Kružnice

1. kapitola. Obvodové úhly v kružnici

In: Stanislav Horák (author): Kružnice. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1966. pp. 3–19.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403592

1. kapitola

OBVODOVÉ ÚHLY V KRUŽNICI

Definice. Obvodový úhel v kružnici je úhel, jehož vrchol leží na kružnici a obě jeho ramena jsou sečnami kružnice.

V obr. 1a, b, c je znázorněn obvodový úhel s vrcholem C. Jeho ramena protínají kružnici k kromě v C ještě v bodech A, B. Úhel ASB se nazývá středový. O obvodovém úhlu ACB říkáme, že je sestrojen nad obloukem AB nebo nad tětivou AB. Přitom musíme být opatrní. Nad tětivou AB, která není průměrem, jsou dvojí obvodové úhly; v jedné polorovině, vyťaté sečnou AB, jsou úhly ostré, v opačné polorovině úhly tupé. Jestliže AB je průměrem, pak obojí úhly jsou pravé.

Věta 1. *Obvodové úhly nad týmž kruhovým obloukem jsou shodné a rovnají se polovině příslušného středového úhlu.*

Důkaz. a) Nejprve provedeme důkaz pro případ, že jedno rameno obvodového úhlu prochází středem S dané kružnice (obr. 1a). Máme dokázat, že

$$\sphericalangle ASB = 2 \,.\, \sphericalangle ACB.$$

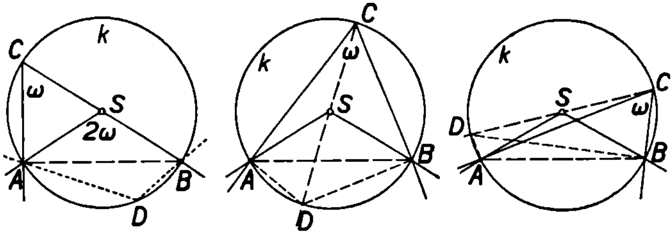
Pro jednoduchost označíme 2ω velikost středového úhlu ASB. Všimněme si, že trojúhelník ACS je rovnoramenný a proto proti jeho ramenům leží shodné úhly. Jejich součet je roven vnějšímu úhlu při vrcholu S, a to je právě náš středový úhel. Proto

$$\sphericalangle ASB = \sphericalangle ACS + \sphericalangle CAS = \omega + \omega = 2\omega,$$

jak jsme měli dokázat.

b) V obr. 1b je znázorněna poloha, kde střed S je vnitřním bodem úhlu ACB. Přímka CS protne kružnici ještě v bodě D a rozdělí obvodový i středový úhel na dvě části. Jsou to obvodové úhly ACD, DCB a středové úhly ASD, DSB. Z odst. a) již víme, že

$$\sphericalangle ASD = 2 \,.\, \sphericalangle ACD \text{ a } \sphericalangle DSB = 2 \,.\, \sphericalangle DCB \,.$$



Obr. 1a, b, c

Sečtením těchto dvou rovnic obdržíme výsledek

$$\sphericalangle ASB = 2 \,.\, \sphericalangle ACB \,.$$

c) V obr. 1c je vyznačena další možnost; střed S je vnějším bodem úhlu ACB. I zde spojíme body C, S a tato přímka protne kružnici ještě v bodě D. Podle odst. a) tu opět platí

$$\sphericalangle DSB = 2 \,.\, \sphericalangle DCB, \qquad \sphericalangle DSA = 2 \,.\, \sphericalangle DCA.$$

Odečtením druhé rovnice od první dostaneme

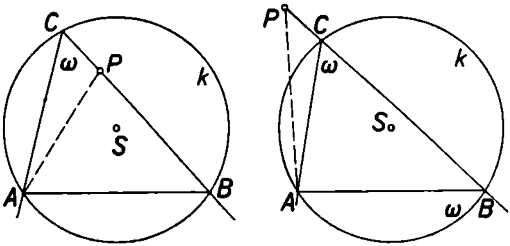
$$\sphericalangle ASB = 2 \,.\, \sphericalangle ACB \,.$$

Tím jsme s důkazem hotovi.

Snad bychom si mohli ještě připomenout: jestliže AB je průměr kružnice, potom $\sphericalangle ASB = 180°$ a $\sphericalangle ACB = 90°$ a věta 1 nám v tomto případě dává známou *Thaletovu větu*.

Větu 1 doplníme ještě následující větou:

Věta 2. *Jestliže bod P je vnitřním bodem kružnice (vnějším bodem kružnice), pak $\sphericalangle APB$ je větší (menší) než obvodový úhel ACB, přičemž body C, P leží v téže polorovině vyťaté přímkou AB.*



Obr. 2a, b

Důkaz. a) Mějme nejprve případ, že bod P je vnitřním bodem kružnice (obr. 2a). Přímka BP protne kružnici ještě v bodě C. Víme, že součet dvou vnitřních úhlů trojúhelníka je roven vnějšímu úhlu při třetím vrcholu. Pro trojúhelník APC z toho plyne

$$\sphericalangle ACP + \sphericalangle CAP = \omega + \sphericalangle CAP = \sphericalangle APB.$$

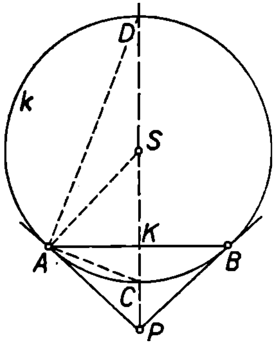
Z toho už máme

$$\omega < \sphericalangle APB,$$

jak jsme měli dokázat.

b) Bod P je vnějším bodem kružnice (obr. 2b). Přímka BP protne kružnici ještě v bodě C. Podle věty o součtu dvou vnitřních úhlů v trojúhelníku platí pro trojúhelník APC

$$\sphericalangle APB + \sphericalangle CAP = \\ = \sphericalangle ACB = \omega .$$



Obr. 2c

Odtud

$$\sphericalangle APB < \omega .$$

c) Může se však stát, že přímka BP je tečnou kružnice. Potom bychom bod P spojili s bodem A a důkaz provedli jako předtím. Kdyby i přímka AP byla tečnou (obr. 2c), spojili bychom bod P se středem S. Tato přímka protne kružnici k v bodech C, D. Jestliže bod C leží s bodem P v téže polorovině o hraniční přímce AB, pak podle výsledku odst. b) platí i zde $\sphericalangle ACB > \sphericalangle APB$.

Až dosud jsme uvažovali o obvodových úhlech v polorovině ABS. Obvodové úhly v opačné polorovině mají velikost $180° - \omega$, neboť podle věty 1 je jejich velikost rovna polovině příslušného středového úhlu, tj. polovině vypuklého úhlu ASB.

Z vět 1 a 2 vyplývá, že jen body kružnice mají tu vlastnost, že $\sphericalangle ACB = \omega$. Říkáme také, že z bodu C vidíme úsečku AB pod úhlem ω. Podle toho lze vyslovit větu: množina všech bodů poloroviny ABS, z nichž úsečku AB vidíme pod úhlem ω ($0° < \omega < 180°$), je kruhový oblouk. Ještě širší věta je

Věta 3. *Množina všech bodů v rovině, z nichž danou úsečku AB vidíme pod úhlem* ω *(*$0° < \omega < 180°$*), jsou dva kruhové oblouky souměrně sdružené podle přímky AB. Do množiny však nemůžeme počítat samy body A, B.*

Z této věty je patrné, že kružnici můžeme sestrojit bodově pomocí obvodových úhlů.

Věta 4. *Ostrý (tupý) úhel sevřený tětivou AB, jež není průměrem a tečnou v jejím krajním bodě, je roven ostrému (tupému) obvodovému úhlu nad tětivou AB.* (Je to tzv. úsekový úhel.)

Důkaz (obr. 2c). Střed tětivy AB označme K. Trojúhelníky SAK, APK jsou podobné a z toho vyplývá platnost věty o ostrých úhlech. Platí-li však věta o ostrých úhlech, platí nutně i o tupých.

Poznámka. Věta platí přirozeně i v případě, že AB je průměr, ale pak je samozřejmá.[1])

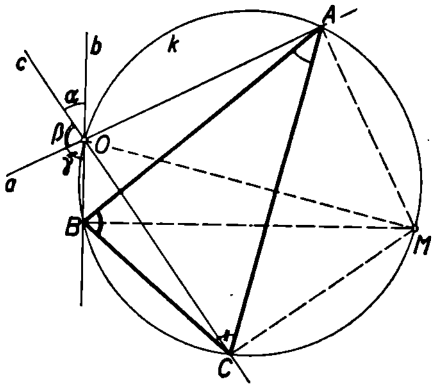
Příklady

1. Jsou dány tři přímky a, b, c procházející bodem O tak, že $\sphericalangle\, bc = \alpha$, $\sphericalangle\, ca = \beta$, $\sphericalangle\, ab = \gamma$ a přitom se úhly nepřekrývají a platí o nich $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Z libovolného bodu M, který neleží na žádné z daných přímek, spusťme na tyto přímky kolmice a paty označme po

[1]) Úvahy můžeme zakončit pomocnou větou: *Obvodové úhly nad shodnými kruhovými oblouky jsou shodné a obráceně, shodné obvodové úhly vytínají na kružnici shodné oblouky.* Důsledkem této věty je věta: *Osa obvodového úhlu prochází středem kruhového oblouku, nad nímž je obvodový úhel sestrojen.*

řadě A, B, C. Body A, B, C jsou vrcholy trojúhelníka, jehož vnitřní úhly jsou α, β, γ a kružnice jemu opsaná obsahuje body M, O. Dokažte.

Důkaz (obr. 3). Trojúhelníky MOA, MOB, MOC jsou pravoúhlé a mají společnou přeponu MO. Musí mít tudíž společnou i opsanou kružnici. Poněvadž body A, B, C jsou vesměs různé a leží na kružnici, tvoří trojúhelník a jemu opsaná kružnice prochází body M, O.



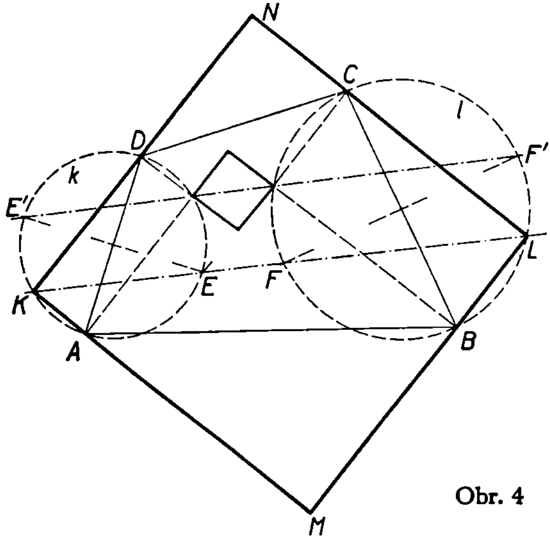
Obr. 3

Ještě vypočteme velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka ABC. Víme, že $\sphericalangle BOC = \alpha$ je obvodový nad tětivou BC. Ale nad touto tětivou je také úhel obvodový BAC a platí tedy

$$\sphericalangle BAC = \alpha .$$

Poněvadž se totéž dá dokázat pro úhel β, je tím dokázána i druhá část tvrzení. Je k tomu však třeba ještě něco podotknout.

Obr. 3 byl narýsován tak, že body A, B, C ležely vždy v téže polorovině, vyťaté kteroukoliv z přímek a, b, c. Je však myslitelný i případ, že např. bod A je vnitřním bodem jedné poloroviny, vyťaté přímkou b, a bod C je vnitřním bodem poloroviny opačné. Avšak vyslovená věta platí i v tomto případě, jak se snadno přesvědčíte.



Obr. 4

A ještě něco. Při důkazu jsme mlčky předpokládali, že body A, B, C, O, M jsou vzájemně různé. Může se však stát, že $A \equiv O$. Ale i pak platí vyslovená věta.

2. Danému různoběžníku $ABCD$ opište čtverec.

Řešení (obr. 4). Hledaný čtverec označme $KMLN$. Vrchol K leží pak na kružnici k sestrojené nad průměrem

AD. Protější vrchol *L* leží podobně na kružnici *l* opsané nad průměrem *BC*. Poněvadž úhlopříčka *KL* půlí vnitřní úhly čtverce, musí procházet bodem *E*, který půlí tu půlkružnici *AD*, na níž neleží bod *K*. Z téhož důvodu musí tato úhlopříčka procházet bodem *F*, který půlí tu půlkružnici *BC*, na níž neleží bod *L*. Tedy přímka *EF* je úhlopříčkou hledaného čtverce.

Konstrukce vyplývá z provedeného rozboru. Sestrojíme přímku *EF* a ta protne kružnice *k*, *l* v bodech *K*, *L* různých od bodů *E*, *F*. Strany čtverce procházejí pak vrcholy *A*, *B*, *C*, *D*.

Nalezený čtyřúhelník je skutečně čtverec, neboť $\sphericalangle K = \sphericalangle L = 90°$ a přitom je souměrný podle úhlopříčky *KL*.

Rozpůlením půlkružnice *AD* získáme dva různé body *E*, *E'* a podobně na kružnici *l* obdržíme dva body *F*, *F'*. Za předpokladu $E \not\equiv F$ má úloha čtyři různá řešení, neboť můžeme spojovat body *E*, *F* nebo *E'*, *F*, nebo *E*, *F'*, nebo *E'*, *F'*. K tomu je ovšem nutné rozšířit pojem „opsaný čtverec" na každý čtverec, jehož strany třeba v prodloužení procházejí vrcholy *A*, *B*, *C*, *D*.

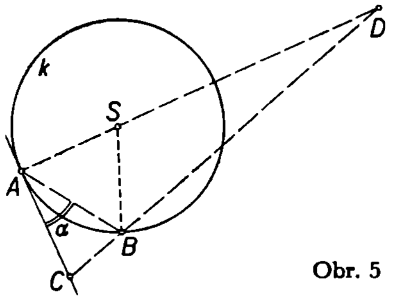
V případě, že $E \equiv F$, existuje nekonečně mnoho opsaných čtverců, neboť každou přímku, jdoucí bodem $E \equiv F$, můžeme považovat za úhlopříčku *KL* hledaného čtverce.

3. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a v ní libovolná tětiva *AB*, která není průměrem. Na tečně v bodě *A* určíme bod *C* tak, aby $AB = AC$ a aby $\sphericalangle BAC < 90°$. Jestliže přímky *AS*, *BC* se protnou v bodě, který označíme *D*, pak platí $\sphericalangle ADB = \frac{1}{4} \sphericalangle ASB$. Dokažte toto tvrzení.

Důkaz (obr. 5). Úsekový úhel *CAB* označme α.

Poněvadž trojúhelník ABC je rovnoramenný, platí

$$\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ACD = \sphericalangle CBA = \tfrac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \tfrac{1}{2}\alpha.$$



Obr. 5

Úhel ASB je středový a přísluší úsekovému úhlu CAB a proto

$$\sphericalangle ASB = 2\alpha.$$

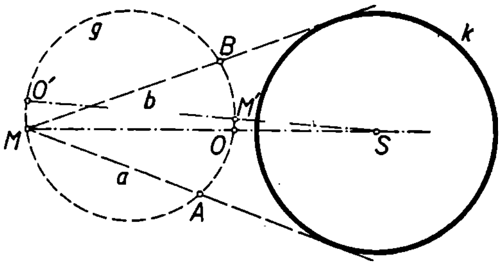
Nyní již můžeme počítat velikost úhlu ADC:

$$\sphericalangle ADC = 90° - \sphericalangle ACD = \tfrac{1}{2}\alpha,$$

což je skutečně čtvrtina středového úhlu ASB, jak bylo v úloze tvrzeno.

4. Jsou dány tři body A, B, S neležící v přímce. Kolem bodu S opište kružnici k té vlastnosti, že tečny k ní vedené z bodů A, B svírají úhel dané velikosti ω.

Řešení (obr. 6). Sestrojíme množinu všech bodů, z nichž je úsečku AB vidět pod úhlem ω. Tím jsou, jak víme, dva kruhové oblouky. Uvažujme zatím pouze jeden z nich, který leží na kružnici g, a mysleme si, že úloha je již rozřešena, takže bod M je průsečík hledaných tečen a, b. Přímka MS je pak osou tečen a, b a prochází středem O toho oblouku $\widehat{AB}$ kružnice, který nenáleží naší množině bodů.

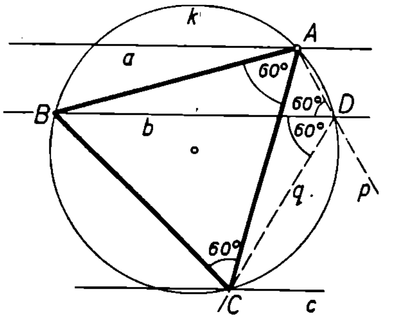


Obr. 6

Z toho dostáváme tuto konstrukci. Nejdříve sestrojíme kružnici g. Ten oblouk $\widehat{AB}$, který nenáleží do naší množiny bodů, rozpůlíme bodem O. Přímka SO protne kružnici g ještě v bodě M. Přímky $a \equiv MA$, $b \equiv MB$ jsou tečny hledané kružnice k, kterou již snadno sestrojíme.

Kružnice k takto sestrojená skutečně vyhovuje požadavkům úlohy. Má střed v bodě S, dotýká se přímek a, b, z nichž první prochází bodem A a druhá bodem B. Obě tečny svírají úhel předepsané velikosti.

Úloha má nejvýše čtyři různá řešení, pokud $O \not\equiv S$. Bod O' na kružnici g, který půlí delší oblouk $\widehat{AB}$, vede k dalšímu řešení. V tomto případě však kružnice k', jež je řešením naší úlohy, leží v tupém úhlu tečen a', b'. K uvažované množině bodů náleží ještě kruhový oblouk na kružnici g_1, souměrně sdružený s kružnicí g podle AB, a to nás přivádí k druhým dvěma řešením. Jestliže kružnice g nebo g_1 prochází bodem S, zmenší se počet řešení o jedno. Jestliže posléze $O \equiv S$, má úloha nekonečně mnoho řešení.



Obr. 7

5. Jsou dány tři různé rovnoběžky a, b, c a na přímce a bod A. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby vrchol B ležel na přímce b a vrchol C na přímce c.

Řešení (obr. 7). Mysleme si, že úloha je rozřešena a opišme trojúhelníku ABC kružnici k. Označení přímek lze provést tak, že přímka b leží mezi přímkami a, c. Pak přímka b protne kružnici k kromě vrcholu B ještě v bodě D. Je patrno, že

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB = 60°, \tag{a}$$

a také

$$\sphericalangle BDC = \sphericalangle BAC = 60°. \tag{b}$$

Z toho pak plyne tato konstrukce. Bodem A proložíme přímku p, svírající s přímkou b úhel 60°. Průsečík přímek b, p je D. Bodem D proložíme přímku $q \not\equiv p$, která s přímkou b svírá úhel 60° a ta protne přímku c v bodě C. Kružnice opsaná trojúhelníku ACD protne přímku b v bodě B.

Sestrojený trojúhelník ABC je skutečně rovnostranný, neboť podle rovnic (a), (b) jsou velikosti jeho úhlů 60°.

Úloha má dvě řešení, neboť bodem A lze sestrojit dvě přímky p, p', které s přímkou b svírají úhel 60°.

Kdyby přímka a ležela mezi přímkami b, c, řešila by se úloha obdobným způsobem. (Viz cvič. 24.)

6. Je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a její pevná tečna t v bodě T. Na kružnici zvolíme libovolný bod $M \not\equiv T$, jehož vzdálenost od tečny t je $PM = d$ a vzdálenost od bodu T je $MT = a$. Dokažte, že platí $a^2 = 2dr$.

Řešení. a) Jestliže body M, T jsou krajní body téhož průměru, potom přímky MT, t jsou k sobě kolmé a platí

$$a = 2r, \qquad d = 2r$$

a vyslovená věta je správná.

b) Předpokládejme tedy, že body M, T neleží na tomtéž průměru (obr. 8). Bod diametrálně protilehlý bodu M označme N. Z něho i z bodu M spusťme na tečnu t kolmice a paty označme po řadě Q, P. I platí

$$\sphericalangle QTN = \sphericalangle TMN = \alpha,$$
$$\sphericalangle PTM = \sphericalangle TNM = \beta.$$

O těchto úhlech však víme, že

$$\alpha + \beta = 90°$$

a proto

$$\triangle TPM \sim \triangle NTM.$$

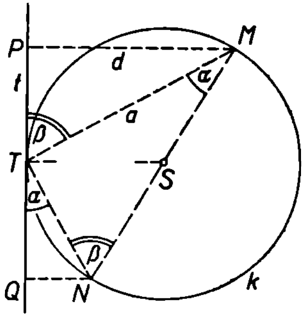
Odtud

$$TM : PM = MN : TM,$$

což zapsáno jinak dá

$$a : d = 2r : a.$$

To je však daná rovnice.



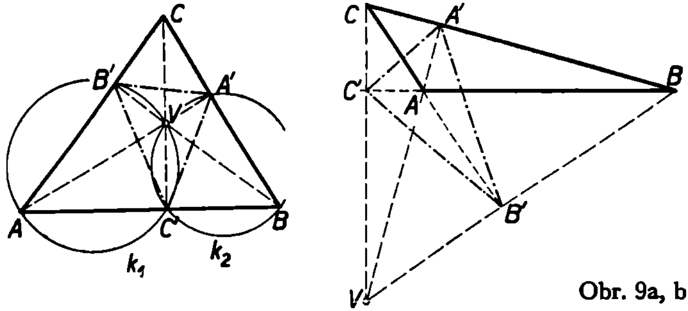
Obr. 8

7. Paty výšek libovolného kosoúhlého trojúhelníka jsou vrcholy nového trojúhelníka, tzv. ortického. Dokažte, že jeho úhly jsou půleny výškami trojúhelníka daného.

Důkaz provedeme nejprve pro trojúhelník ostroúhlý (obr. 9a). Paty výšek jsou po řadě označeny A' (na straně BC), B', C'. Výšky se protínají v bodě V, který nazýváme *ortocentrem*. Bod V je v tomto případě vnitřním bodem trojúhelníka. Trojúhelníky AVC', AVB' jsou pravoúhlé se společnou přeponou a proto mají i společnou opsanou kružnici k_1. Z týchž důvodů mají společnou opsanou kružnici k_2 pravoúhlé trojúhelníky BVA', BVC'.

V kružnici k_1 máme shodné obvodové úhly:

$$90° - \gamma = \sphericalangle CAA' \equiv \sphericalangle B'AV = \sphericalangle B'C'V.$$



Obr. 9a, b

Podobně o obvodových úhlech v kružnici k_2 platí

$$90° - \gamma = \sphericalangle CBB' \equiv \sphericalangle A'BV = \sphericalangle A'C'V.$$

Z toho vidíme, že výška CC' je osou (vnitřního) úhlu $B'C'A'$ ortického trojúhelníka. Stejně bychom postupovali při důkaze o výškách BB', AA' a proto můžeme důkaz věty pro ostroúhlý trojúhelník považovat za provedený.

V tupoúhlém trojúhelníku leží ortocentrum vně trojúhelníka. V obr. 9b je tupý úhel při vrcholu A. Všimněme si zde trojúhelníku VBC. Ten je ostroúhlý, neboť v něm (α, β, γ jsou vnitřní úhly daného trojúhelníka)

$$\sphericalangle VBC = 90° - \gamma, \ \sphericalangle VCB = 90° - \beta,$$

a úhel δ při vrcholu V je dán rovnicí

$$\delta + (90° - \gamma) + (90° - \beta) = 180°,$$
$$\delta = \beta + \gamma < 90°,$$

neboť $\alpha > 90°$.

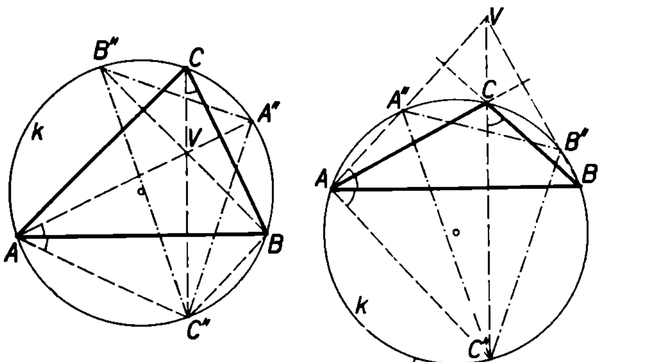
Pro ostroúhlý trojúhelník VBC platí věta odvozená v odst. předcházejícím. Jeho ortický trojúhelník je však trojúhelník $A'B'C'$ a ortocentrum je A. Přímka CB' půlí proto vnitřní úhel $C'B'A'$ ortického trojúhelníka $A'B'C'$ a přímka BB', tj. výška daného trojúhelníka, půlí (vnější) úhel zmíněného ortického trojúhelníka. Tím jsme v podstatě s důkazem vyslovené věty hotovi.

Poznámka. Vyloučili jsme pravoúhlý trojúhelník. V něm totiž ortocentrum splývá s vrcholem pravého úhlu, a ortický trojúhelník se redukuje na výšku jdoucí vrcholem pravého úhlu.

8. Výšky trojúhelníka protnou opsanou kružnici v bodech, které jsou souměrně sdružené s ortocentrem podle stran daného trojúhelníka. Dokažte.

Důkaz. Vyloučíme opět pravoúhlý trojúhelník, neboť vyslovené tvrzení je v tomto případě samozřejmé.

a) Je-li dán ostroúhlý trojúhelník ABC (obr. 10a), potom jeho ortocentrum je vnitřní bod trojúhelníka. Další průsečíky výšek s kružnicí k, která je danému troj-



Obr. 10a, b

úhelníku opsána, označme A'', B'', C''. Podle věty o obvodových úhlech platí

$$\sphericalangle BAC'' = \sphericalangle BCC'' = 90° - \beta.$$

Ale také $$\sphericalangle VAB = 90° - \beta$$

a poněvadž $VC'' \perp AB$, je trojúhelník AVC'' rovnoramenný se základnou VC''. Z toho pak vyplývá správnost vyslovené věty pro ortocentrum a bod C''. Poněvadž stejným způsobem se dá věta dokázat i o bodech A'', B'', je tím podán důkaz věty pro ostroúhlý trojúhelník.

b) Mějme dán tupoúhlý trojúhelník ABC (obr. 10b) s tupým úhlem při vrcholu C. Ortocentrum V je vnější bod trojúhelníka. Druhé průsečíky výšek VA, VB, VC s opsanou kružnicí označme po řadě A'', B'', C''. Opět můžeme psát

$$\sphericalangle BAC'' = \sphericalangle BCC'' = 90° - \beta.$$

Avšak také

$$\sphericalangle BAA'' = 90° - \beta.$$

Z toho opět plyne, že trojúhelník VAC'' je rovnoramenný a body V, C'' jsou souměrně sdružené podle strany AB. Poněvadž se dá totéž dokázat i o bodech A'', B'', je tím důkaz vyslovené věty proveden.

9. Dvě dané kružnice k, k' mají společné dva různé body A, B. Bodem A proložme libovolnou přímku $a \not\equiv AB$, která dané dvě kružnice protne v dalších bodech P, P'. V nich sestrojme ke kružnicím k, k' tečny. Dokažte, že velikost úhlu těchto dvou tečen nezávisí na poloze přímky a, tj. pro dané dvě kružnice je konstantní.

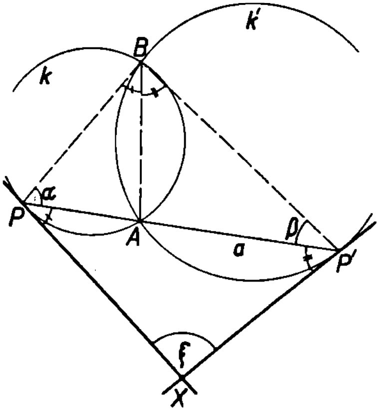
Důkaz. a) Uvažujme nejprve případ, kdy bod A odděluje body P, P' (obr. 11a). Body B, P, P' jsou vrcholy trojúhelníka. V něm $\sphericalangle APB = \alpha$ a $\sphericalangle AP'B = \beta$ mají velikost nezávislou na poloze přímky *a*. Proto

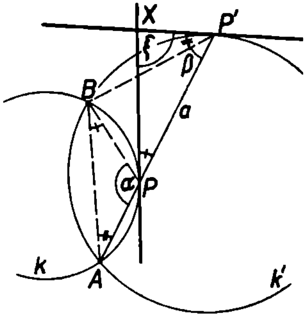
$$\gamma = \sphericalangle PBP' = 180° - (\alpha + \beta)$$

má taky velikost nezávislou na poloze přímky *a*.

Přímka *BA* jej dělí na dva úhly *ABP*, *ABP'*, o nichž tedy platí

$$\sphericalangle ABP + \sphericalangle ABP' = 180° - (\alpha + \beta).$$





Obr. 11a, b

Víme však, že (*X* je průsečík tečen)

$$\sphericalangle ABP = \sphericalangle APX, \quad \sphericalangle ABP' = \sphericalangle AP'X.$$

Dosadíme-li, obdržíme

$$\sphericalangle APX + \sphericalangle AP'X = 180° - \gamma.$$

Z toho je patrno, že bod *X* leží v polorovině opačné k polorovině *aB*.

b) Bod *A* leží vně úsečky *PP'* (obr. 11b). Poněvadž je důkaz obdobný, nebudeme jej provádět.