2. kapitola

ZÁKLADNÍ POJMY A VĚTY Z NAUKY O DĚLITELNOSTI ČÍSEL

Již v 7. třídě ZDŠ jste se seznámili s významem některých odborných názvů z nauky o dělitelnosti přirozených čísel. Definicí $\mathbf{D}_7$ stanovíme jejich význam v nauce o dělitelnosti celých čísel.

$\mathbf{D}_7$ *Existuje-li k daným celým číslům a, b takové celé číslo q, že platí $a = bq$, zapisujeme to symbolicky $b \mid a$; zápis $b \nmid a$ znamená, že neplatí vztah $b \mid a$.*

Zápis $b \mid a$ čteme zpravidla jedním z těchto tří způsobů:

1. *číslo b je dělitelem čísla a,*
2. *číslo a je dělitelné číslem b,*
3. *číslo a je násobkem čísla b.*

Mezi čísly 21 a 7 platí tedy vztah $7 \mid 21$, poněvadž lze najít celé číslo 3 tak, že platí $21 = 7.3$. Zápis $7 \mid 21$ čteme jedním z těchto tří způsobů: číslo 7 je dělitelem čísla 21, číslo 21 je dělitelné číslem 7, číslo 21 je násobkem čísla 7. Na tomto jednoduchém příkladu vidíte, že význam názvů, které jste poznali v nauce o dělitelnosti přirozených čísel, se definicí $\mathbf{D}_7$ nezměnil. Na jiných příkladech si však ukážeme jejich širší význam v oboru celých čísel. Tak např. platí $-3 \mid 12$, neboť $12 = (-3).(-4)$, $5 \mid -20$, poněvadž $-20 = 5.(-4)$, $-13 \mid -91$, poněvadž $-91 = (-13).7$. Neplatí však $3 \mid 10$, $-7 \mid 15$, čili platí $3 \nmid 10$, $-7 \nmid 15$.

Povšimněte si zvláště toho, že vždy platí $1 \mid a$, $-1 \mid a$, $a \mid a$, $-a \mid a$, $a \mid -a$, $-a \mid -a$, ať je a kterékoli celé číslo.

Dále platí vždy $b \mid 0$, ať je b kterékoli celé číslo, neboť $0 = b \,.\, 0$; platí tedy i $0 \mid 0$, neboť $0 = 0 \,.\, q$ pro každé celé číslo q. Neplatí $0 \mid a$, když $a \neq 0$, neboť v tom případě neexistuje takové celé číslo q, aby platilo $a = 0 \,.\, q$. Platí-li $0 \mid a$, pak musí být $a = 0$.

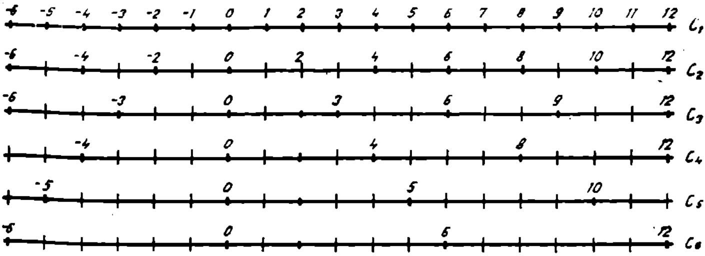
Zápisy $\frac{5}{2} \mid 10$, $\frac{5}{2} \nmid 10$ nemají ovšem žádný smysl, i když $10 = \frac{5}{2} \,.\, 4$. Vztahy $b \mid a$, $b \nmid a$ jsme totiž definovali jen pro celá čísla a, b. Věty, které nemají smysl, nelze považovat za výroky pravdivé ani nepravdivé. Musíte si dobře pamatovat, že je rozdíl mezi významem názvu dělitel z hlediska číselné teorie a jeho významem z hlediska praktické aritmetiky. V té se např. při dělení $10 : \frac{5}{2} = 4$ číslo 10 nazývá dělenec, číslo $\frac{5}{2}$ dělitel a číslo 4 podíl. Pro dva rozdílné pojmy, pro které se v češtině užívá téhož názvu dělitel, existují v některých cizích jazycích rozdílné termíny.

V některých případech budeme k danému celému číslu a hledat takové přirozené číslo b, které je dělitelem čísla a. Abychom se mohli stručně vyjadřovat, zavedeme ještě jeden termín následující definicí.

D$_8$ *Přirozený dělitel čísla a znamená totéž jako přirozené číslo, které je dělitelem čísla a.*

Podle této definice je např. číslo 4 přirozeným dělitelem čísla -12. Množina $M = \{-10, -5, -2, -1, 1, 2, 5, 10\}$ je množinou všech dělitelů čísla 10 i čísla -10. Množina $N = \{1, 2, 5, 10\}$ je množina všech přirozených dělitelů čísla 10 i čísla -10.

Nyní si vysvětlíme význam názvu násobek i dělitel daného čísla názorně zobrazením celých čísel na číselných osách narýsovaných v obr. 1.



Obr. 1.

Jistě víte, že *číselná osa* je dána, zvolíme-li na přímce *počátek* znázorňující číslo 0 a *jednotkový bod* znázorňující číslo 1. Vzdáleností jednotkového bodu od počátku je určena *délková jednotka*, které užíváme známým způsobem k vyhledání bodů zobrazujících daná reálná čísla. V této knížce budeme se však zajímat jen o obrazy čísel celých.

Na obr. 1 je narýsováno šest navzájem rovnoběžných číselných os, jejichž počátky leží na téže kolmici ke všem osám. Také jednotkové body všech číselných os leží na téže kolmici ke všem osám. Na těchto číselných osách jsou po řadě zobrazeny části množin celých čísel C_m, $m = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Množiny C_m se skládají z těch celých čísel, jejichž obrazy dostaneme postupným nanášením úsečky o délce m jednotek od počátku v obou navzájem opačných směrech. Body, které zobrazují prvky množin C_m, jsou vyznačeny připsanými číslicemi. Všechna celá čísla, která jsou prvky množiny C_m, jsou násobky přirozeného čísla m i čísla k němu opačného $-m$; každé z čísel množiny C_m je dělitelné číslem m i číslem $-m$, čili čísla m i $-m$ jsou děliteli každého čísla z množiny C_m.

Sestrojíme-li bodem zobrazujícím číslo 6 na kterékoli číselné ose kolmici ke všem číselným osám, zjistíme, že na ní leží obrazy prvků z množin C_1, C_2, C_3, C_6. Odtud plyne, že čísla 1, 2, 3, 6 jsou přirozenými děliteli čísla 6. Obdobně zjistíme, že na kolmici procházející bodem -4 leží body zobrazující čísla z množin C_1, C_2, C_4, a že tedy čísla 1, 2, 4 jsou přirozenými děliteli čísla -4. Podrobnější úvahou o této grafické metodě k vyhledání přirozených dělitelů daného čísla plyne, že každé celé číslo s výjimkou čísla 0 má jen konečný počet přirozených dělitelů. Číslo 0 má však zřejmě nekonečně mnoho přirozených dělitelů.

Nyní dokážeme několik důležitých vět z teorie dělitelnosti celých čísel.

T$_6$ *Platí-li pro celá čísla a, b kterýkoli ze čtyř vztahů*

$$b \mid a, \quad -b \mid a, \quad b \mid -a, \quad -b \mid -a,$$

pak platí zároveň všechny ostatní.

Za předpokladu, že platí $b \mid a$ čili $a = bq$, kde q je číslo celé, plyne ihned $a = (-b).(-q)$ čili $-b \mid a$, dále $-a = b.(-q)$ čili $-b \mid a$, dále konečně $-a = (-b).q$ čili $-b \mid -a$.

Z věty **T**$_6$ plyne, že vyšetřování kteréhokoli ze čtyř vztahů v ní uvedených můžeme převést na vyšetřování některého ze zbývajících vztahů. To opravdu často činíme tak, že vyšetřujeme platnost vztahu $|b| \mid |a|$, takže zkoumáme vztah dělitelnosti mezi nezápornými celými čísly $|b|$, $|a|$. Přesto většinu vět z nauky o dělitelnosti budeme formulovat pro čísla celá, neboť jejich obecnější význam nám často ušetří hodně práce.

T$_7$ *Nechť a, b_1, b_2 jsou libovolná celá čísla. Platí-li vztah $b_1b_2 \mid a$, pak platí i vztahy $b_1 \mid a$, $b_2 \mid a$.*

Předpoklad $b_1 b_2 \mid a$ znamená $a = b_1 b_2 q$, kde q je číslo celé. Z této rovnosti plyne však ihned $a = b_1 . (b_2 q) = b_2 . (b_1 q)$ čili $b_1 \mid a$, $b_2 \mid a$.

Kdybychom chtěli větu $\mathbf{T}_7$ vyjádřit použitím slovních rčení, jejichž význam byl definován v $\mathbf{D}_7$, zjistili bychom, že by její zápis byl obšírnější a snad méně přehledný než při použití symbolických zápisů s významem vymezeným v $\mathbf{D}_8$. Výhodou symbolických zápisů je jejich stručnost a přehlednost, jíž bychom dosáhli ještě větší měrou, kdybychom po vytknutí významu písmen a, b_1, b_2 podmínkové souvětí z věty $\mathbf{T}_7$ zapsali symbolicky

$$(b_1 b_2 \mid a) \Rightarrow [(b_1 \mid a) \text{ a } (b_2 \mid a)]. \qquad (2,1)$$

Umluvíme si, že při symbolickém zápisu tohoto druhu je nalevo od značky $\Rightarrow$ zapsán předpoklad matematické věty uvedený v podmínkové větě podmínkového souvětí, napravo od značky $\Rightarrow$ tvrzení obsažené v hlavní větě tohoto podmínkového souvětí, které je logickým důsledkem předpokladu. Po tomto vysvětlení nám bude zřejmé, že zápis

$$[(b_1 \mid a) \text{ a } (b_2 \mid a)] \Rightarrow (b_1 b_2 \mid a) \qquad (2,2)$$

vyjadřuje větu obrácenou k větě (2,1). O důkaz této věty se však nebudeme pokoušet, neboť neplatí, jak je zřejmé z jednoduchého příkladu. Z platných vztahů $6 \mid 120$, $15 \mid 120$ neplyne vztah $6 . 15 \mid 120$. Matematické věty $\mathbf{T}_7$ budeme často užívat při řešení různých úloh; někdy budeme užívat i obecnější věty, které sami snadno dokážete: Jestliže celé číslo a je násobkem součinu celých čísel $b_1 . b_2 . b_3 \ldots b_n$, pak je číslo a násobkem každého z čísel b_1, b_2, $b_3, \ldots, b_n$, kde n je libovolné číslo přirozené.

Příklad 1. Je dáno přirozené číslo $a = 2^{45} + 3^{30}$. Dokažte, že platí vztah $17 \mid a$.

Především vás upozorňujeme, že známé Valouchovy *Pětimístné tabulky logaritmické* obsahují tabulky přirozených mocnin 2^n pro přirozená čísla $n \leqq 45$, 3^n pro přirozená čísla $n \leqq 36$ a mocniny jiných přirozených čísel. Takové tabulky jsou užitečné při řešení mnohých úloh z nauky o dělitelnosti čísel. Na konci této knížky je zařazena též tabulka II, která obsahuje mocniny 2^n, 3^n, pro přirozená čísla $n \leqq 25$. Užitím Valouchových tabulek byste mohli řešiti danou úlohu tak, jak to naznačíme:

$$a = 2^{45} + 3^{30} = 35\,184\,372\,088\,832 + 205\,891\,132\,094\,649 = 241\,075\,504\,183\,481 = 17\,.\,14\,180\,912\,010\,793.$$

Z tohoto výsledku podle věty $\mathbf{T}_7$ plyne ihned $17 \mid a$. Užitím vzorce (1,4) rozřešíme úlohu rychleji a bez pracných numerických výpočtů. Platí totiž $a = 2^{45} + 3^{30} = (2^3)^{15} + (3^2)^{15} = (2^3 + 3^2)(2^{42} - 2^{39} . 3^2 + \ldots + 3^{28}) = 17\,(2^{42} - 2^{39} . 3^2 + \ldots + 3^{28})$. Odtud ihned dostaneme $17 \mid a$.

Příklad 2. Je dáno přirozené číslo $a = 2^{58} + 1$. Rozložíme číslo a na součin tří přirozených čísel, z nichž každé je větší než 1. Pokusíme se opět použít k řešení úlohy vzorce (1,4). Snadno najdeme

$$a = 2^{58} + 1 = (2^2)^{29} + 1^{29} = (2^2 + 1)(2^{56} - 2^{54} + \ldots - 2^2 + 1) = 5\,(2^{56} - 2^{54} + \ldots - 2^2 + 1).$$

Dané číslo a má při zápisu v desítkové soustavě 18 cifer, jak si snadno ověříme přibližným výpočtem čísla 2^{58} (použitím logaritmických tabulek). Přitom snadno zjistíme, že druhý činitel součinu dvou čísel, který jsme našli jako rozklad čísla a, má 17 cifer. Proto bychom jen po dlouhém a úmorném výpočtu mohli najít druhého sedmnácticiferného činitele a rozložit ho v součin dvou činitelů, jak to v roce 1869 provedl francouzský matematik Landry. Ukážeme si nyní, že danou úlohu můžeme rozřešit jinou metodou za několik minut. Snadno vypočteme

$$a = 2^{58} + 1 = 2^2 . 2^{56} + 1 = 4.(2^{14})^4 + 1.$$

Nyní provedeme rozklad tohoto početního výrazu na součin podle vzorce $4x^4 + 1 = (2x^2 - 2x + 1)(2x^2 + 2x + 1)$, a to tak, že v něm za x dosadíme 2^{14}. Dostaneme

$$a = [2.(2^{14})^2 - 2.2^{14} + 1]\,[2.(2^{14})^2 + 2.2^{14} + 1] = \\ = (2^{29} - 2^{15} + 1) . (2^{29} + 2^{15} + 1).$$

Užitím tabulek zjistíme snadno $2^{29} = 536\,870\,912$, $2^{15} = 32\,768$ a konečně tedy
$a = 536\,838\,145 . 539\,903\,681 =$
$= 5 . 107\,367\,629 . 539\,903\,681$. Každé ze tří čísel nalezeného součinu je podle zobecněné věty $\mathbf{T}_7$ dělitelem čísla a.

$\mathbf{T}_8$ *Nechť a, b jsou libovolná celá čísla. Vztahy $a \mid b$, $b \mid a$ platí zároveň, když a jen když $|a| = |b|$.*

Dříve než uvedeme snadný důkaz této věty, která má opět formu podmínkového souvětí, ukážeme její symbolický zápis:

$$(|a| = |b|) \Leftrightarrow [(a \mid b) \text{ a } (b \mid a)]. \qquad (2,3)$$

Umluvíme se, že tento zápis se symbolem $\Leftrightarrow$ znamená to, že zároveň platí tyto věty:

a) $|a| = |b| \Rightarrow [(a \mid b)$ a $(b \mid a)]$,

b) $[(a \mid b)$ a $(b \mid a)] \Rightarrow |a| = |b|$.

Proto také důkaz poučky $\mathbf{T}_8$ se skládá ze dvou částí.
a) Předpoklad $|a| = |b|$ znamená buď $a = b$ nebo $a = -b$;

ze vztahu $a = b$ plyne $a = b.1$, čili $b \mid a$, a také $b = a = a.1$, což znamená $a \mid b$.
Vztah $a = -b = b.(-1)$ znamená $b \mid a$, zatímco $b = -a = a.(-1)$ znamená $a \mid b$.
b) Nechť $a \mid b$, $b \mid a$ platí zároveň. Je-li $a = b = 0$, pak platí $a \mid b$ a též $|a| = |b|$. Kdyby jedno z čísel a, b bylo rovné nule a druhé různé od nuly, pak by jeden ze vztahů $a \mid b$, $b \mid a$ neplatil, a neplatilo by též $|a| = |b|$. Zbývá tedy případ $a \neq 0$, $b \neq 0$. Potom $a \mid b$ znamená $b = aq$, zatímco $b \mid a$ znamená $a = bq'$. Odtud snadno plyne $ab = bq'.aq$ a po zkrácení $qq' = 1$. To však znamená buď $q = q' = 1$ čili $a = b$, nebo $q = q' = -1$ čili $a = -b$. Platí-li $a = b$ nebo $a = -b$, znamená to $|a| = |b|$. Zamyslíme-li se nad stavbou věty zapsané v (2,3) užitím symbolu $\Leftrightarrow$, zjistíme, že vztahy uvedené po obou stranách tohoto symbolu buď zároveň platí, nebo zároveň neplatí. V podmínkovém souvětí věty $\mathbf{T}_8$ je to vyjádřeno slovy „když a jen když", která bychom mohli nahradit též slovy „právě když".

$\mathbf{T}_9$ *Jestliže pro celá čísla a_1, a_2, b platí zároveň $b \mid a_1$, $b \mid a_2$, pak platí též $b \mid c_1a_1 + c_2a_2$, ať jsou c_1, c_2 jakákoli celá čísla.*

Předpoklad $b \mid a_1$ znamená $a_1 = bq_1$, předpoklad $b \mid a_2$ znamená $a_2 = bq_2$, kde q_1, q_2 jsou celá čísla. Z platnosti těchto rovností plyne však $c_1a_1 + c_2a_2 = c_1bq_1 + c_2bq_2 = b(c_1q_1 + c_2q_2)$, což však znamená $b \mid c_1a_1 + c_2a_2$. Poučky $\mathbf{T}_9$ užíváme často se speciální volbou $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, nebo $c_1 = 1$, $c_2 = -1$. V tom případě plyne z poučky $\mathbf{T}_9$ tento důsledek:

Je-li číslo b dělitelem celých čísel a_1, a_2, pak je b dělitelem součtu i rozdílu čísel a_1, a_2.

Je snadné dokázat i větu obecnější, než je $\mathbf{T}_9$:

Je-li celé číslo b dělitelem celých čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, *pak je b dělitelem též součtu libovolných násobků čísel a_1, a_2, a_3, . . ., a_n, ať je n jakékoli přirozené číslo.*

Dříve než si na několika příkladech ukážeme užití věty $\mathbf{T}_9$ při řešení některých úloh z teorie dělitelnosti celých čísel, připomeneme ještě, že při zkoumání dělitelnosti součtu daných čísel počet sčítanců zvětšujeme přidáním dvou dalších vhodně volených sčítanců, které jsou navzájem čísly opačnými, a pak teprve sčítance vhodně sdružujeme a částečné součty rozkládáme na součiny. Často se osvědčuje přičtení $+ 1 - 1$, neboť číslo 1 má užitečnou vlastnost, že $1^n = 1$ pro každé celé číslo n.

Příklad 3. Je dáno číslo $a = 99^{61} - 50^{56}$. Dokažte, že $49 \mid a$.

Platí $a = 99^{61} - 50^{56} + 1 - 1 = (99^{61} - 1) -$
$- (50^{56} - 1) = (99 - 1) . (99^{60} + 99^{59} + \ldots + 1) -$
$- (50 - 1) . (50^{55} + 50^{54} + \ldots + 1) =$
$= 2 . 49 (99^{60} + 99^{59} + \ldots + 1) - 49 (50^{55} + 50^{54} +$
$+ \ldots + 1)$. Menšenec i menšitel tohoto rozdílu je dělitelný 49 (podle věty $\mathbf{T}_7$), a proto i jejich rozdíl je dělitelný číslem 49 (podle věty $\mathbf{T}_9$).

Příklad 4. Je dáno přirozené číslo $a = 103^{53} + 53^{103}$. Dokažte, že pro číslo a platí tyto vztahy: a) $3 \mid a$, b) $4 \mid a$, c) $13 \mid a$.

Platí $a = 103^{53} + 53^{103} = (103^{53} + 1) + (53^{103} - 1) =$
$= (103 + 1) (103^{52} - 103^{51} + \ldots - 103 + 1) +$
$+ (53 - 1) (53^{102} + 53^{101} + \ldots + 1) =$
$= 2.4.13. (103^{52} - 103^{51} + \ldots - 103 + 1) +$
$+ 4.13 (53^{102} + 53^{101} + \ldots + 1)$.

Poněvadž každý sčítanec upraveného součtu je dělitelný čísly 4 a 13, je i jejich součet dělitelný čísly 4 i 13.

Dále platí též:

$a = (103^{53} - 1) + (53^{103} + 1) = (103 - 1) . (103^{52} +$

$+ 103^{51} + \ldots + 1) + (53 + 1) . (53^{102} - 53^{101} +$
$+ \ldots - 53 + 1) = 3.34 (103^{52} + 103^{51} + \ldots + 1) +$
$+ 3.18 (53^{102} - 53^{101} + \ldots + 1).$
Poněvadž každý sčítanec tohoto součtu je dělitelný číslem 3, je i jejich součet dělitelný číslem 3. (Důsledky: viz větu T_{32}.)

Příklad 5. Dokažte, že pro každé celé číslo $n \geq 0$ je přirozené číslo $a_n = 5^{2n} + 11.2^{n+1}$ násobkem čísla 23.

Početní výraz pro číslo a_n upravíme takto:

$$a_n = 5^{2n} + 11.2^{n+1} = 5^{2n} + 11.2.2^n = 5^{2n} + 22.2^n$$
$$= 5^{2n} - 2^n + 2^n + 22.2^n = (25^n - 2^n) + 23.2^n.$$

Za předpokladu, že $n > 1$, můžeme užíti vzorce (1,3) pro rozklad $25^n - 2^n = (25 - 2) (25^{n-1} + 25^{n-2}. 2 + + \ldots + 2^{n-1}) = 23q_n$, kde q_n je celé číslo. Platí tedy stále za předpokladu $n > 1$, že $a_n = 23 . q_n + 23 . 2^n = = 23 (q_n + 2^n)$; to však znamená, že $23 \mid a_n$ pro $n > 1$. Dále pro $n = 0$ dostaneme $a_0 = 23$ a pro $n = 1$ dostaneme $a_1 = 69 = 3 . 23$; proto $23 \mid a_0$ i $23 \mid a_1$. Shrnutím všech výsledků úvah dostáváme $23 \mid a_n$ pro každé celé číslo $n \geq 0$.

Příklad 6. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n je $a_n = 5^{2n+1}. 2^{n+2} + 3^{n+2} . 2^{2n+1}$ násobkem čísla 76.

Pro číslo a_n najdeme postupnými úpravami:

$$a_n = 5^{2n+1}. 2^{n+2} + 3^{n+2}. 2^{2n+1} =$$
$$= 2^{n+1} (5^{2n}.5.2+.3^n.3^2.2^n) =$$
$$= 2^{n+1} (10 . 5^{2n} + 9 . 6^n) =$$
$$= 2^{n+1} (10 . 25^n - 10 . 6^n + 10 . 6^n + 9 . 6^n) =$$
$$= 2^{n+1} [10 (25^n - 6^n) + 19 . 6^n].$$

Za předpokladu $n > 1$ můžeme použít vzorce (1,3) pro rozklad. $25^n - 6^n = (25 - 6) (25^{n-1} + 25^{n-2} . 6 + \ldots$

$+ \ldots + 6^{n-1}) = 19\, q_n$, kde q_n je celé číslo. Po dosazení do posledního početního výrazu dostaneme pro $n > 1$: $a_n = 2^{n+1}(19\, q_n + 19 \,.\, 2^n) = 2^{n-1} \,.\, 2^2 \,.\, 19\,(q_n + 2^n) = 76 \,.\, 2^{n-1} \,.\, (q_n + 2^n)$. Za předpokladu $n > 1$ platí tedy $76 \mid a_n$. Pro $n = 1$ dostaneme dosazením do výrazu $a_n = 5^{2n+1} \,.\, 2^{n+2} + 3^{n+2} \,.\, 2^{2n+1}$ výsledek $a_1 = 5^3 \,.\, 2^3 + 3^3 \,.\, 2^3 = 1216 = 76 \,.\, 16$, odkud plyne $76 \mid a_1$. Platí tedy $76 \mid a_n$ pro všechna přirozená čísla $n \geqq 1$.

T$_{10}$ *Nechť a_1, a_2, b jsou celá čísla. Jestliže $b \mid a_1$, pak $b \mid a_1 + a_2$ právě tehdy, když $b \mid a_2$.*

Pro lepší pochopení věty **T$_{10}$** (zahrnující vlastně dvě poučky) i jejího důkazu naznačíme stavbu této věty symbolickým zápisem

$$(b \mid a_1) \Rightarrow [(b \mid a_2) \Leftrightarrow (b \mid a_1 \pm a_2)].$$

Tento výrok však platí právě tehdy, když platí zároveň tvrzení $(b \mid a_1) \Rightarrow [(b \mid a_2) \Rightarrow (b \mid a_1 \pm a_2)]$, $(b \mid a_1) \Rightarrow [(b \mid a_1 \pm a_2) \Rightarrow (b \mid a_2)]$, která snadno dokážeme.

a) Platí-li $b \mid a_1$, pak z platnosti $b \mid a_2$ plyne podle věty **T$_9$** platnost vztahu $b \mid a_1 \pm a_2$.

b) Platí-li $b \mid a_1$, pak z platnosti $b \mid a_1 \pm a_2$ plyne podle věty **T$_9$** platnost vztahu $b \mid (a_1 \pm a_2) - a_1$ čili $b \mid \pm a_2$, tj. zejména $b \mid a_2$.

Příklad 7. Najděte všechna celá čísla x, pro která číslo $y = x^3 + 14$ je dělitelné číslem $x + 2$.

Platí $y = x^3 + 14 = x^3 + 2^3 + 6 =$
$= (x + 2)(x^2 - 2x + 4) + 6.$

Poznámka: Téhož výsledku bychom dosáhli, kdybychom mnohočlen 3. stupně $x^3 + 14$ dělili lineárním mnohočlenem $x + 2$ a přitom stanovili neúplný podíl $x^2 - 2x + 4$

se zbytkem 6. Pak bychom podle známého vztahu mezi dělencem, dělitelem, neúplným podílem a zbytkem mohli napsat

$$y = (x^2 - 2x + 4)(x + 2) + 6.$$

Číslo y je součtem dvou čísel, z nichž první je dělitelné číslem $x + 2$, a proto y bude dělitelné číslem $x + 2$, právě když tímto číslem bude dělitelný druhý sčítanec 6. Číslo 6 má však jen 8 dělitelů $d = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Řešením rovnic $x + 2 = d$ dostaneme prvky množiny všech řešení $x \in \{-8, -5, -4, -3, -1, 0, 1, 4\}$.

Příklad 8. Najděte všechna celá čísla x, pro která celé číslo $y = x^3 + x^2 + 1$ je násobkem celého čísla $x^2 + 2x + 3$.

Provedeme-li dělení $(x^3 + x^2 + x + 1) : (x^2 + 2x + 3)$, najdeme neúplný podíl $x - 1$ a zbytek -4. Proto platí $y = (x^2 + 2x + 3)(x - 1) - 4$. Číslo y je rozdílem dvou čísel, z nichž menšenec je násobkem čísla $x^2 + 2x + 3$. Podle věty $\mathbf{T}_{10}$ bude číslo y násobkem čísla $x^2 + 2x + 3$, právě když také menšenec 4 bude násobkem čísla $x^2 + 2x + 3$. Číslo 4 může však být násobkem jen čísel $d = \pm 1, \pm 2, \pm 4$. Avšak rovnice $x^2 + 2x + 3 = d$ má celočíselný kořen $x = -1 \pm \sqrt{d - 2}$ jen pro $d = 2$. Proto $x = -1$ je jediné číslo celé, které vyhovuje podmínce stanovené úlohou.

Cvičení

2,1. Dokažte platnost těchto vztahů: a) $3 \mid 41^{97} - 26^{79}$; b) $5 \mid 41^{97} - 26^{79}$; c) $30 \mid 61^{29} + 89^{23}$; d) $4 \mid 101^{103} + 103^{101}$; e) $51 \mid 101^{103} + 103^{101}$; f) $19 \mid 56^{41} - 37^{31}$.

2,2. Dokažte, že pro celá čísla $n \geq 0$ platí

a) $17 \mid 5^{2n} + 2^{3n+4}$; b) $23 \mid 3^{3n} - 3 \cdot 2^{2n+3}$.

2,3. Rozložte číslo $2^{42} + 1$ v součin tří přirozených čísel, z nichž každé je větší než 1.

2,4. Pro která celá čísla x je číslo $y = x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x + 21$ násobkem čísla $x^2 + x + 1$?

2,5. Za předpokladu, že a_1, a_2, b_1, b_2 jsou čísla celá, dokažte:

a) $[(b_1 \mid a_1)$ a $(b_2 \mid a_2)] \Rightarrow (b_1 b_2 \mid a_1 a_2)$;

b) $[(b_2 \mid b_1)$ a $(b_1 \mid a_1)] \Rightarrow (b_2 \mid a_1)$;

c) $(b_1 \mid a_1) \Rightarrow b_1 \mid a_1 a_2$.

Symbolicky zapsané věty vyjádřete slovy s použitím termínů vymezených v definici $\mathbf{D}_7$. Na vhodně volených číselných příkladech ukažte, že obrácené věty k výše uvedeným větám neplatí.

2,6. Jsou dána čísla $a = 3^{16} + 3^8 + 1$, $b = 4 \cdot 3^{16} + 1$. Užitím tabulek mocnin 3^n (tab. II.) najděte zápisy čísel a, b v desítkové soustavě a ukažte též, že obě čísla a, b lze rozložit na součin aspoň dvou přirozených čísel větších než 1.