3. kapitola

PŘIBLIŽNÉ METODY ŘEŠENÍ ALGEBRAICKÝCH ROVNIC VYŠŠÍHO STUPNĚ

1. Všeobecně o přibližných metodách

V minulých kapitolách jsme probrali metody řešení algebraických rovnic některých speciálních typů (rovnice kvadratické, kubické, binomické, reciproké a rovnice, jež lze na tyto typy převést). V této kapitole si ukážeme metody, které jsou vhodné k výpočtu reálných kořenů libovolné algebraické rovnice s reálnými koeficienty. Jsou to tzv. *přibližné metody* jejich řešení, které sice neudávají pro kořeny žádné algebraické vzorce, avšak umožňují vypočítat reálné kořeny s dostatečnou, předem stanovenou přesností. To není na závadu, neboť není ani většinou nutné znát kořeny přesně. Může se totiž stát, že daná algebraická rovnice popisuje nějakou fyzikální, technickou či jinou úlohu, přičemž její koeficienty jsou čísla získaná měřením, a tedy již předem zatížená jistou chybou. Zcela přesný výpočet kořenů pak pozbývá smyslu.

2. Význam grafu pro řešení algebraické rovnice

Velmi názornou metodou k přibližnému získání reálných kořenů dané algebraické rovnice je užití grafu.

Buď dána algebraická rovnice

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0. \tag{93}$$

Z kapitoly 2 (odstavec 5) víme, že stačí nalézt průsečíky grafu funkce f s osou x. Tyto průsečíky jsou pak reálnými kořeny algebraické rovnice (93) (mnohočlen $f(x)$ v těchto bodech nabývá totiž nulové hodnoty).

Je samozřejmé, že přesnost takto získaných hodnot pro kořeny velmi závisí na přesnosti, se kterou je narýsován graf mnohočlenu $f(x)$. Tato přesnost je tím větší, čím více v uvažovaném intervalu, ve kterém kreslíme graf funkce f, sestrojíme bodů $[x, f(x)]$. Je tedy třeba počítat mnoho hodnot $f(x)$, což je obtížné, počítáme-li tyto hodnoty jen prostým dosazením. Zde nám může velmi pomoci tzv. Hornerovo schéma.

Hornerovo schéma je velmi známou a užívanou metodou výpočtu hodnoty mnohočlenu v daném bodě. Jeho velikou výhodou je, že postup výpočtu je rychlý a přehledný a je výhodný i pro strojový výpočet. Ukažme si jeho princip na mnohočlenu třetího stupně

$$f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3.$$

Zvolme číslo x a počítejme postupně posloupnost těchto čísel:

$$a_0,\ a_0x,\ a_0x + a_1,\ (a_0x + a_1)x,\ (a_0x + a_1)x + a_2,$$
$$[(a_0x + a_1)x + a_2]x,\ [(a_0x + a_1)x + a_2]x + a_3.$$

Je zřejmé, že každé číslo v posloupnosti vznikne z předchozího střídavě jen vynásobením x či přičtením dalšího koeficientu. Snadno se přesvědčíme, že poslední číslo v posloupnosti, které dostaneme po vyčerpání všech koeficientů mnohočlenu, tj. číslo

$$[(a_0x + a_1)x + a_2]x + a_3,$$

je již hodnotou daného kubického mnohočlenu $f(x)$ v bodě x. Je totiž

$$[(a_0x + a_1)x + a_2]x + a_3 = (a_0x + a_1)x^2 + a_2x + a_3 =$$
$$= a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = f(x).$$

Celý výpočet upravujeme do tohoto schématu:

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_0 & c_1 & c_2 & \underline{c_3} \end{array}$$

Při výpočtu postupujeme tak, že do prvního a třetího řádku zapíšeme na příslušná místa koeficienty a_0, a_1, a_2, a_3 daného mnohočlenu. Místa pro b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 ponecháme zatím volná. Tato čísla pak postupně počítáme a zapisujeme do schématu. Nejprve vypočteme číslo $b_1 = a_0x$ a zapíšeme na příslušné místo. Číslo c_1 vznikne pak sečtením nad sebou stojících čísel a_1, b_1. To pak zapíšeme na příslušné místo a násobíme jej číslem x. Vznikne tak číslo b_2. Opět sečteme pod sebou stojící čísla a_2, b_2 a dostaneme číslo c_2. Podobně dostáváme dále $b_3 = c_2x$ a $c_3 = a_3 + b_3$. Vzhledem k tomu, co bylo výše řečeno, je poslední podtržené číslo c_3 hledanou hodnotou $f(x)$, tj. $c_3 = f(x)$. Stejně postupujeme i v případě mnohočlenu libovolně vysokého stupně. Schéma je pak delší.

Příklad 40. Vypočteme hodnotu mnohočlenu

$$f(x) = x^5 + 2x^3 - 3x^2 + x - 3$$

v bodě $x = 2$.

Hornerovo schéma vypadá takto:

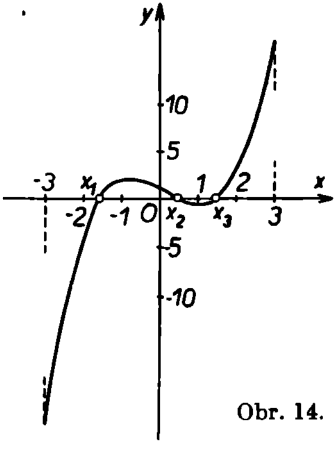
$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 2 & -3 & 1 & -3 \\ & 2 & 4 & 12 & 18 & 38 \\ \hline 1 & 2 & 6 & 9 & 19 & \underline{35} \end{array}$$

Je tedy $f(x) = 35$. Výpočet je zcela mechanický a velice rychlý.

Příklad 41. Zjistěme pomocí grafu přibližné hodnoty reálných kořenů rovnice

$$x^3 - 0{,}5x^2 - 2{,}25x + 1{,}125 = 0$$

např. v intervalu $\langle -3, 3\rangle$.



Obr. 14.

Pomocí Hornerova schématu sestrojíme tabulku

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$-23{,}625$	$-4{,}375$	$1{,}875$	$1{,}125$	$-0{,}625$	$2{,}625$	$16{,}875$

Na obr. 14 vidíme graf funkce $f(x)$ v intervalu $\langle -3, 3\rangle$. Vidíme, že protíná osu x ve třech bodech x_1, x_2, x_3, tj. daná rovnice má v intervalu $\langle -3, 3\rangle$ tři reálné kořeny

x_1, x_2, x_3. Kdybychom sestrojili graf funkce f ve větším intervalu než $\langle -3, 3\rangle$, nedostali bychom již žádné další kořeny, neboť kubická rovnice může mít nejvýše 3 různé kořeny. Odhadem nyní zjistíme, že je $x_1 \doteq -1,6$, $x_2 \doteq$ $\doteq 0,5$, $x_3 \doteq 1,4$. (Přesné hodnoty jsou $x_1 = -1,5$, $x_2 =$ $= 0,5$, $x_3 = 1,5$.)

3. Odhady polohy reálných kořenů na číselné ose

Podívejme se ještě jednou na příklad 41. Zde jsme graf funkce f kreslili v intervalu $\langle -3, 3\rangle$ a dostali jsme náhodou všechny reálné kořeny dané rovnice. Stejně dobře jsme však mohli nakreslit graf mnohočlenu $f(x)$ jen v intervalu $\langle -1, 1\rangle$ či $\langle 0, 2\rangle$. V posledních dvou případech bychom zřejmě nedostali všechny reálné kořeny (v intervalu $\langle -1, 1\rangle$ leží jen kořen x_2 a v intervalu $\langle 0, 2\rangle$ jen kořeny x_2, x_3). Vzniká tedy tato otázka: jak volit interval, aby v něm ležely všechny existující reálné kořeny dané rovnice? Lze dokázat tento odhad:

Věta 10. *Mějme rovnici*

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

s reálnými koeficienty. Potom všechny reálné kořeny této rovnice leží v intervalu $\langle -A - 1, A + 1\rangle$, kde

$$A = \max(|a_1|, \ldots, |a_n|).$$

(A je tedy rovno maximální z absolutních hodnot koeficientů normované rovnice.)

Důkaz této věty provedeme později. Užijme odhad z věty 10 pro rovnici z příkladu 41. Zde je

$$A = \max(|-0,5|, |-2,25|, |1,125|) = 2,25,$$

takže podle našeho odhadu leží všechny reálné kořeny zaručeně v intervalu $\langle -3{,}25,\ 3{,}25\rangle$. Vidíme, že tento odhad není příliš přesný. Kořeny ve skutečnosti leží v menším intervalu $\langle -1{,}5,\ 1{,}5\rangle$. Pro informaci to však často stačí. Je také vidět, že jsou-li koeficienty normované rovnice v absolutní hodnotě malé, lze očekávat, že reálné kořeny se vyskytují jen v blízkém okolí bodu 0.

Ve větě 10 ukázaný odhad není jediným existujícím odhadem. V algebře byla dokázána řada jiných odhadů, které umožňují dospět k přesnějším výsledkům. Z nich uvedeme následující odhad horní hranice reálných kořenů (*horní hranicí* reálných kořenů rozumíme jakékoli číslo, které je větší nebo rovno než všechny reálné kořeny):

Věta 11. *Buď a_k prvý ze záporných koeficientů normované rovnice*

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_kx^{n-k} + \ldots + a_n = 0.$$

Potom jsou všechny reálné kořeny této rovnice menší než číslo $1 + \sqrt[k]{B}$, kde B je největší z absolutních hodnot záporných koeficientů rovnice.

Příklad 42. V rovnici z příkladu 41 je

$$a_1 = -0{,}5,\ a_2 = -2{,}25,\ a_3 = 1{,}125.$$

Je tedy $B = |-2{,}25| = 2{,}25$; prvým záporným koeficientem je dále koeficient a_1, tj. $k = 1$. Náš odhad pak dává pro horní hranici reálných kořenů číslo

$$1 + 2{,}25 = 3{,}25,$$

tedy stejné číslo, jako jsme dostali minulým odhadem. Na tomto příkladě je tedy patrno, že přes větší složitost druhého odhadu nemusíme vždy dostat pro horní hranici reálných kořenů menší číslo.

Cvičení 67. Porovnejte oba výše uvedené odhady pro rovnice

a) $x^4 + 0{,}5x^3 - 2{,}5x + 4 = 0$;
b) $x^5 - 3x^4 - 4x^2 + 8 = 0$.

68. Na rovnici

$$x^5 + 4x^3 + 2x + 5 = 0$$

si uvědomte, že druhý odhad nelze použít, protože rovnice nemá záporné koeficienty. Udejte některou hranici reálných kořenů!

Všimněme si ještě jedné věci. Druhý odhad na rozdíl od odhadu prvého dává jen horní hranici reálných kořenů. To je však spíše výhodou než závadou. Odhadu můžeme stejně tak užít ke stanovení dolní hranice reálných kořenů dané rovnice. Platí totiž toto zřejmé tvrzení:

Věta 12. Je-li x_i kořenem rovnice $f(x) = 0$, pak je číslo $-x_i$ kořenem rovnice $f(-x) = 0$, tj. rovnice, která z původní rovnice $f(x) = 0$ vznikne tím, že napíšeme všude $-x$ místo x.

Tak např. je-li

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 4 = 0,$$

je

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + (-x) + 4 = 0,$$

tj.

$$f(-x) = -x^3 - 3x^2 - x + 4 = 0.$$

Tato rovnice je ekvivalentní s normovanou rovnicí

$$x^3 + 3x^2 + x - 4 = 0.$$

Odtud plyne, že chceme-li nalézt dolní hranici reálných kořenů rovnice $f(x) = 0$, vezmeme místo této rovnice rovnici $f(-x) = 0$ a nalezneme horní hranici jejích reálných kořenů. Tato horní hranice je pak až na znaménko rovna dolní hranici kořenů rovnice původní. Ukažme to opět na příkladě.

Příklad 43. Uvažujme opět rovnici

$$f(x) = x^3 - 0{,}5x^2 - 2{,}25x + 1{,}125 = 0$$

z příkladu 41 a stanovme užitím druhého odhadu a výše uvedené úvahy dolní hranici reálných kořenů této rovnice. Jest

$$f(-x) = (-x)^3 - 0{,}5(-x)^2 - 2{,}25(-x) + 1{,}125 = 0$$

čili

$$f(-x) = -x^3 - 0{,}5x^2 + 2{,}25x + 1{,}125 = 0.$$

Normovaný tvar této rovnice je

$$x^3 + 0{,}5x^2 - 2{,}25x - 1{,}125 = 0.$$

Nalezneme nyní horní hranici reálných kořenů této rovnice podle druhého odhadu. Zde je opět $B = 2{,}25$, neboť v absolutní hodnotě největší záporný koeficient je $a_2 = -2{,}25$. Tento koeficient je zároveň prvým záporným koeficientem, takže $k = 2$. Druhý odhad z věty 11 pak dává číslo

$$1 + \sqrt{2{,}25} = 1 + 1{,}5 = 2{,}5.$$

Reálné kořeny původní rovnice jsou tedy všechny větší než číslo $-2{,}5$. To je již lepší odhad, než jsme dostali pomocí odhadu z věty 10 (tam vyšlo pro dolní hranici reálných kořenů číslo $-3{,}5$).

Výhoda druhého odhadu je obzvláště patrna, jedná-li se např. o rovnici mající pouze např. kladné kořeny. Zde totiž odhad z věty 10 dává interval $\langle -A - 1,$

$A + 1\rangle$, tj. dolní odhad může být v absolutní hodnotě veliké záporné číslo, ačkoliv v tomto případě je dolní hranicí kořenů např. číslo 0. Odhad z věty 11 v tomto případě dává zpravidla příznivější výsledek. Podobně je tomu v případě rovnice s vesměs zápornými kořeny (viz rovnici b) ze cvičení 63).

Důkaz věty 11 je celkem snadný. Stačí totiž dokázat, že pro $x > 1 + \sqrt[k]{B}$ je již $f(x) > 0$ (tj. rovnice nemůže mít žádný kořen větší než číslo $1 + \sqrt[k]{B}$).

V dalších úvahách lze předpokládat, že $x > 1$ (předpokládáme totiž, že je $x > 1 + \sqrt[k]{B} > 1$). Pro $x > 1$ však platí, že

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_kx^{n-k} + \ldots + a_n \geqq x^n + \\ + a_kx^{n-k} + \ldots + a_n,$$

neboť $a_1 \geqq 0, \ldots, a_{k-1} \geqq 0$ a $x > 1$. Protože je podle definice $B = \max |a_i|$, kde a_i probíhá všechny záporné koeficienty v rovnici, je dále

$$x^n + a_kx^{n-k} + \ldots + a_n \geqq x^n - Bx^{n-k} - \ldots - B =$$
$$= x^n - B(x^{n-k} + \ldots + 1) = x^n - B\frac{x^{n-k+1} - 1}{x - 1}$$

(zde jsme užili vzorce pro součet konečné geometrické řady). Poslední výraz lze upravit takto:

$$x^n - B\frac{x^{n-k+1} - 1}{x - 1} = \frac{1}{x - 1}[x^n(x - 1) - B(x^{n-k+1} - 1)] =$$
$$= \frac{1}{x - 1}[x^n(x - 1) - Bx^{n-k+1} + B] =$$
$$= \frac{1}{x - 1}\{x^{n-k+1}[x^{k-1}(x - 1) - B] + B\}.$$

Snadno se můžeme přesvědčit, že pro $x > 1$ platí

$$x^{k-1} \geqq (x-1)^{k-1}.$$

Poslední výraz lze tedy dále odhadnout takto:

$$\frac{1}{x-1}\{x^{n-k+1}[x^{k-1}(x-1)-B]+B\} \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{x-1}\{x^{n-k+1}[(x-1)^{k}-B]+B \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{x-1}\{x^{n-k+1}[(x-1)^{k}-B]\}.$$

Protože je $x > 1 + \sqrt[k]{B}$, je $x - 1 > \sqrt[k]{B}$ čili $(x-1)^k > B$, tj.

$$(x-1)^k - B > 0.$$

Je tedy poslední výraz kladný, neboť číslo v hranaté závorce je kladné a $x > 1$. Hodnotu $f(x)$ jsme pro $x > 1 + \sqrt[k]{B}$ odhadli zdola kladným číslem, takže je $f(x) > 0$, což jsme chtěli dokázat.

Nyní již můžeme konečně dokázat větu 10. Postup je obdobný, jako postup v důkaze věty 11. Předpokládejme, že je $x > A + 1$, kde $A = \max |a_i|$, $i = 1, \ldots, n$ (a_i jsou koeficienty normované rovnice). Pro $x > 1$ však postupně platí

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \geqq x^n - Ax^{n-1} -$$

$$- \ldots - Ax - A = x^n - A(x^{n-1} + \ldots + x + 1) =$$

$$= x^n - A\,\frac{x^n - 1}{x-1} = \frac{1}{x-1}\,[x^n(x-1) - A(x^n - 1)] =$$

$$= \frac{1}{x-1}\,[x^n(x-1) - Ax^n + A] \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{x-1}\,[x^n(x-1) - Ax^n] = \frac{x^n}{x-1}\,(x - 1 - A)$$

(užili jsme vzorce pro součet konečného úseku geometrické posloupnosti a toho, že je $A \geqq 0$). Dospěli jsme tak k odhadu

$$f(x) \geqq \frac{x^n}{x-1}\,(x - 1 - A).$$

Protože je $x > A + 1$, je $x - 1 - A > 0$, a výraz v závorce je kladný. Protože je dále $x > 1$, je celý výraz kladný a tedy $f(x) > 0$. Tím jsme dokázali, že číslo $A + 1$ je horní hranicí reálných kořenů.

Podle věty 12 je dále dolní hranicí reálných kořenů rovnice $f(x) = 0$ horní hranice reálných kořenů rovnice $f(-x) = 0$, tj. rovnice

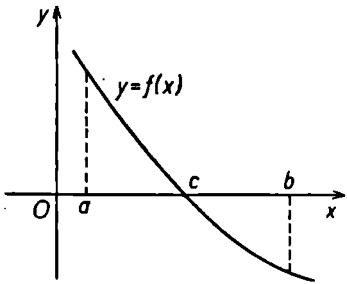
$$x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \ldots + (-1)^n a_n = 0.$$

Tato rovnice má však kořeny se stejnou absolutní hodnotou, jako původní rovnice $f(x) = 0$ (liší se jen znaménky). Je tedy horní hranicí reálných kořenů rovnice $f(-x) = 0$ podle prvé části důkazu věty 10 opět číslo $A + 1$. To však znamená, že číslo $-A - 1$ je hledanou dolní hranicí reálných kořenů původní rovnice $f(x) = 0$. Všechny kořeny rovnice $f(x)$ leží tedy v intervalu $\langle -A - 1, A + 1\rangle$. Tím je věta 10 dokázána.

4. Separace (oddělení) kořenů

Všechny úvahy tohoto odstavce spočívají na velmi názorné a zároveň velmi důležité *větě Bolzano-Weierstrassově.* Pro mnohočleny ji lze vyslovit takto:

Věta 13. *Je-li f libovolný mnohočlen v intervalu $\langle a, b\rangle$ a $f(a)\,f(b) < 0$ (tj. $f(a)$ a $f(b)$ mají opačná znaménka),*



Obr. 15.

existuje uvnitř intervalu $\langle a, b\rangle$ alespoň jeden bod c takový, že $f(c) = 0$.

Větu ovšem dokazovat nebudeme. Názornost věty je však dobře patrna z obr. 15. Představíme-li si graf nějakého mnohočlenu f v intervalu $\langle a, b\rangle$, pak se v případě, že $f(a)\,f(b) < 0$ dostane graf z bodu $[a, f(a)]$ do bodu $[b, f(b)]$ jen tak, že protne osu x.

Z výše uvedené věty je však zřejmé, že k nalezení intervalu obsahujícího reálný kořen není třeba sestrojovat pracně celý graf mnohočlenu na levé straně dané rovnice $f(x) = 0$, nýbrž lze pohledem na tabulku funkčních hodnot přímo vybrat ty sousední hodnoty x, pro které má funkce opačné znaménko*). Tak dostáváme již užší intervaly pro kořeny. Tyto intervaly jsou tím užší, čím „hustší“ tabulku funkčních hodnot vypočteme. Výhodněji můžeme postupovat tímto způsobem (postupným dělením intervalu obsahujícího kořen): Mějme rovnici

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$$

a vypočtěme tabulku funkčních hodnot pro hodnoty 0, 1, 2, 3. Dostaneme tabulku

x	0	1	2	3
$f(x)$	-2	-2	6	28

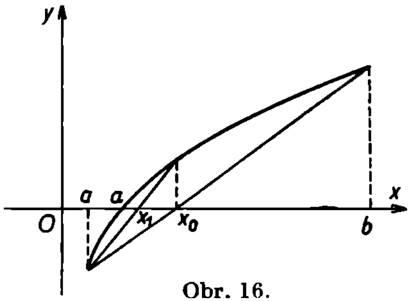
Protože $f(1)$ a $f(2)$ mají opačná znaménka, musí v intervalu $\langle 1, 2\rangle$ ležet reálný kořen. Interval $\langle 1, 2\rangle$ rozdělíme na dva intervaly $\langle 1, 1{,}5\rangle$ a $\langle 1{,}5, 2\rangle$ a vypočteme funkční hodnotu v dělícím bodu 1,5. Je $f(1{,}5) = 0{,}625$. Protože je $f(1) = -2$ a $f(1{,}5) = 0{,}625$, musí kořen ležet v užším intervalu $\langle 1, 1{,}5\rangle$. Interval $\langle 1, 1{,}5\rangle$ opět rozdělíme na dva intervaly $\langle 1, 1{,}25\rangle$, $\langle 1{,}25, 1{,}5\rangle$. Protože je $f(1{,}25) < < 0$ a $f(1{,}5) > 0$, leží kořen v ještě užším intervalu $\langle 1{,}25, 1{,}5\rangle$. Tento interval opět rozdělíme na dva intervaly $\langle 1{,}25, 1{,}4\rangle$, $\langle 1{,}4, 1{,}5\rangle$. Protože je $f(1{,}4) < 0$ a $f(1{,}5) > 0$, leží kořen v intervalu $\langle 1{,}4, 1{,}5\rangle$. Dalším dělením tohoto intervalu bychom našli, že kořen leží postupně v intervalech $\langle 1{,}4, 1{,}45\rangle$, $\langle 1{,}4, 1{,}42\rangle$ atd. To

*) Je však třeba poznamenat, že by byl omyl se naopak domnívat, že mají-li hodnoty $f(a)$, $f(b)$ stejné znaménko, nemá mnohočlen f v intervalu $\langle a, b\rangle$ žádný reálný kořen. Tak např. je-li $f(x) = x^2 - 1$, je $f(-2) = 3$ i $f(2) = 3$, tj. $f(a)$ $f(b) > 0$ a funkce f má v intervalu $\langle -2, 2\rangle$ dokonce dva kořeny 1 a -1. To však znamená, že při postupu, který uvádíme, nemusíme dostat v každém případě všechny reálné kořeny.

jsou již dosti úzké hranice pro hledaný kořen (přesná hodnota kořenu je $\sqrt{2} \doteq 1{,}414$). Poznamenejme, že interval lze dělit např. půlením, avšak je výhodné volit dělící bod přibližně uprostřed intervalu tak, abychom nemuseli počítat se zbytečně mnoha desetinnými místy.

5. Metoda regula falsi

V předchozím článku jsme uvedli postup, jak je možno získat s dostatečnou přesností kořen rovnice $f(x) = 0$, známe-li dva body a, b takové, že funkční hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ mají opačná znaménka.



Obr. 16.

Metoda spočívající na postupném dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ je příliš mechanická, neboť dělící bod volíme celkem mechanicky bez ohledu na průběh funkce v děleném intervalu. Tento nedostatek odstraňuje tzv. metoda *regula falsi* (někdy ji též nazýváme *metodou tětiv*). Ukažme si nejprve její princip na obrázku.

Na obr. 16 je nakreslen průběh grafu funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$, přičemž hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ mají opačná znaménka. Oblouk grafu funkce f mezi body a a b nahradíme nyní tětivou. Tato tětiva protne osu x v bodě x_0. Nyní mohou nastat tyto možnosti: buď $f(x_0) = 0$, čímž jsme hotovi, nebo $f(x_0) < 0$ či $f(x_0) > 0$. V našem případě je $f(x_0) > 0$. Vezměme nyní bod x_0 a ten z bodů a, b, ve kterém má funkce f opačné znaménko než hodnota $f(x_0)$. V našem případě je to bod a (je $f(a)\, f(x_0) < 0$). V intervalu $\langle a, x_0\rangle$ nyní graf funkce f nahradíme opět tětivou. Ta protne osu x v bodě x_1. Protože je v našem případě $f(x_1)\, f(a) < 0$, nahradíme graf funkce f v intervalu $\langle a, x_1\rangle$ tětivou a jejím průsečíkem s osou x je pak bod x_2. Stejným způsobem dostáváme další body x_3, x_4, x_5, ..., které se pak stále více blíží hledanému kořenu. Body x_0, x_1, x_2, x_3 ... nazýváme *postupnými aproximacemi* hledaného kořenu.

Nyní odvodíme vzorec pro výpočet průsečíku tětivy spojující body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$ s osou x. Rovnice přímky určená body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$ jak víme z analytické geometrie v rovině je tato:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\,.$$

Průsečík x_0 této přímky s osou x je bod na této přímce, jehož druhá souřadnice y je rovna nule. Musí tedy být

$$0 - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_0 - a)\,.$$

Z této rovnice plyne ihned pro x_0 vzorec

$$x_0 = \frac{a\, f(b) - b\, f(a)}{f(a) - f(b)}\,. \tag{94}$$

Praktický postup pro výpočet postupných aproximací je tento: Je-li $f(a)\, f(b) < 0$, vypočteme ze vzorce

(94) číslo x_0 (v tom případě však dosadíme místo hodnot a, b hodnoty a, x_0). Je-li $f(b)\,f(x_0) < 0$, dosadíme do vzorce (94) za a, b hodnoty b, x_0. Jakmile vypočteme x_1, zjistíme znaménko $f(x_1)$ a za a, b položíme ve vzorci (94) buď a, x_1 či b, x_1, podle toho, zda je $f(x_1)\,f(a) < 0$ či $f(x_1)\,f(b) < 0$. Tak vypočteme x_2 a stejně počítáme i další postupné aproximace $x_3, x_4, x_5, \ldots$, až dospějeme k aproximaci, která se liší od hledaného kořenu dostatečně málo.

Příklad 44. Vypočtěme metodou regula falsi kořen rovnice

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 2 = 0,$$

ležící v intervalu $\langle 1, 2\rangle$.
Protože je $f(1)\,f(2) < 0$, lze užít vzorce (94). Dostaneme

$$x_0 = \frac{1\,.\,f(2) - 2\,.\,f(1)}{f(2) - f(1)} = \frac{1\,.\,6 - 2\,.\,(-2)}{6 - (-2)} = 1{,}25\,.$$

Protože je $f(1{,}25) = -0{,}984 < 0$ a $f(2) = 6 > 0$, můžeme položit ve vzorci (94) $a = 1{,}25$, $b = 2$. Potom je

$$x_1 = \frac{1{,}25\,.\,f(2) - 2\,.\,f(1{,}25)}{f(2) - f(1{,}25)} =$$

$$= \frac{1{,}25\,.\,6 - 2\,.\,(-0{,}984)}{6 - (-0{,}984)} = 1{,}355\,.$$

Protože je $f(1{,}355) = -0{,}386 < 0$ a $f(2) = 6 > 0$, vypočteme x_2 ze vzorce (94), kde klademe $a = 1{,}355$, $b = 2$.

$$x_2 = \frac{1{,}355\,.\,f(2) - 2\,.\,f(1{,}355)}{f(2) - f(1{,}355)} =$$

$$= \frac{1{,}355\,.\,6 - 2\,.\,(-0{,}386)}{6 - (-0{,}386)} = 1{,}394\,.$$

Další výpočet již zapíšeme jen stručně:

$$f(1{,}394) = -0{,}136 < 0,\ f(2) = 6 > 0,$$

$$x_3 = \frac{1{,}394 \,.\, f(2) - 2 \,.\, f(1{,}394)}{f(2) - f(1{,}394)} =$$

$$= \frac{1{,}394 \,.\, 6 - 2 \,.\, (-0{,}136)}{6 - (-0{,}136)} = 1{,}407\,,$$

$$f(1{,}407) = -0{,}049 < 0,\quad f(2) = 6 > 0,$$

$$x_4 = \frac{1{,}407 \,.\, f(2) - 2 \,.\, f(1{,}407)}{f(2) - f(1{,}407)} =$$

$$= \frac{1{,}407 \,.\, 6 - 2 \,.\, (-0{,}049)}{6 - (-0{,}049)} = 1{,}412\,,$$

$$f(1{,}412) = -0{,}015 < 0,\quad f(2) = 6 > 0,$$

$$x_5 = \frac{1{,}412 \,.\, f(2) - 2 \,.\, f(1{,}412)}{f(2) - f(1{,}412)} =$$

$$= \frac{1{,}412 \,.\, 6 - 2 \,.\, (-0{,}015)}{6 - (-0{,}015)} = 1{,}413\,.$$

Vidíme, že prvá dvě desetinná místa se již při dalším výpočtu nemění. Dostáváme tak aproximaci hledaného kořene $\alpha \doteq 1{,}41$ s přesností na dvě desetinná místa (skutečná hodnota je $\alpha = \sqrt{2} \doteq 1{,}414$).

Cvičení 69. Vypočtěte kořen rovnice

$$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 11x - 12 = 0$$

ležící v intervalu $\langle 3,\ 4{,}5 \rangle$ s přesností na dvě desetinná místa.

6. Tečna ke grafu mnohočlenu. Pojem derivace

Tento odstavec a následující odstavec 7 jsou určeny pro vyspělejší čtenáře, kteří se již někdy setkali s pojmem limity a derivace. Je však třeba probrat některé základní poznatky z diferenciálního počtu, abychom mohli vyložit tzv. Newtonovu metodu, která je proti právě vyložené metodě regula falsi podstatně rychlejší a účinnější. Méně vyspělý čtenář může tento odstavec vynechat a číst až odstavec 7. Musí se spokojit s tím, když řekneme, že výraz $f'(x)$ vyskytující se ve vzorci (100) označuje opět jakýsi mnohočlen, který se nazývá *derivací mnohočlenu* $f(x)$ a který se vypočte takto: *je-li*

$$(95)\quad f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

daný mnohočlen n-tého stupně, pak je

$$(96)\quad f'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \ldots + 2a_{n-2}x + a_{n-1}.$$

Derivací mnohočlenu f v bodě x_0 pak nazýváme hodnotu $f'(x_0)$, tj. hodnotu mnohočlenu f' v bodě x_0.

Vzorec (96) je sice zcela jasný, avšak vypočtěme pro jistotu tento příklad:

Příklad 45. Vypočtěme derivaci mnohočlenu

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 5x - 6$$

v bodě $x_0 = 2$.

Ze vzorce (96) dostáváme pro mnohočlen f tuto derivaci:

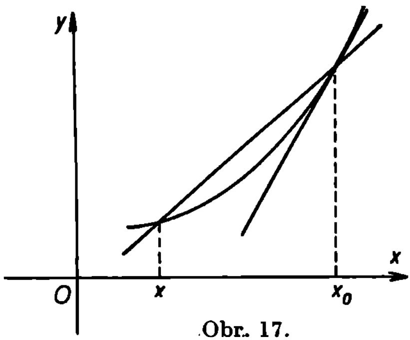
$$f'(x) = 3.4x^2 - 2.6x + 5,$$

tj. $$f'(x) = 12x^2 - 12x + 5.$$

Derivace v bodě $x_0 = 2$ je tedy rovna číslu

$$f'(2) = 12.4 - 12.2 + 5 = 29.$$

Nyní přistupme k odvození směrnice tečny grafu mnohočlenu $f(x)$. Poznamenejme, že grafy mnohočlenů



Obr. 17.

patří ke křivkám, jejichž průběh je velmi „hladký", tj. které mají v každém bodě tečnu. Na obr. 17 je graf mnohočlenu $y = f(x)$. Ptáme se, jaká je směrnice grafu v bodě x_0. Zvolme nějaký bod $x \neq x_0$. Směrnice sečny grafu procházející body $[x, f(x)]$ a $[x_0, f(x_0)]$ je rovna číslu

(97) $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Jestliže se nyní bod x pohybuje směrem k bodu x_0, blíží se sečna stále více tečně v bodě x_0, až v limitním případě, kdy $x = x_0$, obě přímky splynou. Limitní hodnota výrazu (97) pro směrnici sečny je pak směrnicí tečny grafu funkce f v bodě x_0. Směrnice tečny v bodě x_0 je tedy rovna číslu

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

což je právě podle definice derivace hodnota derivace funkce f v bodě x_0 (značíme ji obvykle $f(x_0)$).

Lze tedy vyslovit toto tvrzení: *Směrnice tečny grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$ je rovna derivaci funkce f v bodě x_0, tj. číslu $f'(x_0)$.*

Rovnice tečny grafu mnohočlenu v bodě $[x_0, f(x_0)]$ je tedy tato:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0) \tag{98}$$

(jedná se o rovnici přímky dané bodem $[x_0, f(x_0)]$ a směrnicí $f'(x_0)$).

Závěrem naznačíme odvození již uvedeného vzorce (96) pro derivaci mnohočlenu (95). Vzorec 95 lze snadno odvodit z definice derivace. Pro jednoduchost se omezíme jen na speciální případ mnohočlenu třetího stupně

$$f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3.$$

Buď x libovolný bod. Pro $z \neq x$ platí

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} =$$

$$= \frac{a_0z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3 - a_0x^3 - a_1x^2 - a_2x - a_3}{z - x} =$$

$$= \frac{a_0(z^3 - x^3) + a_1(z^2 - x^2) + a_2(z - x)}{z - x} =$$

$$= \frac{a_0(z - x)(z^2 + xz + x^2) + a_1(z - x)(z + x) + a_2(z - x)}{z - x} =$$

$$= a_0(z^2 + xz + x^2) + a_1(z + x) + a_2.$$

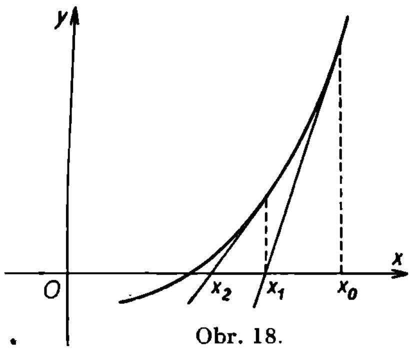
Podle definice derivace funkce f v bodě x a podle předchozího výpočtu je

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z \to x} [a_0(z^2 + xz + x^2) + $$
$$+ a_1(z + x) + a_2] = a_0(x^2 + x^2 + x^2) + a_1(x + $$
$$+ x) + a_2 = 3a_0x^2 + 2a_1x + a_2,$$

což je speciální případ vzorce (96).

7. Newtonova metoda

Jak již bylo řečeno, je *Newtonova metoda* ve srovnání s metodou regula falsi podstatně rychlejší a dává zpravidla po několika málo krocích hledaný kořen s velkou



Obr. 18.

přesností. Princip této metody je nejlépe patrný z obrázku 18. Obrázek nám i umožní pochopit, proč se Newtonově metodě někdy říká *metoda tečen.*

Na obr. 18 je nakreslen graf jistého mnohočlenu f. Hledáme na ose x bod α takový, pro který je $f(\alpha) = 0$. Zvolme proto nějaký bod x_0 v blízkosti kořenu α a veďme bodem $[x_0, f(x_0)]$ tečnu ke grafu funkce f. Tato tečna protne osu x v bodě x_1. V bodě $[x_1, f(x_1)]$ vedeme opět tečnu ke grafu funkce f; ta protne osu x v bodě x_2. Dostáváme tak postupně body $x_3, x_4, x_5, \ldots$, které se velmi rychle blíží k hledanému kořenu α rovnice $f(x) = 0$, jak je patrno z obr. 18.

Pokusme se napsat vzorec pro výpočet hodnoty x_1 z hodnoty x_0. Rovnice tečny v bodě x_0 ke grafu funkce f je podle vzorce (98)

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0). \tag{99}$$

Je-li x_1 průsečík tečny s osou x, je $y = 0$ a z (99) dostáváme rovnost

$$-f(x_0) = f'(x_0)\,(x_1 - x_0).$$

Odtud plyne vzorec

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\,.$$

Je patrno, že další aproximaci x_1 lze z tohoto vzorce vypočíst jen v případě, že $f'(x_0) \neq 0$ (tj. tečna v bodě x_0 není rovnoběžná s osou x). Analogicky počítáme i další aproximace $x_2, x_3, x_4, \ldots$. Platí obecně tento vzorec:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{100}$$

Příklad 46. Počítejme opět kořen rovnice z příkladu 43 ležící v intervalu $\langle 1, 2\rangle$. Jako počáteční aproximaci x_0 vezměme krajní bod tohoto intervalu $x_0 = 2$.

Ve vzorci (100) je

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2, \quad f'(x) = 3x^2 + 2x - 2.$$

Počítejme nyní postupné aproximace $x_1, x_2, x_3, \ldots$ pomocí vzorce (100).

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{6}{14} = 1{,}571,$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}571 - \frac{f(1{,}571)}{f'(1{,}571)} =$$

$$= 1{,}571 - \frac{1{,}203}{8{,}546} = 1{,}430,$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1{,}430 - \frac{f(1{,}430)}{f'(1{,}430)} =$$

$$= 1{,}430 - \frac{0{,}109}{6{,}995} = 1{,}414.$$

To je již při třetím kroku velmi dobrý výsledek, neboť kořenem je číslo $\alpha = \sqrt{2} \doteq 1{,}414$.

Cvičení 70. Řešte rovnici ze cvičení 64 Newtonovou metodou.

71. Vypočtěte Newtonovou metodou číslo $\sqrt[5]{22, 24}$.

(Návod: Řešte rovnici $x^5 - 22{,}84 = 0$ Newtonovou metodou. Jako počáteční aproximaci vezměte např. číslo $x_0 = 2$.)