Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic

5. kapitola. Přehled užitých výsledků z analytické geometrie

In: Milan Koman (author): Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1966. pp. 85–91.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403585

5. kapitola

PŘEHLED UŽITÝCH VÝSLEDKŮ Z ANALYTICKÉ GEOMETRIE

[1] Délka úsečky

Délku úsečky s krajními body $A = [x_1; y_1]$, $B = [x_2; y_2]$ počítáme podle vzorce

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

[2] Úsečka, polopřímka

Nechť jsou dány dva různé body $A = [x_1; y_1]$, $B = [x_2; y_2]$. Potom bod $Z = [\xi; \eta]$ patří úsečce AB právě tehdy, když pro jeho souřadnice platí

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x_1 + \lambda(x_2 - x_1), \\ \eta &= y_1 + \lambda(y_2 - y_1), \end{aligned}\right\} \text{ kde } 0 \leqq \lambda \leqq 1 .$$

Přitom pro polohu bodu Z platí $AZ = \lambda AB$.

Speciálně pro střed $S = [\xi_1; \eta_1]$ úsečky AB dostaneme

$$\xi_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad \eta_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2).$$

Bod $Z = [\xi; \eta]$ patří polopřímce AB právě tehdy, když pro jeho souřadnice platí

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x_1 + \lambda(x_2 - x_1), \\ \eta &= y_1 + \lambda(y_2 - y_1), \end{aligned}\right\} \text{ kde } \quad 0 \leqq \lambda.$$

Pro polohu bodu Z přitom platí $AZ = \lambda . AB$.

[3] Přímka

Směrnicový tvar rovnice přímky různoběžné s osou y je

$$y = kx + q\,,$$

kde k je tangens směrového úhlu $\varphi (k = \operatorname{tg} \varphi)$.

Obecný tvar rovnice přímky je

$$ax + by + c = 0\,,$$

přitom čísla a, b nejsou zároveň rovna nule.

Vyjádření přímky *pomocí* tzv. *směrových sinů a kosinů* (tj. pomocí sinů a kosinů směrového úhlu φ) je

$$x \sin \varphi - y \cos \varphi + c = 0\,.$$

Přímka určená dvěma různými body $A = [x_1; y_1]$, $B = [x_2; y_2]$ má početní vyjádření

$$(y_1 - y_2)(x - x_1) - (x_1 - x_2)(y - y_1) = 0\,.$$

Tento tvar má oproti často užívanému směrnicovému tvaru tu výhodu, že zahrnuje i přímky rovnoběžné s osou y.

[4] Polorovina

„Horní" polorovina určená přímkou o rovnici

$$ax + by + c = 0\,, \quad \text{kde} \quad a > 0,\ b > 0,$$

má početní vyjádření

$$ax + by + c \geqq 0\,.$$

„Horní" polorovina určená přímkou o rovnici

$$ax - by + c = 0\,, \quad \text{kde} \quad a > 0,\ b > 0,$$

má početní vyjádření

$$ax - by + c \leqq 0\,.$$

Pro příslušné „dolní“ poloroviny platí obrácené nerovnosti.

[5] Vzdálenost bodu a přímky

Vzdálenost v bodu $A = [x_1; y_1]$ od přímky, která má rovnici

$$ax + by + c = 0\,, \tag{1}$$

se vypočte podle vzorce

$$v = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,. \tag{2}$$

Jestliže pro koeficienty rovnice (1) platí

$$a^2 + b^2 = 1\,,$$

má vzorec (2) tvar

$$v = |ax_1 + by_1 + c|\,.$$

[6] Kružnice

Kružnice k se středem $S = [m; n]$ a s poloměrem r má rovnici

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2\,.$$

Vnitřek, resp. *vnějšek* kružnice k má početní vyjádření

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 < r^2\,,$$

resp.

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 > r^2\,.$$

Rovnice

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = 0$$

je početním vyjádřením jediného bodu $S = [m; n]$.

Nerovnost

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 < 0$$

představuje množinu prázdnou (tj. není početním vyjádřením žádného bodu).

[7] Parabola

Rovnice

$$(y - n)^2 = 4p(x - m), \quad \text{kde} \quad p \neq 0\,, \tag{3}$$

je početním vyjádřením paraboly $\boldsymbol{P}_1$ s vrcholem $V_1 = [m; n]$ a ohniskem $F_1 = [m + p; n]$.

Rovnice

$$(x - m)^2 = 4p(y - n), \quad \text{kde} \quad p \neq 0\,, \tag{4}$$

je početním vyjádřením paraboly $\boldsymbol{P}_2$ s vrcholem $V_2 = [m; n]$ a ohniskem $F_2 = [m; n + p]$.

Vnějšek paraboly $\boldsymbol{P}_1$ má početní vyjádření

$$(y - n)^2 > 4p(x - m) \quad \text{pro} \quad p > 0$$

a

$$(y - n)^2 < 4p(x - m) \quad \text{pro} \quad p < 0\,.$$

Vnějšek paraboly $\boldsymbol{P}_2$ má početní vyjádření

$$(x - m)^2 > 4p(y - n) \quad \text{pro} \quad p > 0$$

a

$$(y - n)^2 < 4p(x - m) \ \text{pro}\ p < 0\,.$$

Pro *vnitřky* parabol $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ platí obrácené nerovnosti.

[8] Elipsa

Rovnice

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1; \quad (a > 0, \quad b > 0)$$

je početním vyjádřením elipsy $\boldsymbol{E}$ se středem $S = [m; n]$ a vrcholy $A_{1,2} = [m \pm a; n]$, $B_{1,2} = [m; n \pm b]$.

Excentricita (tj. vzdálenost ohnisek elipsy **E** od jejího středu S) je

$$e = \sqrt{|a^2 - b^2|}\,.$$

Vnitřek, resp. *vnějšek* elipsy **E** má početní vyjádření

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} < 1\,,$$

resp.

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} > 1\,.$$

[9] Hyperbola

Rovnice

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1\,; \quad (a > 0, \quad b > 0)$$

je početním vyjádřením hyperboly $\boldsymbol{H}_1$ se středem $S = [m;\ n]$, hlavními vrcholy $A_{1,2} = [m \pm a;\ n]$ a asymptotami

$$y - n = \pm \frac{b}{a}(x-m)\,.$$

Rovnice

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = -1\,; \quad (a > 0, \quad b > 0)$$

je početním vyjádřením hyperboly $\boldsymbol{H}_2$ se středem $S = [m;\ n]$, hlavními vrcholy $B_{1,2} = [m;\ n \pm b]$ a asymptotami

$$y - n = \pm \frac{b}{a}(x-m)\,.$$

Obě hyperboly H_1, H_2 mají stejnou excentricitu

$$e = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Vnějšek hyperboly H_1, resp. hyperboly H_2 má početní vyjádření

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} < 1\,,$$

resp.

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} > -1\,.$$

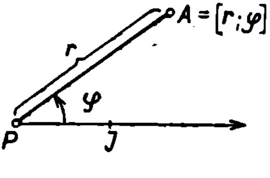
Vnitřky hyperbol H_1 a H_2 vyhovují obráceným nerovnostem.

[10] Soustava polárních souřadnic

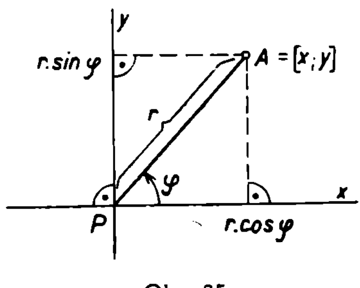
Zvolme v rovině dva různé body P, J. Těmito body je určena tzv. soustava polárních souřadnic, která má **pól** v bodě P, **polární osu** v polopřímce PJ a jednotkovou úsečku PJ.

Je-li bod $A \neq P$, pak pro jeho polární souřadnice $[r; \varphi]$ platí (obr. 34):

a) *první souřadnice* r je délka úsečky AP při zvolené jednotkové úsečce PJ;



Obr. 34



Obr. 35

b) *druhá souřadnice* φ je velikost orientovaného úhlu JPA.

Je-li $A \equiv P$, pak bod A má první souřadnici $r = 0$; jeho druhá souřadnice se nezavádí.

Obráceně každé dvojici reálných čísel $[r; \varphi]$, kde $r > 0$, odpovídá v rovině se zavedenou soustavou polárních souřadnic jediný bod $A = [r; \varphi]$.

[11] Transformační rovnice

pro převod kartézské soustavy souřadnic v polární soustavu souřadnic a obráceně.

Nechť počátek kartézské soustavy souřadnic splyne s pólem polární soustavy souřadnic a nezáporná část osy x splyne s polární osou (obr. 35).

Pro převod mezi kartézskými a polárními souřadnicemi užíváme vzorců

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \,,$$

resp.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,.$$