O řešení algebraických rovnic

I. Základní vlastnosti algebraických rovnic

In: Miroslav Šisler (author): O řešení algebraických rovnic. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1966. pp. 5–20.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403555

1. kapitola

ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

1. Pojem algebraické rovnice n-tého stupně

Ve škole jste se jistě setkali s takovouto úlohou: najděte všechna reálná či komplexní čísla x taková, aby platila například rovnost

$$x^2 + x - 2 = 0. \tag{1}$$

Zápis (1) pak nazýváme rovnicí a chápeme ho jako výše zmíněnou úlohu.

Obecně lze pojem rovnice definovat takto: Je-li dána nějaká funkce $f(x)$, pak *rovnicí*

$$f(x) = 0 \tag{2}$$

rozumíme úlohu nalézt všechna čísla z definičního oboru funkce f, pro která platí rovnost (2) a nazýváme je *kořeny* rovnice (2). Snadno se přesvědčíme, že kořenů může mít daná rovnice několik. Tak např. rovnice (1) má kořeny 1 a -2, jak se lze dosazením snadno přesvědčit.

V naší knížce se budeme zabývat jen rovnicemi speciálního typu. Budou to takové rovnice (2), kde za funkci f bereme mnohočlen n-tého stupně, tj.

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

kde $a_0 \neq 0$ a $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou konstanty.

Jsou-li čísla a_i komplexní, nazýváme rovnici

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \tag{3}$$

kde $a_0 \neq 0$ *algebraickou rovnicí n-tého stupně* s komplexními koeficienty; v případě, že a_i jsou čísla reálná, mluvíme o algebraické rovnici n-tého stupně s reálnými koeficienty. Definičním oborem mnohočlenu je, jak víme, obor všech komplexních čísel (pro každé komplexní číslo nabývá daný mnohočlen s reálnými či komplexními koeficienty právě jediné, obecně komplexní hodnoty). Zápis (3) tedy značí podle naší obecné definice rovnice úlohu nalézt všechna komplexní čísla x, pro něž platí rovnost (3).

Rovnice (1) byla příkladem rovnice druhého stupně s reálnými koeficienty. Viděli jsme, že měla dva reálné kořeny 1 a —2. To nás nesmí svádět k domněnce, že algebraická rovnice s reálnými koeficienty má jen reálné kořeny. Na nejjednodušší rovnici druhého stupně s reálnými koeficienty $x^2 + 1 = 0$ se můžeme přesvědčit, že má dva imaginární kořeny i, —i. Reálný kořen mít nemůže, neboť neexistuje reálné číslo x takové, že $x^2 = -1$. Můžeme tedy říci, že rovnice s reálnými koeficienty mohou mít reálné i imaginární kořeny. Podobná situace nastává i u algebraických rovnic s komplexními koeficienty. Tak například algebraická rovnice s komplexními koeficienty

$$x^3 - \mathrm{i}x + (\mathrm{i} - 1) = 0$$

má jak dva imaginární kořeny i a $-1 - \mathrm{i}$, tak i reálný kořen 1 (přesvědčte se sami dosazením!).

Důležitým pojmem je tzv. *normovaná algebraická rovnice*. To je taková rovnice tvaru (3), kde $a_0 = 1$, tj. ve které je koeficient u nejvyšší mocniny neznámé x roven jedné. Je-li dána rovnice (3), kde $a_0 \neq 0$ a $a_0 \neq 1$, lze ji normovat tak, že všechny koeficienty dělíme číslem a_0. Je samozřejmé, že tímto způsobem dostáváme ekvivalentní algebraickou rovnici, tj. rovnici, která má tytéž kořeny jako rovnice původní.

O řešení algebraických rovnic nejnižších stupňů víte již něco ze školy. Máme na mysli tzv. lineární a kvadratické rovnice.

Lineární rovnicí rozumíme algebraickou rovnici prvého stupně, tj. rovnici tvaru

$$a_0 x + a_1 = 0, \tag{4}$$

kde $a_0 \neq 0$. Její kořen x_1 se vypočte ze vzorce

$$x_1 = -\frac{a_1}{a_0},$$

ať už jsou její koeficienty reálné, či komplexní.

Příklad 1. Řešme lineární rovnici

$$(2 + 3\mathrm{i})\, x + \mathrm{i} = 0.$$

Jest

$$x_1 = \frac{-\mathrm{i}}{2 + 3\mathrm{i}} = \frac{-\mathrm{i}(2 - 3\mathrm{i})}{(2 + 3\mathrm{i})(2 - 3\mathrm{i})} = \frac{-3 - 2\mathrm{i}}{4 + 9} = -\frac{3}{13} - \frac{2}{13}\,\mathrm{i}.$$

Kvadratickou rovnicí rozumíme algebraickou rovnici druhého stupně, která má obecně tvar

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0,$$

kde $a_0 \neq 0$.

Ve škole se probírá jen řešení kvadratických rovnic s reálnými koeficienty. Kvadratickými rovnicemi s komplexními koeficienty se budeme zabývat v kapitole 2.

Kubickou rovnicí konečně rozumíme algebraickou rovnici tvaru

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,$$

kde $a_0 \neq 0$.

2. Otázky existence a počtu kořenů algebraické rovnice

V odstavci 1 jsme viděli, že všechny uvedené rovnice, ať už měly reálné či komplexní koeficienty, měly za kořeny obecně komplexní čísla. To nás vede k otázce, zda každá algebraická rovnice s komplexními koeficienty má v oboru komplexních čísel nějaký kořen a kolik takových kořenů může mít algebraická rovnice n-tého stupně. Částečná odpověď na tuto otázku je přímo tvrzením jedné velmi důležité věty, kterou nazýváme obyčejně základní větou algebry. Věta zní takto:

Věta 1 *(základní věta algebry). Každá algebraická rovnice s komplexními koeficienty stupně většího než* 1 *má v oboru komplexních čísel alespoň jeden kořen.*

Řečeno jinými slovy: Je-li dána nějaká algebraická rovnice (je lhostejné, zda má reálné či komplexní koeficienty), pak vždy existuje alespoň jedno komplexní číslo, jež je kořenem této rovnice. Může se tedy docela dobře stát, že rovnice s reálnými koeficienty nemá žádný reálný kořen, ale podle základní věty algebry musí mít aspoň jeden kořen komplexní.

Existuje řada důkazů základní věty algebry. Všechny však přesahují svou obtížností rámec této knížky a nebudeme je proto uvádět. Věta má však v teorii algebraických rovnic mnohé významné důsledky, jak ihned uvidíme. Byla poprvé dokázána geniálním německým matematikem Karl Friedrichem Gaussem v r. 1799.

Základní věta algebry nám však vůbec neříká, kolik kořenů má algebraická rovnice n-tého stupně. Tak např. kvadratické rovnici $x^2 - 2x + 1 = 0$ vyhovuje jediné číslo $x_1 = 1$, kdežto kvadratické rovnici $x^2 - 1 = 0$ vyhovují dvě různá čísla $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Na druhé straně víme, že lineární rovnice má vždy jen jeden kořen, kdežto kvadratická rovnice může mít dva různé kořeny. Zdá se tedy, že bychom mohli očekávat správnost tohoto tvrzení: Algebraická rovnice n-tého stupně má nejvýše n od sebe různých kořenů. Toto tvrzení je skutečně správné. Jeho důkazem se budeme zabývat v příští kapitole.

3. Rozklad mnohočlenu na součin kořenových činitelů

V celém tomto odstavci se budeme kvůli snadnějšímu vyjadřování zabývat pouze normovanými algebraickými rovnicemi

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Dokážeme nejprve dvě důležité věty.

Věta 2. *Má-li algebraická rovnice n-tého stupně za kořen číslo α, pak je mnohočlen $f(x)$ dělitelný lineárním dvojčlenem $x - \alpha$ a platí rovnost*

$$f(x) = (x - \alpha)\, g(x), \tag{5}$$

kde $g(x)$ je mnohočlen stupně $n - 1$.

Důkaz. Pokusme se rozložit mnohočlen $f(x)$ na levé straně rovnice na tvar

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = (x - \alpha)(x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}) + c, \tag{6}$$

kde $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, c$ jsou jisté konstanty. Rovnost (6) upravíme takto:

$$(7)\quad x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n =$$
$$= x^n + (b_1 - \alpha)\, x^{n-1} + (b_2 - \alpha b_1)\, x^{n-2} +$$
$$+ \ldots + (b_{n-1} - \alpha b_{n-2})\, x + (c - \alpha b_{n-1}).$$

Jak víme, jsou si dva mnohočleny rovny, jestliže jejich koeficienty u týchž mocnin x jsou si rovny. Porovnáním koeficientů u stejných mocnin na obou stranách rovnosti (7) dostáváme tyto rovnice pro hledané konstanty $b_1, \ldots, b_{n-1}, c$:

$$b_1 - \alpha = a_1,$$
$$b_2 - \alpha b_1 = a_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$b_{n-1} - \alpha b_{n-2} = a_{n-1},$$
$$c - \alpha b_{n-1} = a_n.$$

Z těchto rovnic lze jednoznačně vypočítat čísla $b_1, \ldots, b_{n-1}, c$, takže mnohočlen $f(x)$ lze skutečně rozložit na tvar (6).

Dosaďme nyní do vztahu (4) za x číslo α. Dostaneme tak vztah

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n =$$
$$= (\alpha - \alpha)\,(\alpha^{n-1} + b_1\alpha^{n-2} + \ldots + b_{n-1}) + c,$$

tj. vztah

$$(8)\qquad \alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n = c.$$

Protože však je α kořenem rovnice (4), je levá strana vztahu (8) rovna nule, takže $c = 0$. Je tedy možno daný mnohočlen $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ rozložit na tvar

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n =$$
$$= (x - \alpha)(x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}),$$

tj. na tvar

$$f(x) = (x - \alpha)\, g(x), \tag{5}$$

kde α je kořenem rovnice $f(x) = 0$ a $g(x) = x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$ je mnohočlen stupně $n - 1$.

Věta 2 má i velký praktický význam. Usnadňuje totiž výpočet ostatních kořenů, je-li jeden kořen α znám. V tom případě dělíme mnohočlen na levé straně rovnice dvojčlenem $x - \alpha$, čímž dostaneme podíl $g(x)$. Mnohočlen $g(x)$ má stupeň o jedničku menší a ostatní kořeny rovnice pak jsou kořeny algebraické rovnice $g(x) = 0$, jež je o jedničku nižšího stupně.

Cvičení 1. Vypočtěte ostatní kořeny kubické rovnice

$$x^3 + x^2 - 37x + 35 = 0,$$

je-li znám jeden kořen $x_1 = 5$. Totéž pro rovnici

$$x^3 - 9x^2 - 31x + 147 = 0$$

a kořen $x_1 = 3$. Návod: Dělte příslušný kubický mnohočlen odpovídajícím dvojčlenem $x - x_1$ a řešte kvadratickou rovnici.

Cvičení 2. Rovnice

$$x^3 - ax^2 - a^2x + a^3 = 0$$

má dva stejné kořeny rovné číslu a. Nalezněte třetí kořen. Návod: Opakujte dvakrát postup jako ve cvičení 1. Rozmyslete si skutečnost, že lze také daný kubický mnohočlen dělit přímo mnohočlenem $(x - a)(x - a) = x^2 - 2ax + a^2$!

Další důležitou větou, kterou vyslovíme prozatím bez důkazu, je věta 3.

Věta 3. *Každý mnohočlen n-tého stupně* $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ *lze, až na pořadí činitelů, jednoznačně napsat ve tvaru*

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n), \tag{9}$$

tj. jako součin lineárních dvojčlenů, kde komplexní čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *jsou kořeny algebraické rovnice* $f(x) = 0$.

Věta 3 nám tedy říká, že danou algebraickou rovnici stupně n $f(x) = 0$ lze psát ve tvaru

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n) = 0, \tag{10}$$

kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jsou kořeny rovnice $f(x) = 0$. Odtud plyne ihned toto důležité tvrzení: Daná algebraická rovnice $f(x) = 0$ nemůže mít kromě kořenů $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, které se vyskytují v rozkladu mnohočlenu $f(x)$ žádné další kořeny. Kdyby totiž bylo číslo α_{n+1} dalším kořenem a $\alpha_{n+1} \neq \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$, plynula by z (10) rovnost

$$(\alpha_{n+1} - \alpha_1)(\alpha_{n+1} - \alpha_2) \ldots (\alpha_{n+1} - \alpha_n) = 0,$$

tj. alespoň jedna ze závorek by byla rovna nule. V tom případě by bylo $\alpha_{n+1} \neq \alpha_i$, kde i je některé z čísel 1, ..., n. To by byl však spor, neboť α_{n+1} je různé od všech kořenů $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Můžeme tedy o počtu kořenů algebraické rovnice n-tého stupně vyslovit tuto větu:

Věta 4. *Algebraická rovnice n-tého stupně má nejvýše n různých komplexních kořenů.*

To je tvrzení, o kterém jsme se již zmínili v odstavci 2.

Uveďme nyní jeden příklad na rozklad kubického mnohočlenu. Mnohočlen $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ lze psát ve tvaru

$$f(x) = (x - 1)(x - 1)(x - 2)$$

(přesvědčte se vynásobením). Z tohoto příkladu je zároveň vidět, že čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nemusí být vzájemně různá. Lze tedy mnohočlen $f(x)$ psát ve tvaru

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \ldots (x - \alpha_j)^{k_j}, \tag{11}$$

kde jsou již sdruženy stejné lineární dvojčleny, tj. kde čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_j$ jsou vzájemně různá. Je samozřejmé, že o přirozených číslech $k_1, \ldots, k_j$ musí platit, že $k_1 + \ldots + k_j = n$ (neboť celkový počet činitelů v rozkladu (9) byl roven n). Tak např. lze psát $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)^2(x - 2)$, kde $3 = n = 2 + 1$.

Lineární dvojčleny $x - \alpha_i$, kde α_i je kořenem rovnice $f(x) = 0$, se nazývají *kořenovými činiteli* mnohočlenu $f(x)$. Je-li α_i nějaký kořen, pak exponent k_i u příslušného kořenového činitele $x - \alpha_i$ nazýváme *násobností* kořenu α_i a kořen α_i je pak tzv. *k_i-násobným kořenem* rovnice $f(x) = 0$. Kořen α_i s násobností 1 nazýváme *jednoduchým kořenem* rovnice $f(x) = 0$.

Tak např. výše uvedený kubický mnohočlen $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ lze psát ve tvaru $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)^2(x - 2)$, což znamená, že kubická rovnice $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ má jeden dvojnásobný kořen $\alpha_1 = 1$ a jeden jednoduchý kořen $\alpha_2 = 2$.

Jako další příklad vezměme kvadratickou rovnici

$$x^2 - 6x + 9 = 0.$$

Její diskriminant je roven nule, takže ze vzorce pro kořeny kvadratické rovnice dostáváme jen jedno číslo $\alpha = 3$. Mnozí jsou v tomto případě zvyklí říkat, že rovnice má „dva stejné či splývající" kořeny $\alpha_1 = \alpha_2 = 3$. To je dosti nejasný výrok. Může vzniknout tato otázka: proč mluvíme o dvou kořenech, když v tomto případě existuje vlastně jen kořen jeden? Takovýmto nejasnostem se vyhneme, užijeme-li pojmu násobnosti kořenu.

Náš kvadratický trojčlen lze rozložit na kořenové činitele takto:

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)(x - 3) = (x - 3)^2.$$

Odtud plyne, že daná kvadratická rovnice má jediný dvojnásobný kořen $\alpha = 3$.

Nyní již můžeme vyslovit další tvrzení o souvislosti stupně algebraické rovnice s počtem jejích kořenů. Počítáme-li totiž každý kořen tolikrát, kolik činí jeho násobnost, pak je počet kořenů roven stupni algebraické rovnice. Platí tedy tato věta:

Věta 5. *Počet kořenů algebraické rovnice je roven jejímu stupni, jestliže každý kořen počítáme tolikrát, kolik činí jeho násobnost.*

Důkaz této věty plyne z toho, že mnohočlen n-tého stupně $f(x)$ lze rozložit na součin kořenových činitelů tvaru (11), kde $k_1 + \ldots + k_n = n$, tj. součet násobností všech vzájemně různých kořenů je roven n.

Zůstali jsme ještě dlužni důkaz věty 3. Tato věta je důsledkem věty 2 a základní věty algebry. Je-li dána algebraická rovnice

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

pak podle základní věty algebry má tato rovnice alespoň jeden kořen α_1. Podle věty 2 lze nyní psát polynom $f(x)$ ve tvaru

$$f(x) = (x - \alpha_1)g(x),$$

kde $g(x)$ je ve tvaru $g(x) = x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$. Danou rovnici $f(x) = 0$ lze tedy psát ve tvaru

$$(x - \alpha_1)\,g_1(x) = 0. \tag{12}$$

Rovnice $n - 1$ stupně $g_1(x) = 0$ má opět podle základní věty algebry alespoň jeden kořen α_2 (kořen α_2 je pak i kořenem rovnice (12), tj. původní rovnice $f(x) = 0$). Lze tedy mnohočlen $g_1(x)$ psát ve tvaru

$$g_1(x) = (x - \alpha_2)\, g_2(x),$$

kde $g_2(x) = x^{n-2} + c_1 x^{n-3} + \ldots + c_{n-2}$. Rovnice (12) pak přejde na tvar

$$(13) \qquad (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\, g_2(x) = 0,$$

kde $g_2(x)$ je mnohočlen $n - 2$ stupně. Podobně lze postupovat tak dlouho, až rovnice (13) nabude tvaru

$$(10) \qquad (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n) = 0.$$

Tím jsme dokázali, že rovnici n-tého stupně $f(x) = 0$ lze psát ve tvaru součinu n lineárních dvojčlenů, kde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jsou kořeny rovnice $f(x) = 0$, což je obsahem věty 3. Důkazem jednoznačnosti rozkladu se nebudeme zabývat.

Viděli jsme, že lze každou rovnici tvaru (4) napsat ve tvaru (10) jako součin kořenových činitelů. To nám umožňuje řešit v jistém smyslu obrácenou úlohu: K daným komplexním číslům $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sestavit algebraickou rovnici, která má za kořeny právě tato daná čísla a žádná jiná. Takovou rovnicí je zřejmě rovnice $f(x) = 0$, kde

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_m)$$

(a_0 je libovolná konstanta, $a_0 \neq 0$). Je zřejmé, že položíme-li $a_0 = 1$, dostaneme rovnici v normovaném tvaru. Máme-li nalézt dále takovou rovnici, že α_1 má být jejím k_1 násobným kořenem, α_2 jejím k_2 násobným kořenem, až α_m jejím k_m násobným kořenem, pak je hledanou rovnicí rovnice $f(x) = 0$, kde

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \ldots (x - \alpha_m)^{k_m}$$

(a_0 je libovolná konstanta různá od nuly).

Cvičení 3. Sestavte algebraické rovnice mající tyto jednoduché kořeny:

a) 4, 5, 2; b) —8, —4, 4; c) $-\frac{5}{6}$, $-\frac{2}{5}$, 8; d) 2, —2, 5, —5; e) —3, 4, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$; f) $2+i$, $4-2i$, —3.

4. Sestavte algebraické rovnice mající tyto kořeny:

a) dvojnásobný kořen 2 a trojnásobný kořen —2;

b) jednoduchý kořen —2 a dvojnásobný kořen i;

c) jednoduchý kořen i, jednoduchý kořen —i a trojnásobný kořen 0.

Rozkladu na kořenové činitele lze užít také ke zjednodušení výrazů obsahujících mnohočleny.

Příklad 2. Zjednodušme výraz

$$\frac{x^2-7x+12}{x^2-8x+15}.$$

Řešme kvadratické rovnice $x^2-7x+12=0$ a $x^2-8x+15=0$. Prvá má kořeny 4, 3, a druhá má kořeny 3, 5. Kvadratické trojčleny v čitateli a jmenovateli lze tedy rozložit takto:

$$x^2-7x+12=(x-4)(x-3),$$
$$x^2-8x+15=(x-3)(x-5).$$

Je tedy daný výraz definován pro $x \neq 3$, $x \neq 5$. Pro tato x lze psát

$$\frac{x^2-7x+12}{x^2-8x+15}=\frac{(x-4)(x-3)}{(x-3)(x-5)}=\frac{x-4}{x-5}.$$

Náš výraz lze tedy v celém oboru, ve kterém má smysl, tj. pro $x \neq 3$ a $x \neq 5$, psát v jednodušším tvaru $\frac{x-4}{x-5}$.

(Je samozřejmé, že zjednodušení je možné jen tehdy, mají-li obě kvadratické rovnice společný kořen.)

Cvičení 5. Zjednodušte tyto výrazy:

a) $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6}$;

b) $\dfrac{\dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x - 4} - \dfrac{x^2 + x - 12}{x^2 - x - 6}}{\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 12} - \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + x - 2}}$;

c) $\dfrac{x^2 + 9x + 14}{x^2 - x - 12} \cdot \dfrac{x^2 - 2x - 15}{x^2 + 6x - 7}$.

4. Souvislost kořenů a koeficientů algebraické rovnice

Z rozkladu algebraické rovnice na součin kořenových činitelů lze snadno odvodit zajímavé vzorce, ukazující souvislost kořenů a koeficientů dané rovnice. Ukažme si to nejprve na normované kvadratické rovnici $x^2 + a_1x + a_2 = 0$.

Buďte α_1, α_2 její kořeny (rovnice může mít i dvojnásobný kořen α, tj. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$). Potom lze uvažovaný kvadratický trojčlen napsat ve tvaru

$$x^2 + a_1x + a_2 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2).$$

Odtud plyne vynásobením rovnost

$$x^2 + a_1x + a_2 = x^2 - \alpha_1x - \alpha_2x + \alpha_1\alpha_2,$$

tj. rovnost

$$x^2 + a_1x + a_2 = x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2.$$

To je rovnost dvou mnohočlenů a ta nastane právě tehdy, jsou-li koeficienty odpovídající stejným mocninám x sobě rovné.*) Je tedy

$$(14) \qquad \begin{cases} a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2), \\ a_2 = \alpha_1\alpha_2. \end{cases}$$

Stejným způsobem si čtenář již sám v případě kubické rovnice

$$x^3 + a_1x + a_2x^2 + a_3 = 0$$

odvodí vztahy

$$\begin{cases} a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \\ a_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3, \\ a_3 = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \end{cases}$$

kde α_1, α_2, α_3 jsou kořeny výše uvedené kubické rovnice (opět mohou být některé kořeny vícenásobné, např. $\alpha_1 = \alpha_2$ či $\alpha_2 = \alpha_3$ apod.).

Zcela obdobné vzorce lze odvodit i v případě rovnice n-tého stupně. Platí tato věta:

Věta 6. *Jsou-li* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *kořeny rovnice*

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

platí

$a_1 = (-1)^1(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$,
$a_2 = (-1)^2.$(součet všech součinů $\alpha_i\alpha_j$, kde $i < j$),
$a_3 = (-1)^3.$(součet všech součinů $\alpha_i\alpha_j\alpha_k$, kde $i < j < k$),
....,
$a_{n-1} = (-1)^{n-1}.$(součet všech součinů $\underbrace{\alpha_i\alpha_j\ldots\alpha_m}_{n\text{-1 členů}}$, kde $i < j < \ldots < m$), $a_n = (-1)^n\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$.

*) O mnohočlenech platí totiž tato věta: Jsou-li $f(x)$ a $g(x)$ dva mnohočleny v komplexním (resp. reálném) oboru a platí-li pro všechna komplexní (resp. reálná) čísla x rovnost $f(x) = g(x)$, pak mají mnohočleny $f(x)$ a $g(x)$ stejné koeficienty. Důkaz této věty již vybočuje z rámce této knížky.

Příklad 3. Pomocí vzorců (14) můžeme snadno uhodnout např. kořeny této jednoduché kvadratické rovnice:

$$x^2 + 7x + 10 = 0.$$

Podle vzorců (14) platí pro kořeny α_1, α_2 tyto vztahy:

$$(15) \qquad 7 = -(\alpha_1 + \alpha_2),$$
$$10 = \alpha_1 \alpha_2.$$

Hledáme taková dvě čísla α_1, α_2, aby jejich součin byl 10 a součet či rozdíl 7. Takovými čísly jsou zřejmě čísla 5 a 2. Aby souhlasila znaménka ve vzorcích (15), položíme $\alpha_1 = -5$, $\alpha_2 = -2$. Tato čísla jsou pak zřejmě hledané kořeny.

Cvičení 6. Podobným způsobem, jako v příkladu 3, určete kořeny těchto kvadratických rovnic:

a) $x^2 - x - 6 = 0;$
b) $x^2 + x - 12 = 0;$
c) $x^2 - 12x + 35 = 0;$
d) $x^2 - 10x + 21 = 0;$
e) $x^2 - 8x - 48 = 0;$
f) $x^2 - 12x - 45 = 0;$
g) $x^2 - 11x - 42 = 0.$

7. Sestavte kvadratickou rovnici o kořenech, jejichž součet je roven -1 a součet převrácených hodnot je roven $\frac{1}{2}$. Návod: užijte vztahů (14).

8. Je-li známo, že rovnice $x^2 - 9x - 2142 = 0$ má jeden kořen roven číslu 51, určete pomocí vztahů (14) kořen druhý, aniž rovnici řešíte.

9. Sestavte kvadratické rovnice o kořenech a) 5, 6; b) 7, —9; c) —10, —11; d) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$; e) $a + b, a - b$; f) $\sqrt{3}, \sqrt{5}$ [užijte opět vztahů (14)].

10. Jsou-li x_1, x_2 kořeny rovnice $3x^2 - 7x - 6 = 0$, určete čísla a) $x_1^2 + x_2^2$; b) $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$; c) $x_1^3 + x_2^3$, aniž rovnici řešíte [užijte vztahů (14)].

11. Sestavte rovnici, která má kořeny o číslo 2 menší než rovnice $x^2 - 2x - 1 = 0$, aniž tuto rovnici řešíte.