Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic

Výsledky cvičení

In: Milan Koman (author): Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1966. pp. 92–]98].

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403586

VÝSLEDKY CVIČENÍ

2. kapitola

1. a) Všechny úsečky VZ jsou navzájem shodné a platí $VZ = 2AE$, kde E je vrchol rovnoběžníku $BCDE$. Je-li $AE < \frac{1}{2}d$, je geometrickým místem M celá rovina. Je-li $AE \geqq \frac{1}{2}d$, je geometrické místo M množina prázdná (neobsahuje žádný bod).

   b) Geometrické místo M je vnitřek kruhu $k \equiv \left(S; \frac{1}{2}d\right)$, kde S je střed libovolné úsečky spojující krajní body příslušné lomené čáry.

2. a) Je-li $\varrho = \frac{1}{4}(2k^2 - AB^2) > 0$, je geometrickým místem M kružnice $U \equiv (T; \sqrt{\varrho})$, kde T je střed úsečky AB. Je-li $\varrho = 0$, je geometrickým místem M jediný bod T. Je-li $\varrho < 0$, je geometrické místo M množina prázdná. b) Pro dané tři body A, B, C dostáváme: Je-li $\varrho = \frac{1}{9}[3k^2 - (AB^2 + AC^2 + BC^2)] > 0$, je geometrickým místem M kružnice $U \equiv (T; \sqrt{\varrho})$, kde T je těžiště trojúhelníka ABC. Je-li $\varrho = 0$, je geometrickým místem jedině bod T, je-li $\varrho < 0$, je geometrickým místem množina prázdná. Pro dané čtyři body A, B, C, D dostáváme: Je-li $\varrho = \frac{1}{16}[4k^2 - (AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2)] > 0$,

je geometrickým místem kružnice $U \equiv (T; \sqrt{\varrho})$, kde T je těžištěm čtveřice bodů A, B, C, D (tzn. T je střed úsečky spojující středy úseček AB, CD). Je-li $\varrho = 0$, je geometrickým místem jediný bod T a je-li $\varrho < 0$, je geometrické místo množina prázdná.

3. Tzv. *Apolloniova kružnice*, tj. kružnice opsaná nad průměrem CD, kde C a D jsou body přímky AB, pro které platí: $AC : BC = AD : BD = k$.

4. Je-li $\sphericalangle PRQ > \frac{\pi}{2}$, je geometrické místo množina prázdná.

   Je-li $\sphericalangle PRQ = \frac{\pi}{2}$, je geometrické místo jediný bod S, čtvrtý vrchol rovnoběžníka $PRQS$. Je-li $\sphericalangle PRQ < \frac{\pi}{2}$, je geometrické místo M kružnice $U \equiv (S; \varrho)$, kde $\varrho = \sqrt{2RP \,.\, RV}$, V je pata výšky vedené z bodu Q na stranu RP.

5. Za předpokladu, že paprsek se odrazil postupně od stěn určených přímkami AB, BC, CA, je půdorysem geometrického místa společná část vnitřku trojúhelníka ABC a rovnoběžky p se stranou BC ve vzdálenosti $v = 5\left[\sqrt{7} - \sqrt{3}\right] \doteq 4{,}57$ metrů od vrcholu A.

6. Elipsa s osami o_1 a o_2, délkou hlavní poloosy $2d$ a délkou vedlejší poloosy d.

7. Geometrické místo M je průnik dvou množin U_1 a U_2, které popíšeme každou zvlášť. Označme S průsečík úhlopříček AC a BD. Je-li $\varrho_1 = 2(DS^2 - AS^2) > 0$, je U_1 vnějšek kruhu $k_1 \equiv (E; \sqrt{\varrho_1})$, kde E je bod souměrně sdružený podle středu S s vrcholem A. Je-li $\varrho_1 = 0$, je U_1 celá rovina s výjimkou bodu E a konečně, je-li $\varrho_1 < 0$, je U_1 celá rovina bez výjimky. Je-li $\varrho_2 = 2(DS^2 - CS^2) > 0$, je U_2 vnitřek kruhu $k_2 = (F; \sqrt{\varrho_2})$, kde F je bod souměrně sdružený podle středu S s vrcholem C. Je-li $\varrho_2 \leqq 0$, je U_2 množina prázdná.

8. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je kratší oblouk $\widehat{AB}$ kružnice opsané trojúhelníku ABC.

3. kapitola

9. Označme o kolmici vedenou z bodu D na přímku p a d_1, d_2 rovnoběžky s přímkou p ve vzdálenosti k; přitom označení volme tak, aby přímka d_1 ležela v polorovině pD. Je-li $v > k$, skládá se geometrické místo $\boldsymbol{M}$ z parabol $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ se společným ohniskem D a řídicími přímkami d_1, d_2. Je-li $v = k$, skládá se g. m. $\boldsymbol{M}$ z paraboly $\boldsymbol{P}_2$ s ohniskem D a řídicí přímkou d_2 a z těch bodů přímky o, které neleží „mezi“ bodem D a přímkou p. Je-li $v < k$, skládá se g. m. $\boldsymbol{M}$ z té části paraboly $\boldsymbol{P}_1$, která náleží polorovině pd_2 a z té části paraboly $\boldsymbol{P}_2$, která náleží polorovině pD.
10. Označme P patu kolmice vedené z bodu D na přímku p a S střed úsečky PD. Je-li $v^2 \geqq 2k$, je geometrické místo $\boldsymbol{M}$ množina prázdná. Je-li $v^2 < 2k$, je g. m. $\boldsymbol{M}$ vnitřek $\boldsymbol{U}$ elipsy se středem v bodě S, s hlavní osou délky $\sqrt{2(2k - v)^2}$ rovnoběžnou s přímkou p a vedlejší osou délky $\sqrt{2k - v^2}$.
11. Označme $\boldsymbol{P}$ parabolu s ohniskem D a řídicí přímkou p. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ se skládá ze dvou shodných parabol $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, které vzniknou z paraboly $\boldsymbol{P}$ posunutím ve směru její osy v obou smyslech o vzdálenost $\dfrac{k}{2v}$.
12. Nechť každý vrchol obdélníku $ABCD$ leží na jedné z přímek a, b a má od zbylé přímky vzdálenost k. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ se pak skládá z celé roviny s výj mkou vnitřků dvou pásů rovnoběžek AB, CD a BC, AD.
13. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ tvoří shodné rovnoosé hyperboly, s délkou hlavní poloosy $(k \sin \alpha)^{-1/2} \alpha$ a s asymptotami splývajícími s osami různoběžek a, b.

14. Geometrické místo M je kružnice se středem O na polopřímce SA ve vzdálenosti $a(k^2 + 1)(k^2 - 1)^{-1}$ od počátku S a s poloměrem $2ak(k^2 - 1)^{-1}$.

15. Je-li $k \leqq \frac{2}{a^2}$, je geometrické místo M množina prázdná. Je-li $k > \frac{2}{a^2}$, je geometrické místo M hyperbola se středem v bodě S, s vedlejší osou délky $2a$ splývající s přímkou AB a hlavní osou délky $a\sqrt{2}\,(ka^2 - 2)^{-1/2}$.

16. Označme H_1, H_2 hyperboly se společnými asymptotami a, b a excentricitou (vzdálenost ohniska od středu hyperboly) $2\left(k \,.\, \sqrt{\sin \alpha}\right)^{-1}$. Každou větev těchto dvou hyperbol posuňme ve směru hlavní osy příslušné hyperboly od průsečíku P různoběžek a, b o příslušnou délku hlavní poloosy. Všechny čtyři posunuté větve hyperbol tvoří dohromady geometrické místo M.

17. Geometrické místo M je buď množina prázdná, nebo bod, nebo úsečka anebo uzavřená lomená čára maximálně se šesti vrcholy umístěnými po dvou na každé z přímek AB, AC, BC (některé z těchto vrcholů mohou případně splynout). Vrcholy na přímce AB můžeme sestrojit např. takto: Sestrojíme geometrické místo M' všech bodů Z, které mají od přímek BC, AC stálý součet vzdáleností rovný k (viz příklad 6 na str. 32). Společné body geometrického místa M' a přímky AB vyčerpávají všechny body geometrického místa M, ležící na přímce AB.

18. Geometrické místo M se skládá z vnitřku tří trojúhelníků, jejichž jeden vrchol je vždy průsečík osy vnitřního úhlu s protější stranou a další dva vrcholy jsou průsečíky os vnějších úhlů při zbývajících vrcholech s přímkami obsahujícími protější strany.

19. Geometrické místo M je elipsa E, jejíž hlavní osa splývá s přímkou o, střed S leží na polopřímce VD ve vzdálenosti $v \cos^{-2} \varphi$ od počátku V, její délky poloos jsou $v \sin \varphi \cos^{-2} \varphi$, $v \sin \varphi \cos^{-2} \varphi\, (1 + \cos^2 \varphi)^{-1/2}$.

20. Je-li $\varphi = 45°$, pak je geometrické místo $\boldsymbol{M}$ osa úsečky DV s výjimkou jejích průsečíků s přímkami VA, VB. Je-li $\varphi \neq 45°$, pak je geometrické místo $\boldsymbol{M}$ rovnoosá hyperbola $\boldsymbol{H}$ (bez průsečíků s přímkami VA, VB), jejíž hlavní osa splývá s přímkou o, střed S má od bodu V vzdálenost $|v \cos^{-1} 2\varphi|$ a délky obou poloos jsou $|v \sqrt{2} \sin \varphi \cos^{-1} 2\varphi|$. Přitom pro $\varphi < 45°$ leží bod S na polopřímce VD a pro $\varphi > 45°$ na polopřímce k ní opačné.

21. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je hyperbola $\boldsymbol{H}$, která má jedno ohnisko v bodě D, hlavní osa délky $kv(k^2 - 1)^{-1}$ je kolmá k přímce p, střed hyperboly leží v polorovině pD ve vzdálenosti $k^2v(k - 1)^{-1}$ od přímky p.

22. Nechť $ABCD$ je rovnoběžník. $\boldsymbol{H}_1$ značí hyperbolu se středem D, asymptotami BD, CD, hlavní osou AD a délkou hlavní poloosy $a = v\sqrt{2}$ (v je výška trojúhelníka ABC). $\boldsymbol{H}_2$, $\boldsymbol{H}_3$ jsou hyperboly, které vzniknou otočením hyperboly $\boldsymbol{H}_1$ kolem těžiště trojúhelníka ABC o úhly 120° a —120°. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je společná část vnějšků hyperbol $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$, $\boldsymbol{H}_3$ a trojúhelníka ABC; je to „hyperbolický trojúhelník" s vrcholy ve středech stran trojúhelníka ABC.

4. kapitola

23. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je parabola $\boldsymbol{P}$, jejíž osa splývá s osou úsečky AB, vrchol V je průsečík výšek rovnoramenného trojúhelníka ABC. Parabola $\boldsymbol{P}$ prochází body A, B.

24. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je kružnice $\boldsymbol{K}$, shodná s kružnicemi $\boldsymbol{K}_1$, $\boldsymbol{K}_2$ se středem T, s výjimkou středů S_1, S_2 kružnic $\boldsymbol{K}_1$, $\boldsymbol{K}_2$.

25. a) Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je s výjimkou bodů A, B elipsa $\boldsymbol{E}$ s hlavními vrcholy A, B a vedlejší osou délky $\sqrt{k}$.
b) Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je s výjimkou bodů A, B hyperbola $\boldsymbol{H}$ s hlavními vrcholy A, B a vedlejší osou délky $\sqrt{k}$.

26. Geometrické místo **M** je kruh **K**, jehož střed S splývá se středem úsečky S_1S_2 a poloměr je $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$. Výjimku tvoří bod S, který geometrickému místu **M** nepatří.
27. Geometrické místo **M** tvoří dvě hyperboly H_1, H_2 s asymptotami a, b a excentricitou $e = \sqrt{2P \sin^{-1} \varphi}$, kde φ je odchylka přímek a, b.
28. Geometrické místo **M** je obvod **O** čtverce $P'Q'R'S'$, který je stejnolehlý se čtvercem $PQRS$ se středem stejnolehlosti v průsečíku úhlopříček PR, QS a koeficientem stejnolehlosti $k = 1/9$.
29. a) Geometrické místo **M** je kružnice L se středem C na polopřímce opačné k polopřímce OS. Přitom je $OC = a^2 v(v^2 - \varrho^2)^{-1}$ a poloměr kružnice L je $a^2 \varrho\, (v^2 - \varrho^2)^{-1}$.
b) Geometrické místo **M** je kolmice **P** k přímce OS. Její průsečík C s polopřímkou OS má od bodu O vzdálenost
$$\frac{1}{2\varrho}(a^2 - 2\varrho).$$
30. Geometrické místo **M** je hyperbola **H** s vrcholy R, V (V je průsečík výšek rovnoramenného trojúhelníka PQR) a asymptotami kolmými k přímkám p, q.