22. Je dána kružnice k a na ní bod P. Bodem P narýsujme čtyři různé polopřímky a, b, c, d tak, aby každé

dvě sousední svíraly úhel 45°. Tyto polopřímky protnou kružnici k v bodech A, B, C, D, jež jsou vrcholy čtverce.

23. Trojúhelník ABC má pevnou stranu AB a úhel této straně protilehlý má konstantní velikost. Paty výšek z vrcholů A, B označme po řadě D, E. Ukažte, že velikost úsečky DE je pro všechny trojúhelníky ABC, které vyhovují daným dvěma podmínkám, konstantní.

24. Příklad 5 řešte ještě jednou, a to pro případ, že přímka a leží mezi přímkami b, c.