O dělitelnosti čísel celých

1. kapitola. Některé vlastnosti množin čísel celých

In: František Veselý (author): O dělitelnosti čísel celých. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1966. pp. 7–19.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403564

1. kapitola

NĚKTERÉ VLASTNOSTI MNOŽIN CELÝCH ČÍSEL

Při výkladu rozsáhlejší části některého oboru matematiky nebo jiné vědy je často třeba přesně stanovit význam některých odborných názvů (termínů), jichž se při výkladu používá. Věty, jimiž vyjadřujeme úmluvu o tom, jaký význam přisuzujeme určitým odborným názvům, nazývají se definice. I v této knížce se setkáte s některými definicemi, které budou vymezovat matematické pojmy označené určitým odborným názvem. V textu knížky budou vyznačeny písmenem **D** s indexem $i = 1, 2, 3, 4, \ldots$, značícím pořadové číslo definice.

Definice neslouží však jen k tomu, abychom jimi vyjadřovali úmluvu o významu nově zaváděných odborných názvů. Někdy se stává, že máme význam odborného názvu vysvětlit někomu, kdo takový název již zná, ale jeho význam přesně nechápe. V tom případě můžeme nesprávně chápaný pojem označený odborným názvem objasnit vhodně volenou definicí s uvedením charakteristického souhrnu znaků, které má každý předmět tímto názvem označený, a žádný jiný předmět. Nemůžeme zde vykládat, jaké podmínky má splňovat správná definice. Připomeneme však, že v každé definici má být užito jen takových odborných termínů, jejichž význam je již znám tomu, komu je definice určena.

Není možné, abychom zde uváděli definice všech důležitých matematických pojmů, jejichž znalost budete potřebovat ke studiu této knížky. Předpokládáme, že definice některých pojmů znáte z hodin vyučování matematiky a že i bez definic dobře chápete základní matematické pojmy, jako jsou např. počet, číslo apod. S takovými pojmy jste se seznamovali jejich užíváním ve vhodně volených příkladech a takového postupu užijeme nyní i při objasňování matematického pojmu množina.

Význam matematického termínu množina je blízký významu slov souhrn nebo soubor, jejichž význam v obecném jazyce je různě chápán. Jestliže z libovolných, navzájem rozlišitelných předmětů našeho názoru nebo myšlení (tj. z předmětů konkrétních nebo abstraktních) utvoříme soubor myšlený jako celek, pak říkáme, že jsme tím vytvořili množinu; jednotlivé předměty tohoto souboru nazýváme prvky této množiny. K označování množin budeme užívat velkých písmen a k označování prvků množiny malých písmen nebo jiných značek, např. číslic apod. K zápisu vztahů „je prvkem" a „není prvkem" užijeme značek $\in$, $\notin$. Zápis „$x \in M$" znamená „x je prvkem množiny M" a „$y \notin M$" znamená „y není prvkem množiny M". Vztah označený symbolem $\in$ můžeme vyjádřit též slovy „patří do", „náleží do", ale musíme pamatovat na to, že tato rčení znamenají v teorii množin totéž jako „je prvkem".

Každá množina je přesně určena vždy, je-li dán předpis, podle kterého lze aspoň teoreticky rozhodnout, zda libovolný předmět je nebo není prvkem této množiny. Jde-li o množiny s konečným a nepříliš velkým počtem prvků, může být takový předpis dán prostým výčtem všech prvků množiny. V tom případě můžeme zápis takové množiny provést tak, že do složených závorek zapíšeme všechny prvky množiny. Tak např. $M = \{17; 3; 10\}$ znamená, že prvky množiny M jsou tři celá čísla 17, 3, 10 a žádná jiná čísla ani žádné jiné předměty. Můžeme tedy napsat $17 \in M$, $5 \notin M$ atd. Jde-li o množinu s velkým počtem prvků, definujeme ji zpravidla tak, že udáme charakteristický souhrn znaků, který mají všechny prvky definované množiny a žádné jiné předměty. V tomto případě slovní definici množiny, obsahující často matematický vzorec, doplňujeme pro názornost i výčtem některých prvků množiny, což nám o ní poskytne názornější představu.

Odborný název množina nesmí vás svést k tomu, abyste se domnívali, že množina musí obsahovat mnoho prvků. Při definici určité množiny často ani nevíme, jak velký je počet jejích prvků. Tak např. množina všech žáků vaší školy, kteří jsou v tomto okamžiku, kdy čteme tuto definici, přítomni ve vaší tělocvičně, může obsahovat různý počet prvků, ale je přesně určena i v tom případě, že v tomto okamžiku není přítomný v tělocvičně ani jeden žák vaší školy. Pak říkáme, že taková množina je prázdná. Prázdnou množinu označujeme symbolem $\emptyset$, který musíme rozlišovat od symbolu 0, značícího číslo nula. Prvky množiny nemusí být předměty téhož druhu. Tak např. můžeme utvořit množinu, která obsahuje tyto předměty: budovu Národního divadla v Praze, planetu Mars a číslo π. V matematice však nejčastěji uvažujeme o množinách, které obsahují prvky téhož druhu, jako např. čísla, funkce, body, přímky, roviny apod. V tom případě musíme rozlišovat pojem množina celých čísel od pojmu množiny všech celých čísel apod. Je nekonečně mnoho množin celých čísel, ale existuje jen jedna množina všech celých čísel.

Dříve než vysvětlíme některé další základní pojmy teorie množin, uvedeme 10 příkladů číselných množin, jichž použijeme dále v tomto článku.

1) $M_1 = \emptyset$; 2) $M_2 = \{0\}$; 3) $M_3 = \{1, 5, 10\}$; 4) M_4 je množina všech čísel, která jsou koeficienty binomického rozvoje $(a + b)^6$; 5) M_5 je množina všech celých čísel x, pro která platí $-1 < x < +1$; 6) M_6 je množina všech reálných čísel x, pro něž platí $-1 < x < +1$; 7) M_7 je

množina všech celých kladných čísel; 8) M_8 je množina všech celých záporných čísel; 9) M_9 je množina všech celých čísel; 10) M_{10} je množina všech reálných čísel.

D$_1$ *Čísla přirozená nazýváme taková celá čísla, která jsou kladná.*

Význam termínu číslo přirozené je tak chápán snad ve všech českých matematických spisech, ale v cizojazyčné literatuře často zjistíte, že někteří matematikové užívají názvu číslo přirozené pro každé celé nezáporné číslo. Při tomto odlišném stanovisku je číslo 0 číslo přirozené, zatímco pro nás číslo 0 není prvkem množiny všech přirozených čísel. Na tomto jednoduchém příkladu vidíte, že význam určitého odborného názvu může být chápán různě podle toho, jak se o něm dohodneme.

D$_2$ *Jsou-li dvě množiny A, B v takovém vztahu, že každý prvek množiny A je zároveň prvkem množiny B, pak říkáme, že množina A je částí množiny B nebo že množina A je podmnožinou množiny B; takový vztah zapisujeme symbolicky $A \subset B$.*

Platí tedy např. $M_2 \subset M_5$, $M_2 \subset M_6$, $M_2 \subset M_9$, $M_2 \subset$ $\subset M_{10}$, $M_3 \subset M_4$, $M_3 \subset M_7$, $M_3 \subset M_9$, $M_3 \subset M_{10}$ atd. Platí též $\emptyset \subset M$, ať je M jakákoli množina. Je též možné, že pro množiny A, B platí zároveň vztahy $A \subset B$, $B \subset A$, jak se snadno přesvědčíte na těchto příkladech: $M_2 \subset M_5$, $M_5 \subset M_2$ nebo $M_3 \subset M_4$, $M_4 \subset M_3$.

D$_3$ *Skládají-li se množiny A, B z týchž prvků, říkáme, že jsou si rovny, a zapisujeme to $A = B$; neplatí-li vztah $A = B$, pak píšeme $A \neq B$ a říkáme, že množiny A, B si nejsou rovny (jsou různé).*

Platí tedy např. $M_2 = M_5$, $M_3 = M_4$, $M_1 \neq M_2$, $M_5 \neq M_6$ apod. Poznamenáváme ještě, že rovnost množin $A = B$ platí, když platí zároveň vztahy $A \subset B$, $B \subset A$.

D$_4$ *Sjednocení množin A, B nazýváme množinu S, skládající se právě z těch prvků, které patří (buď) do množiny A, nebo do množiny B.* (Obdobně definujeme sjednocení tří a více množin.)

Příklady: Sjednocením množin M_1, M_2 je množina M_2. Sjednocením množin M_2, M_3 je množina $\{0, 1, 5, 10\}$. Sjednocením množin M_5, M_6 je množina M_6. Sjednocením tří množin M_2, M_7, M_8 je zřejmě množina M_9. Sjednocením množiny $A = \{0, 1, 2, 3\}$ a $B = \{2, 3, 4\}$ je množina $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Na tomto posledním jednoduchém příkladě množiny S, která je sjednocením množin A, B, dobře vidíme, že obsahuje: a) všechny prvky množiny A, které nepatří do množiny B, tj. čísla 0, 1, b) všechny prvky množiny B, které nepatří do množiny A, tj. číslo 4, c) všechny prvky, které patří zároveň do množiny A i B, tj. čísla 2, 3.

Definicí sjednocení množin, kterou jsme si osvětlili na jednoduchých příkladech, jsme zároveň naznačili, jaký význam přisuzujeme spojkám nebo a buď — nebo v matematických textech. V obecném jazyce se jimi naznačuje buď rozluka neúplná (alternativa), nebo rozluka úplná (disjunkce). Jejich různý význam bývá zpravidla chápán podle souvislosti s ostatním textem, podle situace, o níž se něco vypovídá apod. V matematice je zvykem chápat jejich význam tak, že tyto spojky vyjadřují neúplnou rozluku, jak jsme to již výše ukázali. Jde-li o to vyjádřit v matematickém textu úplnou rozluku, učiníme to zvláštní doplňující poznámkou. Chceme-li např. definovat množinu R, která má obsahovat jen prvky uvedené pod písmenem a), b) v předcházejícím odstavci a žádné jiné prvky, můžeme to učinit takto: R je množina skládající se ze všech prvků, které patří právě do jedné z množin (buď) A nebo B.

D$_5$ *Průnik množin A, B nazýváme množinu P skládající se ze všech prvků, které patří zároveň do množin A i B.*

Příklady: Průnik množin M_2, M_3 je $\emptyset$. Průnik množin M_3, M_4 je množina $M_3 = M_4$. Průnik množin $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ je množina $P = \{2, 3\}$.

Při studiu teorie množin si musíte již od počátku zvykat na to, abyste vždy dobře rozlišovali pojmy množina a prvek množiny. Je např. možné, že v některé úvaze budete určitou přímku považovat za množinu bodů, zatímco v jiné úvaze budete tutéž přímku považovat za prvek některé množiny přímek. Nemůžeme zde však podrobněji rozbírat důsledky některých omylů, k nimž dochází po nesprávném rozlišování pojmů množina a prvek množiny. Chceme vás však upozornit zvláště na to, že je rozdíl mezi množinou $\{a\}$ a prvkem a, z něhož se tato množina skládá. Tento rozdíl je zřejmý i z toho, že má smysl zápis $a \in \{a\}$, zatímco zápis $\{a\} \in a$ nemá smysl.

Zavedení pojmu prázdná množina do matematických úvah ovlivnilo i vyjadřování matematiků způsobem, na který vás stručně upozorníme. Zamyslete se nejprve nad těmito větami:

1a) Každý český král se dožil 60 let.

2a) Žádný český král se nedožil 60 let.

Jistě si brzy uvědomíte, že není možné, aby obě tyto věty byly zároveň pravdivé. Může být pravdivá nejvýše jedna z nich. Mohou být obě nepravdivé, jestliže se některý český král dožil a některý nedožil 60 let. V klasické logice i v obecném jazyce jsou věty typu 1a, 2a považovány za pravdivé nebo nepravdivé jen za předpokladu, že podmět označuje prvky nějaké neprázdné množiny.

Uvažme nyní tyto dvě věty:

1b) Každý švýcarský král se dožil 60 let.

2b) Žádný švýcarský král se nedožil 60 let.

Poněvadž množina všech švýcarských králů je prázdnou množinou, působí věty 1b, 2b a věty toho typu nezvykle na každého, kdo se nezabývá matematikou. Vývoj matematiky již v minulém století přispěl k tomu, že novodobá logika začala uznávat věty typu 1b, 2b a jim obdobné za pravdivé; ba dokonce v tomto případě, kdy podmět označuje prvky prázdné množiny, pokládáme obě věty 1b i 2b za pravdivé. Této zásady pro posuzování pravdivosti logických výroků jsme již jednou použili, když jsme při výkladu definice $\mathbf{D}_2$ uvedli příklad: $\emptyset \subset M$, ať je M jakákoli množina, neboť podle definice $\mathbf{D}_2$ je každý prvek množiny $\emptyset$ prvkem množiny M.

$\mathbf{D}_6$ *Množina se nazývá konečná, je-li možné udat počet jejích prvků přirozeným číslem nebo číslem* 0; *není-li množina konečná, říkáme, že je nekonečná nebo že má nekonečně mnoho prvků.*

K tomu, abychom dokázali, že nějaká množina M prvků dané vlastnosti je nekonečná, užíváme často nepřímého důkazu. Vyjdeme z předpokladu, že množina M je konečná a že tedy všechny její prvky lze očíslovat přirozenými čísly $1, 2, 3, \ldots, n$. Podaří-li se nám pak dokázat existenci dalšího prvku, který není uveden mezi očíslovanými n prvky, je to ve sporu s předpokladem, že množina M všech prvků dané vlastnosti obsahuje n prvků, kde n je číslo přirozené. Tím je však dokázáno, že množina M není konečná, čili že je nekonečná.

K vyjadřování myšlenek užíváme nejčastěji slov a z nich utvořených vět obecného jazyka mluveného nebo psaného. V odborném jazyce psaném užíváme k zapisování odborných termínů nebo rčení též zvláštních značek (symbolů), které umožňují stručnější a přehlednější zápisy vět. Studiem stavby vět a jejich významu se zabývá logika, která věnuje největší pozornost vypovídacím větám, o nichž má smysl říci, že jsou pravdivé nebo nepravdivé. Takové věty se přesně označují názvem logický výrok; nevznikne-li nebezpečí nedorozumění, užíváme stručnějšího názvu výrok. Logickými výroky nejsou takové věty, jako: Přines mi sklenici vody! Kolik je hodin? apod.

Příklady pravdivých výroků z oboru matematiky jsou tyto věty: 1) $2 + 3 = 5$; 2) $3 < 5$; 3) pro libovolná reálná čísla a, b platí $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$; 4) pro každé reálné číslo x platí: když $x < 0$, pak $x^2 > 0$. Příklady nepravdivých výroků jsou tyto věty: 5) $3 < 3$; 6) $2 + 3 \neq 5$; 7) každý mnohoúhelník rovnostranný je rovnoúhlý; 8) pro každé reálné číslo x platí: když $x^2 > 0$, pak $x < 0$.

V matematice zkoumáme často domněnky, zda nějaký výrok je nebo není pravdivý. Ještě častějším úkolem matematiky je odvozovat pravdivé matematické výroky (věty) podle pravidel logického usuzování. Východiskem logických úvah jsou takové výroky (matematické věty), jejichž pravdivost jsme buď již dokázali, nebo uznali jejich pravdivost bez důkazu. Věty, jejichž pravdivost uznáváme bez důkazu, se nazývají *axiómy*. Pravdivé matematické věty, jichž se často v matematice užívá, se někdy nazývají *poučky* čili *teorémy*. V této knížce je označíme písmenem **T** s indexem, udávajícím jejich pořadové číslo. Termínu matematická věta přisoudíme význam o něco širší než termínu poučka, neboť v některých případech budeme vyšetřovat i nepravdivé věty a říkat např., že obrácená věta neplatí. Uvedeme nyní několik pravdivých matematických vět, na něž se v dalších kapitolách budeme odvolávat.

$\mathbf{T}_1$ *Jsou-li a, b dvě přirozená čísla taková, že $a > b$, pak existuje takové přirozené číslo n, že platí $nb > a$.*

Rčení „existuje přirozené číslo n" znamená totéž jako „existuje alespoň jedno přirozené číslo n". Smysl věty $\mathbf{T}_1$ je hlavně v tom, že se jí uznává existence čísla n s danou vlastností. Je-li $a = 10^7$, $b = 3$, pak požadovanou vlastnost má např. číslo $n = 4.10^6$ nebo některé jiné přirozené číslo, např. 3 333 334.

T$_2$ *V každé neprázdné množině přirozených čísel existuje číslo nejmenší (minimální).*

Množina všech přirozených čísel, pro něž platí $3n > 10^7$, je jistě neprázdná, jak plyne z věty **T$_1$**. V této množině musí podle věty **T$_2$** existovat nejmenší přirozené číslo s požadovanou vlastností, jímž je $n_1 = 3\,333\,334$. V množině všech přirozených čísel je nejmenší číslo 1.

T$_3$ *V každé neprázdné množině takových přirozených čísel x, že pro každé x platí $x \leqq h$, kde $h \geqq 1$ je libovolné reálné číslo, existuje největší číslo.*

Všechna přirozená čísla m, pro něž platí $3m < 10^7$, tvoří neprázdnou množinu, do níž zřejmě patří číslo 1, neboť $3.1 < 10^7$. Každé číslo této množiny $m < \frac{1}{3}.10^7$. Proto v této množině musí existovat největší přirozené číslo, jímž je $m_1 = 3\,333\,333$.

T$_4$ *Součet a součin přirozených čísel jsou vždy čísla přirozená; také každá mocnina, jejíž mocněnec i mocnitel jsou čísla přirozená, je číslo přirozené.*

V množině všech přirozených čísel není odčítání a dělení neomezeně proveditelným početním výkonem. Rozdíl přirozených čísel $a - b$ je číslo přirozené jen tehdy, když $a > b$.

T$_5$ *Součet, součin i rozdíl celých čísel je vždy číslo celé; také každá mocnina, jejíž mocněnec je číslo celé a mocnitel číslo přirozené, je číslo celé.*

Zatímco v množině všech čísel celých je i odčítání proveditelné bez omezení, zůstává dělení celých čísel početním výkonem, který v množině všech čísel celých není vždy proveditelný. Některé důsledky věty $\mathbf{T}_5$ nyní připomeneme.

Pro libovolná reálná čísla a, b platí známé rovnosti

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2), \tag{1,1}$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2), \tag{1,2}$$

které jsou zvláštními případy vzorců

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots\dots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \tag{1,3}$$

který platí pro každé přirozené číslo $n > 1$ a

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}), \tag{1,4}$$

který platí jen pro lichá přirozená čísla $n > 1$.

Jsou-li a, b čísla celá, pak podle věty $\mathbf{T}_5$ jsou celými čísly nejen rozdíl a součet n-tých mocnin čísel a, b na levé straně rovností (1,3), (1,4), ale i činitelé součinů na pravých stranách těchto rovností. Tyto vzorce nám pomohou převádět rozdíly i součty mocnin celých čísel na součiny a tím usnadní řešení mnohých úloh z nauky o dělitelnosti celých čísel, jak to poznáme v následujících kapitolách. Je ovšem třeba pamatovat na to, že rozklad rozdílu nebo součtu mocnin čísel a, b s přirozeným mocnitelem je někdy možno provést užitím vzorců (1,3), (1,4), i když mocniny čísel a, b nemají stejného mocnitele. Tak např.:

$$a^{10} + b^{15} = (a^2)^5 + (b^3)^5 = (a^2 + b^3)(a^8 - a^6 b^3 + a^4 b^6 - a^2 b^9 + b^{12}).$$

Nyní si ještě připomeneme některé základní pojmy z algebry a matematické analýzy, a to zejména z té její části, kterou tvoří teorie reálných funkcí. To, co již z tohoto oboru matematiky znáte, vyslovíme obecnými větami, k nimž připojíme několik poznámek.

Jestliže ke každému prvku x dané množiny M je podle nějakého předpisu přiřazeno právě jedno reálné číslo, pak říkáme, že na množině M je definována reálná funkce proměnné x. Množinu M nazýváme definičním oborem této funkce proměnné x, čísla přiřazená prvkům x nazýváme funkční hodnoty dané funkce. V obecných úvahách označujeme funkční hodnoty symbolickými zápisy $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ apod. nebo $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$ apod. Přitom např. zápis $f(-2) = 5$ znamená, že číslu -2, které je prvkem definičního oboru funkce dané předpisem f, je přirozené číslo 5 jako funkční hodnota.

V této knížce se budeme nejvíce zajímat o funkce, jejichž funkční hodnoty $f(x)$ jsou určeny početním (analytickým) výrazem

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \qquad (1{,}5)$$

kde x je proměnná, n celé nezáporné číslo a $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ libovolná daná reálná čísla, z nichž $a_0 \neq 0$; říkáme, že *polynom* (*mnohočlen*) je stupně n. Jestliže $a_0 = 1$, mluvíme o normovaném polynomu n-tého stupně.

Jistě je vám již známo, že polynom stupně $n = 1$ se nazývá lineární, polynom stupně $n = 2$ kvadratický. Později se setkáte i s názvem polynom kubický pro polynom stupně $n = 3$ a s názvem polynom bikvadratický pro polynom stupně $n = 4$. Polynom stupně 0 je každá konstanta různá od nuly. Číslo 0 nazýváme též často nulový polynom, avšak nepřipisujeme mu žádný stupeň.

Při našich úvahách o dělitelnosti čísel celých budeme se zajímat jen o takové polynomy tvaru (1,5), v nichž koeficienty $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ jsou čísla celá. Pro takové polynomy platí zřejmě jako důsledek věty $\mathbf{T}_5$, že pro každé číslo x z množiny všech celých čísel nabývají celočíselné funkční hodnoty. Jistě též již víte, že součet, rozdíl i součin polynomů s celočíselnými koeficienty je opět polynom s koeficienty z oboru čísel celých.

Pro řešení mnohých matematických úloh je často velmi užitečné rozložit (redukovat) daný polynom na součin dvou nebo více polynomů nižšího stupně, než je stupeň daného polynomu. Nemůžeme se tu zabývat otázkou rozložitelnosti (reducibility) polynomů v různých číselných oborech a připomeneme si tu dvěma příklady rozklad kvadratického polynomu na součin dvou lineárních polynomů, a to metodou převodu polynomu na druhou mocninu lineárního polynomu s doplňkem. Obdobně můžeme pak provádět i rozklad některých polynomů 4. stupně na součin dvou kvadratických polynomů, jak si to rovněž ukážeme na příkladech.

1. $x^2 - 2x - 48 = (x-1)^2 - 1 - 48 =$
$= (x-1)^2 - 7^2 = (x - 1 - 7)(x - 1 + 7) =$
$= (x-8)(x+6).$

2. $x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - (\sqrt{2})^2 =$
$= (x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2}).$

3. $x^4 + 64 = (x^2+8)^2 - 16x^2 = (x^2+8)^2 - (4x)^2 =$
$= (x^2 - 4x + 8)(x^2 + 4x + 8).$

4. $4x^4 + 1 = (2x^2+1)^2 - 4x^2 = (2x^2+1)^2 - (2x)^2 =$
$= (2x^2 - 2x + 1)(2x^2 + 2x + 1).$

5. $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 =$
$= (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$

6. $x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - (x\sqrt{2})^2 =$
$= (x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1).$

Příklady 1, 3, 4, 5 ukazují, že je někdy možný rozklad polynomu s celočíselnými koeficienty na součin dvou polynomů s celočíselnými koeficienty. Také v příkladech 2, 6 jsme dané polynomy s celočíselnými koeficienty rozložili na součiny dvou polynomů, avšak ty nemají již všechny koeficienty z oboru čísel celých; takové rozklady při studiu této knížky potřebovat nebudeme, avšak o jejich užitečnosti se přesvědčíte při dalším studiu jiných oborů matematiky.

Cvičení

1,1. Kolikerým způsobem lze rozložit a) $x^6 - 1$, b) $x^6 + 1$ na součin dvou normovaných mnohočlenů s celými koeficienty?
1,2. Najděte rozklad polynomu a) $x^4 + 4$, b) $81x^4 + 4$ na součin dvou kvadratických trojčlenů s celými koeficienty.
1,3. Najděte podmínku, které musí vyhovovat přirozená čísla a, b, má-li být možný rozklad dvojčlenu $ax^4 + b$ na součin dvou kvadratických trojčlenů s celými koeficienty.
1,4. Užitím vět $\mathbf{T}_4$, $\mathbf{T}_5$ dokažte tyto poučky: a) součet přirozených čísel nerovná se nikdy nule; b) součet celých nezáporných čísel se rovná nule právě tehdy, když každý sčítanec součtu je rovný nule.