Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic

1. kapitola. Úvodní poznámky

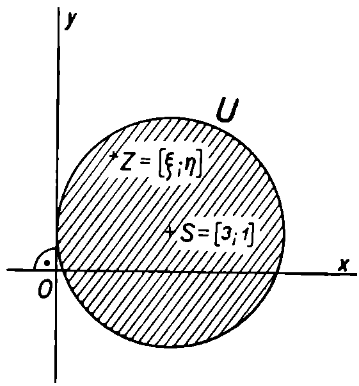
In: Milan Koman (author): Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1966. pp. 9–17.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403581

1. kapitola

ÚVODNÍ POZNÁMKY

Každá matematická disciplína si vytváří celou řadu základních pojmů, se kterými potom běžně pracuje a které dále rozvíjí. Proto úspěšné studium kterékoli matematické disciplíny vyžaduje důkladné pochopení všech základních pojmů i souvislostí mezi nimi. Každá nepřesnost nebo nejasnost se vždy, ať dříve či později, nějak vymstí. Proto i my si nejdříve podrobně vysvětlíme některé více či méně známé věci z analytické geometrie.



Obr. 1

Předně si ujasníme **co to znamená,** když v analytické geometrii řekneme, **že nějaký geometrický útvar *U*[1]) má** (v kartézské soustavě souřadnic) **to a to početní vyjádření** (např. tu a tu rovnici či nerovnost). Jako příklad, na kterém si to ukážeme, uvedeme větu:

[1]) Geometrické útvary chápeme všude jako množiny bodů.

Kruh ***U*** *se středem* $S = [3; 1]$ *a poloměrem* $r = 3$ (obr. 1) *má (v kartézské soustavě souřadnic) početní vyjádření*

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 \leqq 9.^{1)} \qquad (1)$$

Když si tuto větu podrobně promyslíme, zjistíme, že se v ní mluví vlastně o *dvou množinách*. Je to jednak kruh ***U***, který je množinou všech bodů $Z = [\xi; \eta]$, které mají od středu S vzdálenost nejvýše rovnou třem, jednak je to množina ***P*** všech bodů $Z = [\xi; \eta]$, jejichž souřadnice vyhovují početnímu vyjádření (1). Uvedená věta pak říká, že množiny ***U*** a ***P*** se sobě rovnají, tzn. skládají se přesně z týchž bodů.

Připomeňme si, že bodové **množiny *U* a *P* se sobě rovnají** (což zapisujeme ***U*** = ***P***) právě tehdy, jsou-li pro každý bod Z splněny podmínky:

[A]: Jestliže bod Z *patří množině* ***U***, potom *patří i množině* ***P***. Jinými slovy: Množina ***U*** je částí množiny ***P***, což zapisujeme $U \subset P$.

V našem případě to znamená: Jestliže bod $Z = [\xi; \eta]$ patří kruhu ***U***, pak jeho souřadnice vyhovují nerovnosti (1).

[B]: Jestliže bod Z *patří množině* ***P***, potom *patří i množině* ***U***. Jinými slovy: Množina ***P*** je částí množiny ***U***, což zapisujeme $P \subset U$[2]).

V našem případě to znamená: Jestliže souřadnice bodu $Z = [\xi; \eta]$ vyhovují nerovnosti (1), pak bod Z patří kruhu ***U***.

---

[1]) Viz např. [6] na str. 87.

[2]) Připomeňme, že v matematice má slovo „část" širší význam než v běžné řeči. V hovorové i spisovné češtině je totiž vždy část „menší" než celek. Naproti tomu v matematice, mluvíme-li o části, nevylučujeme tím celek. Proto například každý čtverec je svou vlastní částí, právě tak jako každá přímka je částí sama sebe.

Obě podmínky [A] i [B] můžeme vyslovit též v tzv. *obměněném (negativním) tvaru:*

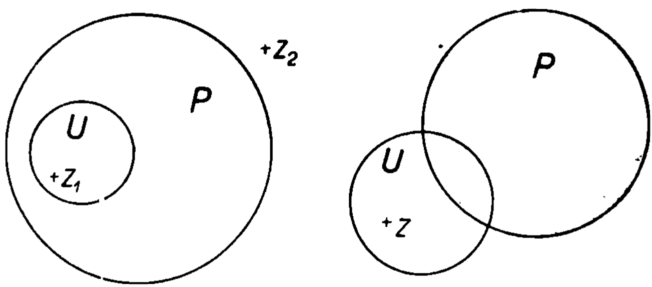
[A′]: Jestliže bod Z *nepatří množině* ***P***, potom *nepatří ani množině* ***U***.

V našem případě to znamená: Jestliže souřadnice bodu $Z = [\xi; \eta]$ nevyhovují nerovnosti (1), pak bod Z nepatří kruhu ***U***.

[B′]: Jestliže bod Z *nepatří množině* ***U***, potom *nepatří ani množině* ***P***.

V našem případě to opět znamená: Jestliže bod $Z = [\xi; \eta]$ nepatří kruhu ***U***, pak jeho souřadnice nevyhovují nerovnosti (1).

Podmínky [A] a [A′], právě tak jako podmínky [B] a [B′], říkají jinými slovy o množinách ***U*** a ***P*** přesně totéž. Tak např. ve všech situacích, kdy je splněna jedna z podmínek [A] a [A′], je splněna i druhá, a ve všech situacích, kdy jedna z těchto podmínek neplatí, neplatí ani druhá. Správnost tohoto tvrzení si můžete ověřit na



$U \subset P$ (platí [A] i [A′]) $U \not\subset P$ (neplatí [A] ani [A′])

Obr. 2ab

množinových diagramech na obrázcích 2ab. Totéž platí i o podmínkách [B] a [B'].

Vlastnosti [A] a [B], resp. [A'] a [B'] mají základní význam, neboť ukazují cestu, jak se dokazuje rovnost dvou množin ***U*** a ***P***. Je třeba vždy ověřit jednak jednu z podmínek [A] a [A'], jednak jednu z podmínek [B] a [B']. Tuto hlavní myšlenku vyjadřuje schéma:

ověřit [A] či [A'], tj. $U \subset P$

Množina ***U***, tj. daný geometrický útvar	**Množina** ***P***, udaná početním vyjádřením

ověřit [B] či [B'], tj. $P \subset U$

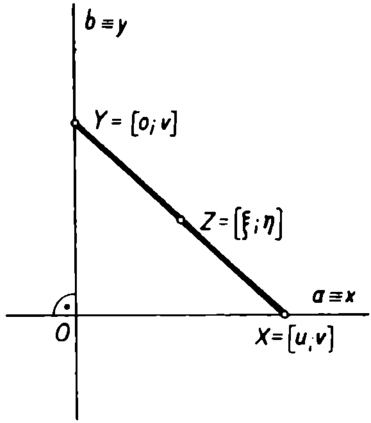
Pro úplnost si připomeňme, že *kartézskou soustavou souřadnic* rozumíme soustavu pravoúhlých souřadnic, při níž jsou za jednotky na obou osách zvoleny shodné úsečky. V této knížce však budeme pro stručnost místo slov „kartézská soustava souřadnic" užívat kratšího názvu „soustava souřadnic".

Všimněme si nyní podrobněji **struktury řešení úloh na vyšetřování geometrických míst bodů.** Také zde operujeme s množinami. Jestliže při vyšetřování geometrických míst bodů dané vlastnosti používáme *metody souřadnic* (tj. analytické geometrie), *pracujeme* většinou dokonce *se třemi množinami*. Ukážeme si to opět na příkladě.

1. Příklad. Jsou dány dvě kolmice a, b. Bod X probíhá přímku a, bod Y přímku b a to tak, že úsečka XY

má stálou délku $2d$. Máme vyšetřit geometrické místo $\boldsymbol{M}$ středů Z všech úseček XY.

Řešení. Za osy souřadnic zvolíme přímky a, b (obr. 3). Zvolíme si libovolnou úsečku XY vyhovující zadání příkladu; její střed je bod $Z = [\xi; \eta]$. Tím dostaneme libovolný bod geometrického místa (tj. *první množiny*) $\boldsymbol{M}$. Souřadnice bodů X, Y zvolíme podle obrázku 3.



Obr. 3

Úsečka XY má délku $2d$, tzn. je

$$XY = \sqrt{(u - 0)^2 + (0 - v)^2} = \sqrt{u^2 + v^2} = 2d. \qquad (2)$$

Střed Z úsečky XY má souřadnice

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}(u + 0) = \frac{1}{2}u, \\ \eta &= \frac{1}{2}(0 + v) = \frac{1}{2}v. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Parametry u, v vyloučíme, jestliže dosadíme za u, v ze vztahů (3) do poslední rovnosti (2). Po úpravě zjistíme, že souřadnice libovolného bodu $Z = [\xi; \eta]$ množiny $\boldsymbol{M}$ vyhovují početnímu vyjádření

$$\xi^2 + \eta^2 = d^2. \qquad (4)$$

Tím jsme však dostali *druhou množinu*. Je to množina $\boldsymbol{P}$, kterou tvoří všechny body $Z = [\xi; \eta]$, jejichž souřadnice vyhovují rovnici (4). Z dosavadních úvah zároveň vyplývá, že je

$$\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{P}. \tag{5}$$

(Vztah (5) jsme totiž dokázali ověřením podmínky [A].)

Abychom dokázali rovnost množin $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{P}$, musíme ještě dokázat vztah

$$\boldsymbol{P} \subset \boldsymbol{M}. \tag{6}$$

To provedeme např. ověřením podmínky [B′]. Nechť bod $Z = [\xi; \eta]$ nepatří množině $\boldsymbol{M}$, tzn. Z je střed úsečky XY, která má sice krajní body na přímkách a, b, ale nemá délku $2d$. Pak

$$XY = \sqrt{u^2 + v^2} \neq 2d. \tag{2′}$$

Dosadíme-li opět ze vztahů (3) za u a v do nerovnosti (2′), dostaneme po úpravě

$$\xi^2 + \eta^2 \neq d^2. \tag{4′}$$

Nerovnost (4′) však znamená, že bod $Z = [\xi; \eta]$ nepatří ani množině $\boldsymbol{P}$. Tím je tedy dokázán vztah (6), který spolu se vztahem (5) ukazuje, že je

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M}. \tag{7}$$

Z analytické geometrie však víme, že rovnice (4) je početním vyjádřením kružnice $\boldsymbol{U}$ se středem O v počátku soustavy souřadnic (tj. v průsečíku přímek a, b) a s poloměrem d. Kružnice $\boldsymbol{U}$ je tedy *třetí množinou;* přitom analytická geometrie říká, že

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{P}. \tag{8}$$

Z rovností (7) a (8) pak plyne, že

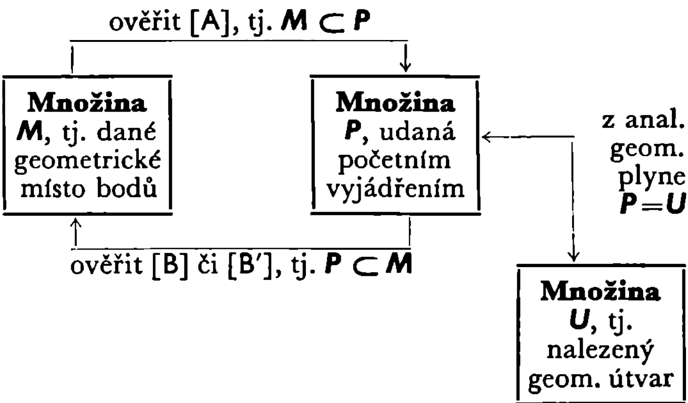
$$U = M,$$

tzn. kružnice U je vyšetřovaným geometrickým místem M.

Výsledek. Geometrické místo M je kružnice U se středem v průsečíku kolmic a, b a s poloměrem d.

Řešení příkladu 1 jsme udělali tak podrobně proto, abychom ukázali všechny tři množiny, které se v průběhu řešení vyskytují. Přitom ovšem množina P charakterizovaná společným početním vyjádřením množin U, M sehrála při řešení pouze úlohu jakéhosi prostředníka „třetí osoby". Proto také při řešení dalších příkladů ani o množině P explicitně nemluvíme; mluvíme však vždy o společném početním vyjádření množin U, M, což je ovšem v podstatě totéž.

Strukturu řešení úlohy na vyšetřování geometrických míst bodů metodou souřadnic můžeme vyjádřit schématem:



Můžeme tedy říci, že řešení se v podstatě skládá ze tří fází. Předně zjistíme, jakému početnímu vyjádření vyhovují všechny body množiny M. Tím vlastně najdeme množinu P a zároveň ověřením podmínky [A] dokážeme, že $M \subset P$.

Potom ověřením jedné z podmínek [B] a [B′] dokážeme, že je též $P \subset M$. Tato fáze řešení má, populárně řečeno, zajistit, že se do P nepřipletly body, které nepatří geometrickému místu M, případně takovéto „přiživující“ se body včas vyloučit.

Konečně ve třetí fázi na základě znalostí z analytické geometrie určíme geometrický útvar U, který se rovná množině P a tedy i množině M. Tato fáze je tedy vlastně jen dílem okamžiku.

Připomeňme však, že *metoda souřadnic je při řešení jen pomocným aparátem, a proto je třeba vždy výsledek formulovat nezávisle na zvolené soustavě souřadnic, tj. pouze s použitím daných prvků.*

Je samozřejmé, že není účelné užívat při vyšetřování geometrických míst bodů dané vlastnosti pouze metody souřadnic. Např. nebudeme používat této metody, známe-li jednoduchý syntetický způsob řešení. Proto si řekněme, **kdy** při řešení úloh o geometrických místech bodů **užíváme metody souřadnic:**

1. Jestliže výsledek nedovedeme jiným způsobem odhadnout.
2. Jestliže sice dovedeme odhadnout výsledek, ale svůj odhad nedovedeme jinak dokázat.

Ukážeme si však později, že ani v uvedených dvou případech se nevyhýbáme jednoduchým syntetickým úsudkům, neboť ty mohou řešení značně zjednodušit. Metoda souřadnic je totiž sice velmi spolehlivá metoda (vede k cíli i tam, kde např. syntetická metoda selhala), ale někdy je dost pracná. Odtud staré pořekadlo, že analytická geometrie nahradila duchaplnost syntetické geometrie trpělivostí.

Pracnost početní metody do značné míry ovlivňuje mimo jiné i vhodnost či nevhodnost volby soustavy souřadnic. Pro nejvýhodnější volbu soustavy souřadnic neexistuje bohužel univerzální návod. Ve většině případů je však účelné **volit soustavu souřadnic podle zásady:** Jestliže je geometrické místo $\boldsymbol{M}$ souměrné podle nějaké přímky, ztotožníme tuto přímku s některou souřadnicovou osou. Jestliže je geometrické místo $\boldsymbol{M}$ souměrné podle nějakého středu, zvolíme jej za počátek soustavy souřadnic. (Této zásady jsme mlčky využili již při řešení příkladu 1.)