Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic

4. kapitola. Aplikace vyšetřování vzájemné polohy dvou útvarů

In: Milan Koman (author): Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1966. pp. 61–84.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403584

Terms of use:

© Milan Koman, 1966

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

4. kapitola

APLIKACE VYŠETŘOVÁNÍ VZÁJEMNÉ POLOHY DVOU ÚTVARŮ

Přicházíme ke třetí a poslední skupině příkladů. Jde o geometrická místa, která vyplní body incidující s jedním nebo dvěma proměnnými (např. pohybujícími se) útvary. Při jejich vyšetřování budeme proto zkoumat vzájemnou polohu daných a proměnných útvarů.

12. Příklad. Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1 \equiv (S; r_1)$, $k_2 \equiv (S; r_2)$, kde $r_1 > r_2$ a číslo $k(0 < k \neq \neq 1)$. Na kružnici k_1 je dán bod A. Po kružnici k_1 se pohybuje bod X a po kružnici k_2 bod Y tak, že polopřímka SA je osou úhlu XSY. Bod Z leží na polopřímce XY a platí pro něj $XZ = k.XY$. Vyšetříme geometrické místo M všech bodů Z.

Řešení. Geometrický útvar M je zřejmě souměrný podle přímky SA i podle kolmice vedené středem S k přímce SA. Soustavu souřadnic zvolíme proto podle obrázku 23.

Souřadnice bodů X, Y můžeme vyjádřit takto:

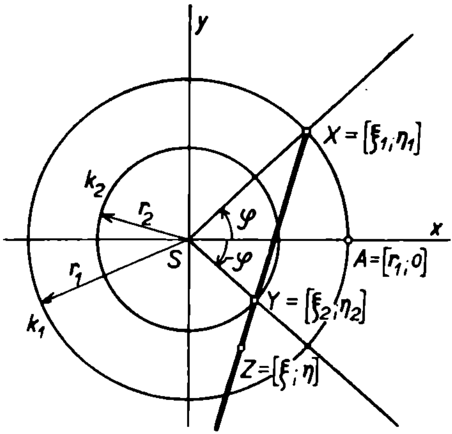
$$\begin{aligned} \xi_1 &= r_1 \cos\varphi; & \xi_2 &= r_2 \cos(-\varphi) = r_2 \cos\varphi; \\ \eta_1 &= r_1 \sin\varphi; & \eta_2 &= r_2 \sin(-\varphi) = -r_2 \sin\varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

Potom souřadnice bodu Z jsou (viz [2], str. 85)

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1 + k(\xi_2 - \xi_1), \\ \eta &= \eta_1 + k(\eta_2 - \eta_1), \end{aligned}$$

resp.

$$\xi = [r_1 + k(r_2 - r_1)]\cos\varphi,$$
$$\eta = [r_1 - k(r_2 + r_1)]\sin\varphi. \tag{2}$$



Obr. 23

Z rovnic (2) musíme nyní vyloučit parametr φ. Přitom rozlišíme tři případy:

a) Výraz

$$r_1 + k(r_2 - r_1) = 0\,.$$

Potom je

$$k = \frac{-r_1}{r_2 - r_1} = \frac{r_1}{r_1 - r_2}\,. \tag{3}$$

Podle předpokladu je $r_1 > r_2$, a tedy $k > 0$. Zjistili jsme, že tento případ skutečně může nastat. Potom však mají rovnice (2) tvar

$$\xi = 0, \quad \eta = [r_1 - k(r_2 + r_1)] \sin \varphi ,$$

resp. po dosazení za k z (3)

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{2r_1r_2}{r_1 - r_2} \sin \varphi . \tag{4}$$

Protože je $|\sin \varphi| \leqq 1$, jsou rovnice (4) početním vyjádřením úsečky PQ, kde

$$P = \left[0; -\frac{2r_1r_2}{r_1 - r_2}\right], \quad Q = \left[0; \frac{2r_1r_2}{r_1 - r_2}\right].$$

b) Výraz

$$r_1 - k(r_2 + r_1) = 0 .$$

Potom je

$$k = \frac{r_1}{r_1 + r_2} . \tag{5}$$

Tento případ může tedy také nastat. Přitom rovnice (2) mají tvar

$$\xi = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2} \cos \varphi, \quad \eta = 0 . \tag{6}$$

Protože $|\cos \varphi| \leqq 1$, jsou rovnice (6) opět početním vyjádřením úsečky, tentokrát úsečky RT, kde

$$R = \left[-\frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2} ; 0\right], \quad T = \left[\frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2} ; 0\right].$$

c) Pro oba výrazy je

$$r_1 + k(r_2 - r_1) \neq 0, \quad r_1 - k(r_2 + r_1) \neq 0 ,$$

to znamená

$$k \neq \frac{r_1}{r_1 \pm r_2} . \tag{7}$$

V tomto případě užijeme k vyloučení parametru φ známé identity $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$. Vyjádříme proto z rovnic (2) $\cos^2 \varphi$ a $\sin^2 \varphi$:

$$\left.\begin{aligned} \cos^2 \varphi &= \frac{\xi^2}{[r_1 + k(r_2 - r_1)]^2}, \\ \sin^2 \varphi &= \frac{\eta^2}{[r_1 - k(r_2 + r_1)]^2}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

a pak sečteme levé a pravé strany těchto rovnic. Vyjde nám

$$1 = \frac{\xi^2}{[r_1 + k(r_2 - r_1)]^2} + \frac{\eta^2}{[r_1 - k(r_2 + r_1)]^2}. \tag{9}$$

Došli jsme tak k početnímu vyjádření elipsy **E**, jejíž osy splývají se souřadnicovými osami, a délky poloos jsou $a = r_1 + k(r_2 - r_1)$, $b = r_1 - k(r_2 + r_1)$.

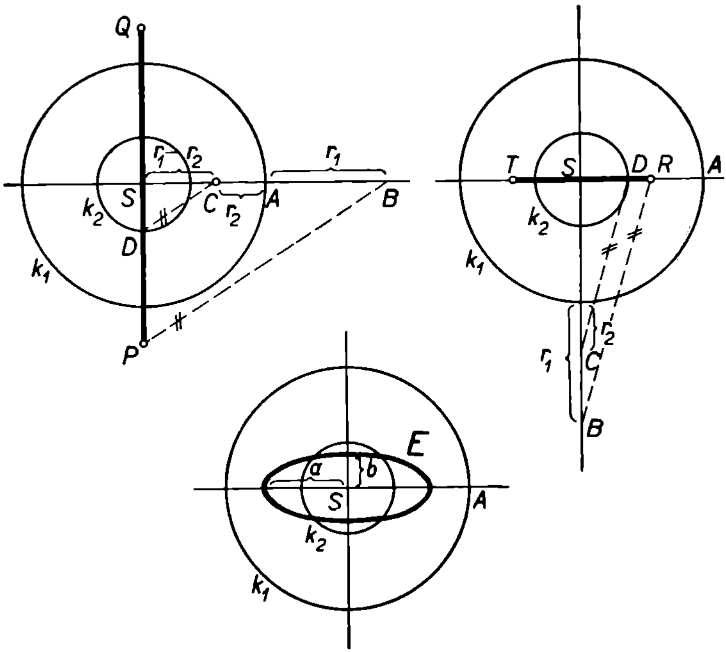
Zjistili jsme tedy, že každý bod Z geometrického místa **M** patří útvaru **U**, který je v závislosti na k buď úsečka PQ, nebo úsečka RT, nebo elipsa **E**. Jinými slovy to znamená, že **M** $\subset$ **U**.

Nyní zbývá dokázat, že je též **U** $\subset$ **M**. Budeme ověřovat podmínku [B']. Nechť bod $Z = [\xi; \eta]$ nepatří množině **M**. To znamená, že pro příslušné body X, Y neplatí $XZ = k \,.\, XY$. V tom případě pro souřadnice ξ, η nemohou platit obě rovnice (2), to znamená, že *aspoň jedna z nich neplatí.* Pak však neplatí za příslušných podmínek ani rovnice (4), ani rovnice (6), ani rovnice (8). Proto bod Z nepatří ani útvaru **U**.

Výsledek. a) Je-li $k = r_1(r_1 - r_2)^{-1}$, pak je geometrické místo **M** úsečka PQ, která je kolmá k přímce SA, má střed v bodě S a délku $4r_1r_2(r_1 - r_2)^{-1}$. (Obr. 24a.)

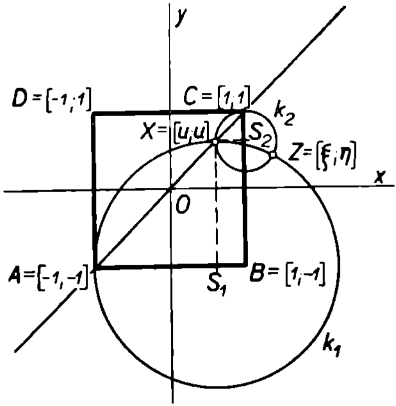
b) Je-li $k = r_1(r_1 + r_2)^{-1}$, pak je geometrické místo **M** úsečka RT, která je částí přímky SA, má střed v bodě S a délku $4r_1r_2(r_1 + r_2)^{-1}$. (Obr. 24b.)

c) Je-li $k \neq r_1(r_1 \pm r_2)^{-1}$, pak je geometrické místo **M** elipsa **E** se středem v bodě S, jejichž jedna osa splývá s přímkou SA a má délku $2a = 2[r_1 + k(r_2 - r_1)]$ a druhá osa má délku $2b = 2[r_1 - k(r_2 + r_1)]$. (Obr. 24c pro $r_1 = \dfrac{5}{2}r_2$, $k = \dfrac{1}{2}$.)



Obr. 24abc

Čtenáři, kteří znají funkce sin $h\,x$ cos $h\,x$ (tzv. *hyperbolický sinus* a *hyperbolický kosinus*), mohou stejně jednoduše řešit obdobnou úlohu, kterou dostaneme, jestliže v příkladě 12 kružnice k_1, k_2 nahradíme rovnoosými hyperbolami se společnými asymptotami a společnou hlavní osou. Úlohu lze sice řešit i bez znalostí zmíněných funkcí, řešení je však složitější.



Obr. 25

13. Příklad. Je dán čtverec $ABCD$. Bod X probíhá přímku AC. Bodem X procházejí dvě kružnice k_1 a k_2. První z nich se dotýká přímky AD v bodě A a druhá se dotýká přímky DC v bodě C. Kružnice k_1 a k_2 se protínají kromě bodu X ještě v dalším bodě Z. Vyšetříme geometrické místo $\boldsymbol{M}$ bodů Z.

Řešení. Soustavu souřadnic zvolme podle obrázku 25. Za jednotku na osách zvolíme polovinu strany čtverce $ABCD$.

Středy kružnic k_1, k_2 mají souřadnice

$$S_1 = [u; -1], \quad S_2 = [1; u]\,,$$

a poloměry

$$r_1 = |1 + u|,\ r_2 = |1 - u|, \text{ kde } |u| \neq 1. \qquad (10)$$

Podmínka $|u| \neq 1$ zajišťuje, že žádná z kružnic k_1, k_2

nedegeneruje v jediný bod. Můžeme proto napsat rovnice kružnic k_1, k_2 ve tvaru

$$\left.\begin{aligned} (x-u)^2 + (y+1)^2 &= (1+u)^2, \\ (x-1)^2 + (y-u)^2 &= (1-u)^2. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Protože bod $Z = [\xi; \eta]$ leží na obou kružnicích k_1, k_2, vyhovují jeho souřadnice rovnicím (11). Po dosazení a úpravě dostaneme

$$\left.\begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 + 2\eta &= 2u(\xi + 1), \\ \xi^2 + \eta^2 - 2\xi &= 2u(\eta - 1). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Abychom dostali početní vyjádření množiny $\boldsymbol{M}$, musíme z rovnic (12) vyloučit parametr u. Tak dostaneme rovnici

$$(\xi^2 + \eta^2 + 2\eta)(\eta - 1) = (\xi^2 + \eta^2 - 2\xi)(\xi + 1)$$

a po další úpravě

$$(\xi^2 + \eta^2 - 2)(\eta - \xi) = 0\,. \tag{13}$$

Protože všechny body $Z = [\xi; \eta]$ geometrického místa $\boldsymbol{M}$ leží mimo přímku AC, je $\xi \neq \eta$ a můžeme tedy rovnici (13) dělit výrazem $\eta - \xi \neq 0$. Tak upravíme rovnici (13) na konečný tvar

$$\xi^2 + \eta^2 - 2 = 0\,,$$

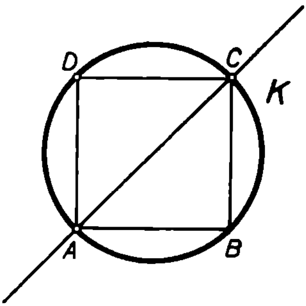
resp.

$$\xi^2 + \eta^2 = 2\,. \tag{14}$$

Rovnice (14) představují kružnici $\boldsymbol{K}$ opsanou čtverci $ABCD$. Tím jsme dokázali, že každý bod Z geometrického místa $\boldsymbol{M}$ patří kružnici $\boldsymbol{K}$. Protože však musí být v (10) $|u| \neq 1$, snadno zjistíme, že z kružnice $\boldsymbol{K}$ musíme vyloučit vrcholy A, C, D. Pro takto vzniklý útvar $\boldsymbol{U}$ je tedy dokázán vztah $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{U}$.

Protože lze postup zřejmě obrátit, je též $U \subset M$. (Proveďte podrobně sami.)

Výsledek. Geometrické místo M je útvar U, skládající se ze všech bodů kružnice K opsané čtverci $ABCD$, s výjimkou bodů A, C, D. (Obr. 26.)



Obr. 26

Všimněme si, že rovnice (7) je vlastně početním vyjádřením útvaru, který se skládá jednak z kružnice opsané nad průměrem AC, jednak z přímky AC. To plyne ihned z toho, že souřadnice bodu $Z = [\xi; \eta]$ vyhovují rovnici (13) právě tehdy, je-li buď

$$\xi^2 + \eta^2 - 2 = 0 ,$$

nebo

$$\eta - \xi = 0 .$$

S podobnými rovnicemi se v analytické geometrii setkáváme dosti často. Například rovnice

$$(3x - 4y)(3x + 4y) = 0$$

značí dvojici různoběžek procházející počátkem. Jindy se musíme sami teprve pokusit upravit dané početní vyjádření na takový tvar, aby na jedné straně rovnice (nerovnosti) byla nula a na zbývající straně vznikl součin.

V takovém případě dostaneme obvyklé vítané zjednodušení. Například máme-li rovnici

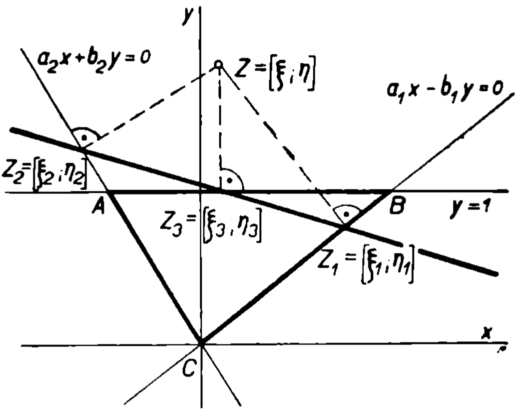
$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 4x^2 = 0 ,$$

nemůžeme předem o příslušné křivce mnoho říci. Snadno však provedeme úpravy

$$(x^2 + y^2)^2 - (2x)^2 = 0\,,$$
$$(x^2 + y^2 + 2x)(x^2 + y^2 - 2x) = 0\,,$$
$$[(x + 2)^2 + y^2 - 4]\;[(x - 2)^2 + y^2 - 4] = 0.$$

Odtud je již okamžitě vidět, že jde o dvě shodné kružnice o poloměru 2, dotýkající se osy v počátku soustavy souřadnic.

14. Příklad. Je dán trojúhelník ABC. Vyšetříme geometrické místo $\boldsymbol{M}$ všech bodů Z, pro něž platí: Paty kolmic vedených z bodů Z na přímky AB, BC, AC leží v přímce.



Obr. 27

Řešení. Podobně jako při řešení příkladu 10 můžeme zvolit soustavu souřadnic podle obr. 27.

Rovnice přímek BC, AC, AB zapíšeme po řadě ve tvaru:

$$a_1x - b_1y = 0, \text{ kde } a_1^2 + b_1^2 = 1;\ a_1 > 0,\ b_1 > 0, \tag{15}$$

$$a_2x + b_2y = 0, \text{ kde } a_2^2 + b_2^2 = 1;\ a_2 > 0,\ b_2 > 0, \tag{16}$$

$$y = 1.$$

Kolmice k přímce BC, procházející bodem $Z = [\xi; \eta]$, má rovnici

$$b_1(x - \xi) + a_1(y - \eta) = 0\,. \tag{18}$$

Pata $Z_1 = [\xi_1; \eta_1]$ kolmice z bodu $Z = [\xi; \eta]$ k přímce BC má za souřadnice kořeny soustavy rovnic

$$a_1x - b_1y = 0\,,$$
$$b_1(x - \xi) + a_1(y - \eta) = 0\,.$$

Po jednoduchém výpočtu dostaneme

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= b_1(a_1\eta + b_1\xi)\,, \\ \eta_1 &= a_1(a_1\eta + b_1\xi)\,. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Podobně vypočteme souřadnice paty $Z_2 = [\xi_2; \eta_2]$, resp. $Z_3 = [\xi_3; \eta_3]$ kolmic vedených z bodu $Z = [\xi; \eta]$ k přímce AC, resp. AB:

$$\left.\begin{aligned} \xi_2 &= -b_2(a_2\eta - b_2\xi)\,; & \xi_3 &= \xi\,; \\ \eta_2 &= a_2(a_2\eta - b_2\xi)\,; & \eta_3 &= 1\,. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Nyní musíme využít předpokladu, že všechny tři body Z_1, Z_2, Z_3 leží v přímce. Nejdříve si vyřešíme případ, kdy dva z těchto tří bodů splynou. Jestliže např. $Z_1 \equiv Z_2$, pak zřejmě bod Z splyne s vrcholem C trojúhelníka ABC (nakreslete si sami příslušný obrázek). Geometrickému místu $\boldsymbol{M}$ tedy patří vrchol C. Podobně se ukáže, že mu patří i další dva vrcholy B, A daného trojúhelníka.

Můžeme tedy v dalším předpokládat, že všechny tři body Z_1, Z_2, Z_3 jsou navzájem různé. Potom mají přímky Z_1Z_3, Z_2Z_3 tytéž směrnice, tzn.

$$\frac{\eta_1 - \eta_3}{\xi_1 - \xi_3} = \frac{\eta_2 - \eta_3}{\xi_2 - \xi_3},$$

odtud plyne

$$(\eta_1 - \eta_3)(\xi_2 - \xi_3) = (\eta_2 - \eta_3)(\xi_1 - \xi_3) . \quad (21)$$

Rovnost (21) však vyjadřuje nutnou a postačující podmínku pro to, aby body Z_1, Z_2, Z_3 ležely v přímce, i v případě, že některé z nich splynou. Kromě toho má rovnice (21) i tu výhodu, že nevylučuje případy, kdy přímky Z_1Z_3, Z_2Z_3 jsou rovnoběžné s osou y.

Po dosazení z rovnic (19) a (20) do rovnice (21) po několikeré úpravě, s využitím rovností

$$a_1^2 + b_1^2 = 1 , \quad a_2^2 + b_2^2 = 1 ,$$

dostaneme tvar

$$a_1a_2(a_2b_1 + a_1b_2)\xi^2 + a_1a_2(a_2b_1 + a_1b_2)\eta^2 + \xi(b_2^2 - b_1^2) - \\ - \eta(a_1b_1 + a_2b_2) = 0 . \quad (22)$$

Koeficienty u kvadratických členů se sobě rovnají a jsou různé od nuly (odůvodněte!). Rovnice (22) může být proto rovnicí kružnice. Aby to byla skutečně kružnice (a nikoliv pouze bod nebo dokonce množina prázdná), musí jí vyhovovat souřadnice alespoň dvou různých bodů. Avšak podle naší předběžné úvahy již víme, že geometrickému místu $\mathbf{M}$ patří body A, B, C. Odtud tedy dostáváme, že rovnice (22) představuje kružnici $\mathbf{K}$ opsanou trojúhelníku ABC.

Tím je dokázáno, že $\mathbf{M} \subset \mathbf{K}$.

Nechť nyní bod $Z = [\xi; \eta]$ nepatří množině $\mathbf{M}$. Pak body Z_1, Z_2, Z_3 neleží v přímce, a tedy neplatí pro jejich souřadnice rovnost (21). Pak však nemůže pro souřadnice bodu Z platit ani rovnost (22). To však znamená, že $\mathsf{K} \subset \mathsf{M}$.

Výsledek. Geometrické místo M je kružnice K opsaná trojúhelníku ABC.

Z řešení posledního příkladu je vidět, že nemusíme vždy nutně upravovat získanou kvadratickou rovnici na některý ze základních tvarů, které uvádíme v kapitole **5.** V našem případě např. včas provedená syntetická úvaha nás zachránila od nepříliš lákavé úpravy algebraické rovnice (22). Kromě toho zjištění středu a poloměru kružnice K by nám neukázalo, že jde o kružnici opsanou trojúhelníku ABC.

15. Příklad. Je dána kružnice k se středem S a poloměrem ϱ. Ve vzdálenosti v $(0 < v \neq \varrho)$ od středu S je dán bod D. Bod X probíhá kružnici k. Druhý průsečík přímky DX s kružnicí k je bod Y. Označme Z takový bod polopřímky DX, pro který platí

$$\frac{2}{DZ} = \frac{1}{DX} + \frac{1}{DY}. \tag{23}$$

Vyšetříme geometrické místo M bodů Z.

Řešení. Vyšetřované geometrické místo M je zřejmě souměrné podle přímky DS i podle středu D. Soustavu souřadnic můžeme tvolit pro $v > \varrho$ podle obrázku 28a a pro $0 < v < \varrho$ podle obrázku 28b.

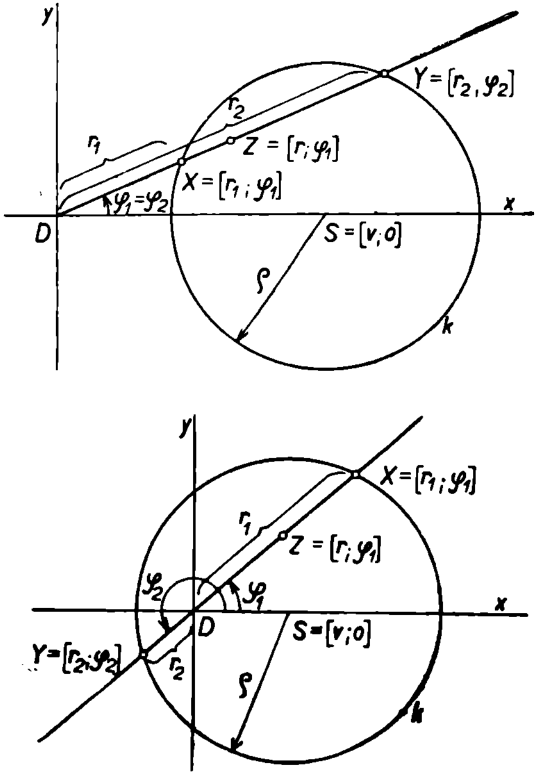
Kružnice k má potom rovnici

$$(x - v)^2 + y^2 = \varrho^2 , \tag{24}$$

a přímka DX má rovnici

$$x \sin \varphi - y \cos \varphi = 0, \quad (0 \leqq \varphi < 2\pi) . \tag{25}$$

V tomto případě bude vhodnější použít polární sou-



Obr. 28ab

stavy souřadnic, jejichž pól je v bodě D a polární osa v polopřímce DS. Použijeme převodních vzorců

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \tag{26}$$

a rovnici (24) přepíšeme ve tvaru

$$(r\cos\varphi - v)^2 + r^2\sin^2\varphi = \varrho^2\,,$$

resp. po úpravě

$$r^2 - 2rv\cos\varphi + v^2 - \varrho^2 = 0\,. \tag{27}$$

Rovnici (27) vyhovují ovšem i polární souřadnice bodů $X = [r_1; \varphi_1]$, $Y = [r_2; \varphi_2]$. Musíme však rozlišit dva případy: a) Bod D leží vně kružnice k (tj. $v > 0$), pak bod Y leží na polopřímce DX a je tedy $\varphi_1 = \varphi_2$ (obr. 28a). b) Bod D leží uvnitř kružnice k (tj. $0 < < v < \varrho$), pak bod Y leží na polopřímce opačné k polopřímce DX. V tom případě je $\varphi_1 = \varphi_2 - \pi$ (obr. 28b).

Všimněme si nejdříve prvního případu. Čísla $r_1 = = DX$, $r_2 = DY$ jsou (kladné) kořeny rovnice

$$r^2 - 2rv\cos\varphi_1 + v^2 - \varrho^2 = 0\,. \tag{27a}$$

Pokud je diskriminant

$$\Delta = v^2\cos^2\varphi_1 + \varrho^2 - v^2 = \varrho^2 - v^2\sin^2\varphi_1 \tag{28}$$

nezáporný, jsou kořeny $r_{1,2}$ rovnice (27a) rovny

$$r_{1,2} = v\cos\varphi_1 \pm \sqrt{\Delta}\,. \tag{29}$$

Diskriminant Δ je nezáporný právě tehdy, je-li

$$|\sin\varphi_1| \leqq \frac{\varrho}{v} < 1\,. \tag{30}$$

Odtud plyne pro φ_1 nutná podmínka $|\varphi_1| < \frac{\pi}{2}$, a tedy $\cos \varphi_1 > 0$. Protože v tomto případě je

$$\Delta < v^2 \cos^2 \varphi_1 ,$$

plyne z našich úvah, že oba kořeny (29) jsou, za předpokladu, že $\Delta > 0$, kladné. Jsou to proto první souřadnice bodů X a Y v soustavě polárních souřadnic.

Nechť je nyní vzdálenost $DZ = r$. Potom z podmínky (23) dostaneme

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

neboli po dosazení

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{v \cos \varphi_1 + \sqrt{\Delta}} + \frac{1}{v \cos \varphi_1 - \sqrt{\Delta}}$$

a po úpravě

$$v^2 - \varrho^2 = rv \cos \varphi_1 . \qquad (31)$$

Použijeme-li opět převodních vzorců (26), můžeme rovnici (31) přepsat v kartézské soustavě souřadnic ve tvaru

$$v^2 - \varrho^2 = vx ,$$

resp.

$$x = \frac{v^2 - \varrho^2}{v} . \qquad (32)$$

Dostali jsme tak rovnici přímky. Bez dlouhého početního vyšetřování je však zřejmé, že geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je podmnožinou pouze té části $\boldsymbol{P}$ přímky (32), která leží uvnitř úhlu určeného tečnami z bodu D ke kružnici k (obr. 29a). Z podmínky (23) kromě toho snadno odvodíme, že

$$DX < DZ < DY, \text{ resp. } DY < DZ < DX.$$

Není proto těžké uhodnout, že **P** je vnitřek úsečky, jejíž krajní body jsou body dotyku T_1, T_2 tečen kružnice k vedených z bodu D. (Tento odhad snadno dokážete pomocí Euklidovy a Pythagorovy věty s užitím rovnosti (32).)

Důkaz tvrzení $\mathbf{P} \subset \mathbf{M}$ přenecháváme již čtenáři.

Dále se budeme zabývat druhým případem ($0 < v < \varrho$). Podobně jako výše zjistíme, že čísla $r_1 = DX$, $r_2 = DY$ jsou kladné kořeny rovnic

$$r^2 - 2rv\cos\varphi_{1,2} + v^2 - \varrho^2 = 0\,, \tag{27b}$$

resp.

$$r^2 \mp 2rv\cos\varphi_1 + v^2 - \varrho^2 = 0\,.$$

Společný diskriminant

$$\Delta = \varrho^2 - v^2\sin^2\varphi_1$$

obou rovnic (27b) je vždy kladný. Kořeny rovnic (27b) jsou

$$v\cos\varphi_1 \pm \sqrt{\Delta}\,, \text{ resp. } -v\cos\varphi_1 \pm \sqrt{\Delta}\,;$$

kladné z nich jsou pouze kořeny

$$r_1 = v\cos\varphi_1 + \sqrt{\Delta}\,, \text{ resp. } r_2 = -v\cos\varphi_1 + \sqrt{\Delta}\,.$$

To jsou první souřadnice bodů X, Y (v soustavě polárních souřadnic).

Nyní opět využijeme podmínky (23). Po dosazení za $DZ = r_1$, $DY = r_2$ dostaneme

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\,,$$

resp.

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{v\cos\varphi_1 + \sqrt{\Delta}} + \frac{1}{-v\cos\varphi_1 + \sqrt{\Delta}}\,.$$

Po úpravě dojdeme k rovnici

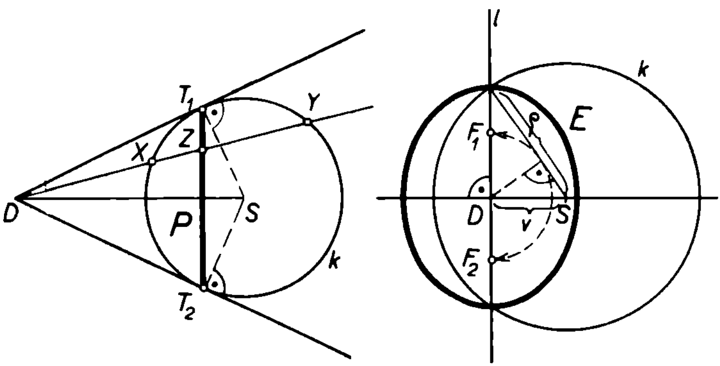
$$r^2(\varrho^2 - v^2\sin^2\varphi_1) = (\varrho^2 - v^2)^2\,. \tag{33}$$

Rovnici (33) přepíšeme v kartézské soustavě souřadnic s užitím převodních vzorců (26). Po úpravě dostaneme konečný tvar

$$\frac{x^2}{\varrho^2 - v^2} + \frac{y^2}{\left(\dfrac{\varrho^2 - v^2}{\varrho}\right)^2} = 1\,. \tag{34}$$

Protože je $\varrho > v$, je i $\varrho^2 - v^2 > 0$ a tedy rovnice (34) je početním vyjádřením elipsy **E** se středem D a hlavní osou v přímce DS.

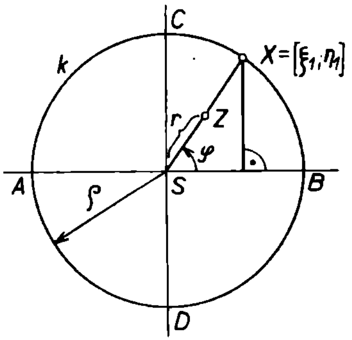
Tím je dokázáno, že $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{E}$. Důkaz tvrzení $\boldsymbol{E} \subset \boldsymbol{M}$ přenecháváme opět čtenáři.



Obr. 29ab.

Výsledek. a) Je-li $v > \varrho$, je geometrické místo $\boldsymbol{M}$ vnitřek $\boldsymbol{P}$ úsečky T_1T_2, jejíž krajní body jsou zároveň body dotyku tečen z bodu D ke kružnici k (obr. 29a).

b) Je-li $v < \varrho$, je geometrické místo $\boldsymbol{M}$ elipsa $\boldsymbol{E}$ se středem D. Dále, jak sami snadno zjistíte, jsou hlavní vrcholy elipsy $\boldsymbol{E}$ průsečíky kružnice k s kolmicí l k přímce DS jdoucí bodem D. Excentricita elipsy $\boldsymbol{E}$ je rovna výšce pravoúhlého trojúhelníka s přeponou ϱ a odvěsnou v (obr. 29b).



Obr. 30

Uvedeme si ještě jeden příklad, ve kterém s výhodou použijeme polárních souřadnic.

16. Příklad. Je dána kružnice $k \equiv (S; \varrho)$ a její průměr AB. Bod X probíhá kružnici k. Z je takový bod polopřímky SX, jehož vzdálenost od počátku S je menší než vzdálenost bodu X od přímky AB. Vyšetříme geometrické místo $\boldsymbol{M}$ všech bodů Z.

Řešení. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je souměrné podle přímky AB i podle osy úsečky AB. Zvolíme proto nejdříve kartézskou soustavu souřadnic podle obrázku 30.

Souřadnice bodu X vyjádříme s výhodou pomocí směrového úhlu φ přímky SX.

$$\xi_1 = \varrho \cos \varphi, \quad \eta_1 = \varrho \sin \varphi . \tag{35}$$

Zvolme nyní soustavu polárních souřadnic s pólem S

a polární osou v polopřímce SB. Jsou-li nyní r, φ polární souřadnice libovolného bodu Z množiny $\boldsymbol{M}$, pak je

$$r < |\varrho \sin \varphi| \,. \tag{36}$$

Zbývá zjistit, který útvar má v polárních souřadnicích početní vyjádření (36). Pro $r = 0$ dostaneme pól S, který tedy patří množině $\boldsymbol{M}$. Můžeme tedy v dalším předpokládat, že je $r > 0$ a užít převodních vzorců

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ x = r \cos \varphi,\ y = r \sin \varphi$$

k vyjádření nerovnosti (36) v kartézské soustavě souřadnic; dostaneme

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \varrho \frac{|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,,$$

resp. po úpravě

$$\left.\begin{aligned} x^2 + \left[y - \frac{1}{2}\varrho\right]^2 &< \frac{1}{4}\varrho^2, \quad \text{pro} \quad y \geqq 0\,, \\ x^2 + \left[y + \frac{1}{2}\varrho\right]^2 &< \frac{1}{4}\varrho^2, \quad \text{pro} \quad y \leqq 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

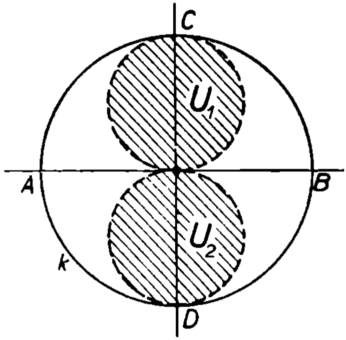
Protože nerovnosti (37) jsou početním vyjádřením vnitřků $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{U}_2$ kruhů dotýkajících se osy X v počátku, je tím dokázán vztah $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_1 \cup \boldsymbol{U}_2 \cup \{S\}$.[1])

Obráceně si sami již snadno ověříte, že je splněn vztah $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{M}$.

Výsledek. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ tvoří vnitřky $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{U}_2$ dvou kruhů s průměry CS, DS spolu s bodem S, kde CD je průměr kružnice k kolmý k přímce AB a bod S je průsečníkem průměrů AB a CD (obr. 31).[2])

---

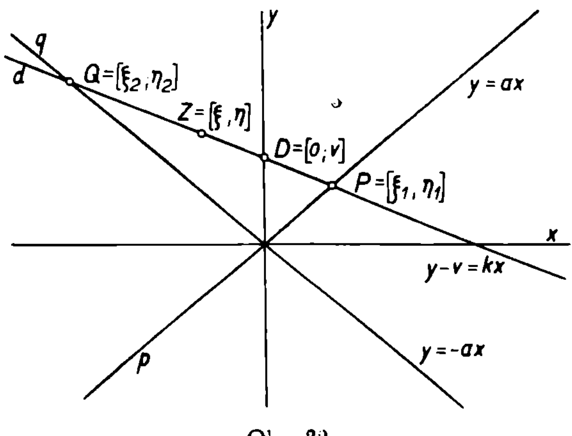
[1]) Zápis $\{S\}$ značí množinu obsahující jediný bod S.
[2]) Na obr. 31 si doplňte označení S středu kružnice k.



Obr. 31

17. Příklad. Jsou dány dvě různoběžky p, q s průsečíkem R. Na jedné z os různoběžek p, q je dán bod D ve vzdálenosti v ($v > 0$) od bodu R. Bodem D prochází přímka d, která se kolem něj otáčí. Body P, Q jsou průsečíky přímky d s přímkami p, q. Vyšetříme geometrické místo $\boldsymbol{M}$ všech středů Z úseček PQ.

Řešení. Vzhledem k souměrnosti geometrického místa $\boldsymbol{M}$ podle přímky DR, zvolíme soustavu souřadnic podle obrázku 32.



Obr. 32

Rovnice přímek p, q, d můžeme napsat po řadě ve tvaru

$$y = ax\,, \tag{38a}$$

$$y = -ax\,, \tag{38b}$$

$$y - v = kx. \tag{38c}$$

Je sice pravda, že ve tvaru (38c) nemůžeme zapsat přímku d v případě, že splyne s osou y, ale v tomto případě body P, Q splynou a nemá smyslu mluvit o středu úsečky PQ.

Nyní určíme souřadnice bodů $P = [\xi_1;\ \eta_1]$, $Q = [\xi_2;\ \eta_2]$. Řešením soustavy složené z rovnic (38a), (38c) a soustavy rovnic (38b), (38c) dostaneme (pokud $|k| \neq a$)

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{v}{a-k}\,, & \eta_1 &= \frac{av}{a-k}\,, \\ \xi_2 &= \frac{-v}{a+k}\,, & \eta_2 &= \frac{av}{a+k}\,. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Nyní již můžeme vypočítat souřadnice středu Z úsečky PQ:

$$\xi = \frac{kv}{a^2 - k^2}\,, \quad \eta = \frac{a^2 v}{a^2 - k^2}\,. \tag{40}$$

Abychom dostali početní vyjádření množiny $\boldsymbol{M}$, vyloučíme z rovnic (40) parametr k. Předně určíme podíl (zřejmě je $\eta \neq 0$)

$$\frac{\xi}{\eta} = \frac{k}{a^2}\,.$$

Odtud vypočítáme k a dosadíme do druhé rovnice (40):

$$\eta = \frac{a^2 v}{a^2 - \left(\dfrac{a^2 \xi}{\eta}\right)^2}\,.$$

Po jednoduchém výpočtu vyjde

$$\eta(\eta^2 - a^2\xi^2 - v\eta) = 0\,.$$

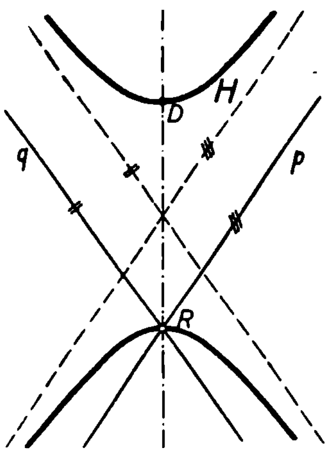
Protože $\eta \neq 0$, můžeme jím krátit a po další úpravě dojít k tvaru

$$\frac{\xi^2}{\left(\dfrac{v}{2a}\right)^2} - \frac{\left(\eta - \dfrac{1}{2}v\right)^2}{\left(\dfrac{v}{2}\right)^2} = -1\,. \tag{41}$$

Dostali jsme početní vyjádření hyperboly $\boldsymbol{H}$. Jak snadno zjistíme, jsou hlavními vrcholy hyperboly $\boldsymbol{H}$ body R, D a asymptoty jsou rovnoběžné s přímkami p, q.

Nezapomeňme však, že z hyperboly musíme vyloučit bod R. Zjistili jsme tedy, že geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je částí útvaru $\boldsymbol{U}$, který se skládá ze všech bodů zmíněné hyperboly $\boldsymbol{H}$ s výjimkou bodu R. (Obr. 33.)

Obrácení provedeného postupu přenecháváme již čtenáři.



Obr. 33

Výsledek. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je (s výjimkou jediného bodu R) hyperbola $\boldsymbol{H}$ s hlavními vrcholy R, D a asymptotami rovnoběžnými s přímkami p, q.

Cvičení

23. Jsou dány dvě různé rovnoběžky AB, c. Bod C probíhá přímku c. Vyšetřete geometrické místo **M** všech průsečíků výšek trojúhelníků ABC.
24. Jsou dány dvě shodné kružnice $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ se společným bodem dotyku T. Bod X probíhá kružnici $\mathbf{K}_1$, bod Y kružnici $\mathbf{K}_2$ tak, že úhel XTY je pravý. Vyšetřete geometrické místo **M** středů Z úseček XY.
25. Dvě rovnoběžky a, b protíná společná kolmice AB (A je bod přímky a, B je bod přímky b). Bod X probíhá přímku a, bod Y přímku b a to tak, že součin $AX \cdot BY$ je stále roven číslu $k \neq 1$. Body X, Y jsou
    a) v téže polorovině určené přímkou AB,
    b) v opačných polorovinách určených přímkou AB.
    Vyšetřete geometrické místo **M** průsečíků Z přímek AY, BX.
26. Jsou dány dva nesoustředné kruhy $\mathbf{K}_1 \equiv (S_1; r_1)$, $\mathbf{K}_2 \equiv (S_2; r_2)$. Bod X probíhá kruh $\mathbf{K}_1$, bod Y kruh $\mathbf{K}_2$ tak, že součet úhlů S_1S_2Y, S_2S_1X je stále roven φ. Vyšetřete geometrické místo **M** středů Z úseček XY.
27. Jsou dány dvě různoběžky a, b se společným bodem S. Po přímce a se pohybuje bod X a po přímce b bod Y tak, že trojúhelník XYS má konstantní obsah P. Vyšetřete geometrické místo **M** středů Z úseček XY.
28. Na obvodu čtverce $PQRS$ se pohybují stálou rychlostí tři body U, V, W, které rozdělují obvod tohoto čtverce na tři stejně dlouhé části (lomené čáry). Vyšetřete geometrické místo **M** těžišť Z všech trojúhelníků UVW.
29. a) Je dána kružnice $\mathbf{K} \equiv (S; \varrho)$ a bod O ve vzdálenosti v $(0 < v \neq \varrho)$ od středu S. Dále je dáno číslo $a > 0$. Bod X probíhá kružnici $\mathbf{K}$. Vyšetřete množinu **M** všech bodů Z, kde Z je takový bod polopřímky OX, pro který je $OX \cdot OZ = a^2$. (Užijte soustavy polárních souřadnic!)
    b) Řešte tutéž úlohu pro případ $v = \varrho$.

30. Jsou dány dvě různoběžky p, q s průsečíkem R. Na ose přímek p, q je dán bod D ve vzdálenosti v ($v > 0$) od bodu R. Bod P probíhá přímku p; Q je průsečík přímky DP s přímkou q. Vyšctřete geometrické místo **M** průsečíků Z výšek všech trojúhelníků PQR.