Prostory o čtyřech a více rozměrech

3. Trojrozměrný prostor

In: Karel Havlíček (author): Prostory o čtyřech a více rozměrech. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1965. pp. 25–37.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403542

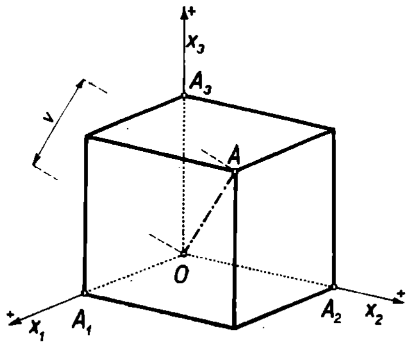
3. kapitola

TROJROZMĚRNÝ PROSTOR

V předcházející kapitole jsme sledovali geometrický význam některých rovnic o dvou proměnných. Postupme o krok dál a ptejme se, mají-li nějaký geometrický význam také rovnice o třech proměnných. Odpověď nám dá opět analytická geometrie, tentokrát prostorová.

V prostoru zavedeme zase souřadnice kartézské, a to tím způsobem, že zvolíme tři osy číselné x_1, x_2, x_3 vzájemně k sobě kolmé o společném počátku O (viz obr. 5). Každý si je jistě dovede snadno představit, např. tři hrany krychle vycházející z téhož vrcholu leží na takovýchto přímkách. Osy x_1, x_2, x_3 nazveme opět osy souřadnic, tři roviny, jimi po dvou určené, nazývají se roviny souřadnic. Je-li A libovolný bod v prostoru, veďme jím roviny kolmé k osám x_1, x_2, x_3, tedy tři roviny rovnoběžné s rovinami souřadnic. Tyto roviny vytnou na osách body A_1, A_2, A_3 a označme a_1, a_2, a_3 souřadnice každého z těchto bodů na příslušné ose podle výkladů v kapitole 1. Všimněme si, že i obráceně, třem zvoleným číslům a_1, a_2, a_3 jsou tak na příslušných osách určeny jednoznačně tři body A_1, A_2, A_3, jimiž vedené roviny rovnoběžné s rovinami souřadnic protínají se v jediném bodě A. Na základě toho říkáme, že bod A má v prostoru tři souřadnice a_1, a_2, a_3, a symbolicky to zapíšeme znakem $A\ (a_1; a_2; a_3)$. Pořadí zapsaných souřadnic je zde opět podstatné a každá souřadnice může probíhat množinu všech reálných čísel.

Pro ty, kdož studují deskriptivní geometrii, je představa těchto prostorových souřadnic běžná, snad jsou spíše zvyklí užívat pro osy souřadnic označení x, y, z místo našeho x_1, x_2, x_3.



Obr. 5

Z obr. 5 je dobře patrné, že vzdálenost bodu A od počátku O je délka v tělesové úhlopříčky kvádru, jehož stěny jsou v rovinách souřadnic a v rovinách s nimi rovnoběžných, procházejících bodem A. Rozměry tohoto kvádru jsou rovny číslům $|a_1|$, $|a_2|$, $|a_3|$; je tedy

$$v = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Plyne to ze známého výpočtu délky tělesové úhlopříčky kvádru.

Půjde-li o výpočet vzdálenosti v dvou libovolných bodů $A(a_1; a_2; a_3)$, $B(b_1; b_2; b_3)$v prostoru, je úvaha obdobná. Jde většinou opět o délku tělesové úhlopříčky AB kvádru, jehož stěny leží v rovinách rovnoběžných s rovinami souřadnic a procházejících body A, B. Tento kvádr má pak rozměry rovné číslům $|b_1 - a_1|$, $|b_2 - a_2|$, $|b_3 - a_3|$; jsou to vzdálenosti kolmých průmětů bodů A, B na osách souřadnic.*) Tak docházíme k větě, která je obdobou vět 1,1 a 2,1 z předcházejících kapitol:

Věta 3,1. *Jsou-li $A(a_1; a_2; a_3)$, $B(b_1; b_2; b_3)$ dva body v prostoru, pak jejich vzdálenost je dána číslem*

$$v = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}. \qquad (3,1)$$

Důkaz, jak již bylo řečeno, plyne z výpočtu délky tělesové úhlopříčky AB kvádru, jehož stěny jsou v rovinách rovnoběžných s rovinami souřadnic.

Sledujeme dále obdobu s geometrií v přímce a v rovině, v tomto případě obdobu s větami 1,2 a 2,2 v prostoru.

Věta 3,2. *Střed S úsečky, jejíž krajní body jsou $A(a_1; a_2; a_3)$, $B(b_1; b_2; b_3)$, má souřadnice*

$$s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}, \quad s_3 = \frac{a_3 + b_3}{2}. \qquad (3,2)$$

Důkaz. Střed S úsečky AB se promítá rovinou kolmou k ose x_1 do bodu S_1 na ose x_1, který je zřejmě středem úsečky A_1B_1, kde A_1, B_1 jsou právě takové kolmé průměty bodů A, B na osu x_1. Souřadnici s_1 bodu S_1 dovedeme tedy určit (pomocí věty 1,2), čímž docházíme k prvnímu vzorci (3,2). Podobně kolmým promítnutím bodu S na další osy x_2, x_3 dostaneme souřadnice s_2, s_3 ve tvaru dalších vzorců (3,2).

Jiný důkaz toho, že bod $S(s_1; s_2; s_3)$ o souřadnicích (3,2) je středem uvedené úsečky AB, poznáme za chvíli; bude nám užitečný pro příští úvahy v prostorech vícerozměrných. Dříve si však ujasníme geometrický význam lineární

*) Kolmým průmětem bodu na přímku zde rozumíme průsečík této přímky s rovinou jdoucí daným bodem kolmo k této přímce. Tak např. na obr. 5 bod A_1 je kolmým průmětem bodu A na osu x_1.

rovnice v prostoru, tj. lineární rovnice o třech proměnných. Budeme přitom postupovat stejným způsobem, jakým jsme v předcházející kapitole dospěli k větě 2,3; výklad zde bude ovšem daleko stručnější.

Každý ví, že všechny takové body X v prostoru, které jsou stejně daleko od bodu A jako od bodu B, vyplní rovinu, totiž rovinu souměrnosti úsečky AB. Abychom našli rovnici této roviny, označíme kartézské souřadnice bodu X písmeny x_1, x_2, x_3 a souřadnice bodů A, B stejně jako v předcházejících větách. Potom podmínka $AX =$ $= BX$ zní (podle věty 3,1)

$$\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2} =$$
$$= \sqrt{(x_1 - b_1)^2 + (x_2 - b_2)^2 + (x_3 - b_3)^2}$$

a po umocnění dvěma a jednoduché úpravě vychází pro naši rovinu rovnice

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4 = 0, \tag{3,3}$$

kde jsme položili

$$p_1 = \varrho\,(b_1 - a_1),\ p_2 = \varrho\,(b_2 - a_2),\ p_3 = \varrho\,(b_3 - a_3),$$

$$p_4 = \frac{\varrho}{2}\,(a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2 + a_3^2 - b_3^2). \tag{3,4}$$

Přitom $\varrho \neq 0$ je libovolně zvolené číslo, jímž můžeme v rovnici (3,3) krátit; čísla p_1, p_2, p_3 nejsou současně rovna nule.

Čtenář jistě poznává, že je tu stejná úvaha, jaká se v předcházející kapitole týkala rovnic (2,3) až (2,5) a jejich významu. Nebudeme zde už podrobnosti opakovat, řekneme si jen, že rovnice (3,3) je v proměnných x_1, x_2, x_3 lineární a že je rovnicí roviny souměrnosti úsečky AB. Protože každou rovinu lze pokládat za rovinu souměrnosti některé úsečky, lze jistě každou rovinu vyjádřit takovouto lineární rovnicí (3,3). Celkem lze vyslovit tuto větu:

Věta 3,3. *V kartézských souřadnicích má rovina v prostoru rovnici lineární.*

Důkaz má dvě části. Především se musí dokázat, že souřadnice bodů roviny vyhovují lineární rovnici; to už jsme provedli při odvození rovnic (3,3) a (3,4). Za druhé je třeba ukázat, že když je dána lineární rovnice (3,3), kde p_1, p_2, p_3, p_4 jsou zvolené konstanty, že pak body $X(x_1; x_2; x_3)$ vytvoří rovinu. Důkaz je zde opět stejný jako v předcházející kapitole při rozboru rovnic (2,6) až (2,8), takže si ho čtenář už snadno doplní sám.

Další jednoduchou a každému dobře známou plochou je plocha kulová. Její rovnice v prostoru připomíná rovnici kružnice v rovině, odvozenou ve větě 2,4 v předcházející kapitole.

Věta 3,4. *Plocha kulová o středu $S(s_1; s_2; s_3)$ a poloměru $r > 0$ má v kartézských souřadnicích v prostoru rovnici*

$$(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 + (x_3 - s_3)^2 = r^2. \qquad (3,5)$$

Důkaz. Plocha kulová je množina bodů $X(x_1; x_2; x_3)$, které mají od jejího středu $S(s_1; s_2; s_3)$ stejnou vzdálenost, rovnou poloměru r. Podle vzorce (3,1) je tedy

$$\sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 + (x_3 - s_3)^2} = r.$$

Umocněním této rovnice dvěma vychází už rovnice (3,5) a obráceně, odmocňováním, plyne z rovnice (3,5) poslední vztah, neboť předpokládáme $r > 0$.

Rovnici (3,5) lze přepsat ve tvar

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + Mx_1 + Nx_2 + Px_3 + Q = 0, \qquad (3,6)$$

kde jsme pro stručnost položili

$$M = -2s_1,\ N = -2s_2,\ P = -2s_3,$$
$$Q = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - r^2.$$

To je v proměných x_1, x_2, x_3 kvadratická rovnice, charakterizující plochu kulovou; každá jiná kvadratická rovnice je už tedy rovnicí jiné plochy druhého stupně než je plocha kulová. (Jiné takové plochy jsou elipsoidy, hyperboloidy, paraboloidy, válce a kužele; těmi se zde nebudeme zabývat.) Abychom z rovnice (3,6) poznali střed i poloměr příslušné plochy kulové, převedeme ji zpět na tvar (3,5); postup je obdobný tomu, kterým jsme v předcházející kapitole došli od rovnice (2,10) k rovnici (2,9); pro každé hodnoty x_1, x_2, x_3 je $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + Mx_1 + Nx_2 +$

$$+ Px_3 + Q = (x_1 + \frac{M}{2})^2 + (x_2 + \frac{N}{2})^2 + (x_3 + \frac{P}{2})^2 +$$

$$+ Q - \frac{M^2 + N^2 + P^2}{4}.$$

Srovnáním s tvarem (3,5) tedy vychází, že naše plocha kulová, daná rovnicí (3,6), má střed S o souřadnicích

$$s_1 = -\frac{M}{2},\quad s_2 = -\frac{N}{2},\quad s_3 = -\frac{P}{2}$$

a poloměr

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{M^2 + N^2 + P^2 - 4Q},$$

což ovšem předpokládá $M^2 + N^2 + P^2 - 4Q > 0$. Rovnici (3,6) můžeme ovšem násobit jakoukoli nenulovou konstantou; přitom zůstane stále rovnicí téže plochy.

Rovnice ploch, totiž roviny a plochy kulové, jež jsme ve větách 3,3 a 3,4 poznali, jsou jen dva příklady rovnic ploch.

Jiné plochy mají jiné rovnice, ale na ty nám zde nezbývá místa a nelze v tomto směru udělat nic jiného, než odkázat čtenáře na obsáhlejší a podrobnější literaturu. Prozatím si zapamatujeme, že plochy v prostoru jsou v analytické geometrii určeny rovnicemi asi tak, jako v rovině byly rovnicemi určeny různé čáry (např. přímka a kružnice). Jak je to však s rovnicemi čar v prostorové geometrii?

Nebudeme se zabývat křivkami, spokojíme se jen s nejjednoduššími čarami, s přímkami.

Vyjděme z toho, co už známe, totiž z věty 3,3; odtud víme, jak vypadá rovnice roviny. Přímku v prostoru můžeme vždycky pokládat za průsečnici nějakých dvou rovin. To nám pomůže při analytickém vyjádření přímky. Jsou-li

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 &= 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4 &= 0 \end{aligned} \qquad (3,7)$$

rovnice dvou rovin α, β, pak ovšem všechny takové body $X(x_1;\ x_2;\ x_3)$, jejichž souřadnice vyhovují oběma těmto rovnicím zároveň, leží jak v rovině α, tak v rovině β. Tyto body X leží tedy na průsečnici rovin α, β, proto vytvoří přímku. (Přitom jsme samozřejmě předpokládali, že a_1, a_2, a_3, a_4 a b_1, b_2, b_3, b_4 jsou předem pevně stanovená čísla, tedy konstanty.) Obráceně také právě jen body takovéto přímky mají tu vlastnost, že jejich souřadnice vyhovují oběma rovnicím (3,7) zároveň. Můžeme tedy říci, že *přímka je v prostorové analytické geometrii určena dvěma lineárními rovnicemi.* To platí ovšem jen za předpokladu, že každá z rovnic (3,7) určuje jinou rovinu a že tyto dvě roviny nejsou spolu rovnoběžné. Nepouštějme se však do geometrických podrobností a všimněme si raději souvislosti těchto úvah s algebrou.

V prostorové analytické geometrii je tedy určení bodů přímky totéž, jako hledání společného řešení dvou rovnic (3,7). Jde tedy o řešení soustavy dvou lineárních rovnic

(3,7) o třech neznámých x_1, x_2, x_3. Geometrie nám poskytuje snadný přehled o existenci takového řešení. Naše soustava totiž buď nemá žádné řešení, nebo jich má nekonečně mnoho; jiné možnosti nejsou. Ukažme si příklady.

1. První možnost nastane tehdy, když dvě různé roviny α, β určené rovnicemi (3,7) jsou spolu rovnoběžné; pak nemají žádný společný bod a soustava (3,7) nemá tedy řešení. O takových rovnicích říkáme, že jsou ve sporu. To nastává např. u soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - 3 &= 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5 &= 0. \end{aligned}$$

Snadno zjistíte, že první rovnice představuje rovinu, vytínající na každé souřadné ose úsek 3; obsahuje body (3; 0; 0), (0; 3; 0) a (0; 0; 3). Druhá z nich vytíná na osách souřadných rovněž stejné úseky, a to délky $\frac{5}{2}$, a je tudíž s první rovinou rovnoběžná. Není ostatně nic divného, že obě uvedené rovnice jsou ve sporu. První požaduje, aby bylo $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, druhá, aby bylo $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{5}{2}$; oba tyto protichůdné požadavky nelze splnit zároveň.

2. Další možnost, kdy uvedené dvě různé roviny nejsou spolu rovnoběžné, dává vždycky nekonečně mnoho řešení příslušné soustavy, protože takovéto dvě roviny mají nekonečně mnoho bodů společných. Na příklad řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3 &= 0, \\ x_1 - 6x_2 - x_3 - 1 &= 0 \end{aligned} \tag{3,8}$$

je každá trojice

$$x_1 = 1 - \frac{u}{2}, \quad x_2 = -\frac{u}{4}, \; x_3 = u,$$

kde u je libovolně volitelné číslo. V učebnicích analytické geometrie se dokazuje, že tyto body vytvoří přímku. — Konečně uveďme ještě např. soustavu

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 1 &= 0, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2 &= 0, \end{aligned}$$

kde každé řešení, jež vyhovuje jedné z těchto rovnic, vyhovuje i druhé, protože druhá vznikne z první, násobíme-li ji dvěma. Obě tyto rovnice představují tedy tutéž rovinu; říkáme také, že roviny určené těmito rovnicemi splývají. (To nenastalo v případě soustavy (3,8), kde např. bod (0; 0; 3) leží v první tam dané rovině, ale neleží ve druhé. Jde tam tedy o dvě různé roviny.)

Uvedli jsme si tyto příklady na ukázku souvislosti geometrie a algebry. Algebra dovede ovšem řešit soustavy (3,7) bez pomoci geometrie a zná podmínky, kdy taková soustava má a kdy nemá řešení a jak se příslušná řešení najdou. Na těchto stránkách jsme však chtěli ukázat, že geometrie dává pohodlný přehled o možnostech řešení takové soustavy.

Využijme v analytické geometrii ještě jednu známou skutečnost: Leží-li dva body přímky v nějaké rovině, pak v této rovině leží celá tato přímka. Povede nás to k dříve již slíbenému druhému důkazu věty 3,2. Střed S úsečky AB je charakterizován dvěma vlastnostmi: je od obou bodů A, B stejně daleko a leží na přímce určené body A, B. První vlastnost potvrdí čtenář snadno sám (viz cvičení 3,3). Dokažme ještě druhou z nich. Zvolme libovolnou rovinu procházející body A, B. Rovnici této roviny pišme ve tvaru

$$q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3 + q_4 = 0, \qquad (3,9)$$

kde q_1, q_2, q_3, q_4 jsou konstanty, x_1, x_2, x_3 proměnné. Souřadnice bodů A, B jí podle předpokladu vyhovují, je tedy

$$q_1a_1 + q_2a_2 + q_3a_3 + q_4 = 0,$$
$$q_1b_1 + q_2b_2 + q_3b_3 + q_4 = 0.$$

Sečtením těchto rovnic dostáváme

$$q_1(a_1 + b_1) + q_2(a_2 + b_2) + q_3(a_3 + b_3) + 2q_4 = 0$$

a po dělení dvěma

$$q_1\frac{a_1 + b_1}{2} + q_2\frac{a_2 + b_2}{2} + q_3\frac{a_3 + b_3}{2} + q_4 = 0. \quad (3{,}10)$$

To znamená, že souřadnice (3,2) bodu S vyhovují rovnici (3,9). To byla, jak víme, rovnice libovolné roviny jdoucí body A, B. Můžeme tedy říci: bod S leží v každé takové rovině, která prochází body A, B. Z toho plyne, že bod S leží na přímce spojující body A, B, jak jsme měli dokázat. Protože na přímce leží jediný střed úsečky, je tím znovu věta 3,2 dokázána.

Přejděme nyní k soustavě tří lineárních rovnic o třech neznámých x_1, x_2, x_3. I zde studium takovéto soustavy je v podstatě totožné se studiem tří rovin v prostoru, jež jsou těmito rovnicemi určeny. Ihned poznáváme, že taková soustava buď nemá žádné řešení (když např. aspoň dvě z těchto tří rovin jsou spolu rovnoběžné nebo když jsou všechny tři rovnoběžné s touže přímkou), nebo je řešení jediné (když se tři roviny protínají v jednom bodě), nebo konečně je řešení nekonečně mnoho (když tři roviny mají společnou aspoň jednu přímku). Uveďme si příklad na tuto poslední možnost. Řešme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 1 &= 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 7 &= 0, \\ x_1 - 7x_2 + 8x_3 + 5 &= 0. \end{aligned} \quad (3{,}11)$$

Z prvních dvou daných rovnic můžeme vypočítat x_1, x_2 pomocí třetí neznámé x_3; počítá se tak, jakoby šlo o soustavu dvou rovnic o dvou neznámých x_1, x_2, při čemž třetí x_3 je libovolně volitelná. Snadno každý spočítá, že je zde

$$x_1 = 2 - x_3, \quad x_2 = 1 + x_3.$$

Dosadíme-li tyto výsledky do třetí z daných rovnic, poznáváme, že i tato rovnice je při libovolném x_3 vždycky splněna. To znamená, že každá trojice čísel

$$x_1 = 2 - u, x_2 = 1 + u, x_3 = u,$$

kde u je libovolně volitelné číslo, řeší danou soustavu; ta má tedy nekonečně mnoho řešení.

Příčina toho, že soustava (3,11) má nekonečně mnoho řešení, je v tom, že tyto tři rovnice nejsou na sobě nezávislé. Vskutku, znásobíme-li první rovnici dvěma a od výsledku odečteme druhou rovnici, dostaneme právě třetí z nich. Pak ovšem každé hodnoty neznámých x_1, x_2, x_3, jež vyhovují zároveň prvním dvěma rovnicím (3,11), vyhovují nutně i třetí rovnici. Geometricky to znamená, že rovina, určená třetí rovnicí (3,11), obsahuje všechny body společné dvěma rovinám, jež jsou určeny prvními dvěma rovnicemi (3,11); třetí rovina prochází prostě přímkou, v níž se první dvě protínají. Další příklady jsou ve cvičení **3,9** až **3,12**. Otázka společného průsečíku několika rovin vystupuje také ve cvičení **3,5**; příslušné roviny se tam určí způsobem, jakým jsme došli k rovnici (3,3) s koeficienty (3,4).

Hledání společných bodů jiných geometrických útvarů než rovin a přímek neznamená v analytické geometrii ovšem zase nic jiného, než řešení příslušné soustavy rovnic; rozdíl proti předcházejícímu je jen v tom, že pak nejsou všechny příslušné rovnice lineární. Tak např. určení průsečíků přímky s plochou kulovou vede podle předchozích výkladů na soustavu tří rovnic, z nichž dvě jsou lineární a třetí kvadratická. Při řešení postupujeme obvykle tak, že nejprve z lineárních rovnic vypočteme dvě neznámé pomocí třetí neznámé a dosadíme výsledky do kvadratické rovnice, z níž třetí neznámou vypočítáme. Další postup je už zřejmý.

Zakončeme tuto kapitolu obdobně jako předcházející kapitoly. Na rozdíl od geometrie v přímce a v rovině potřebovali jsme v prostorové geometrii už *tři* na sobě nezávislé, tj. libovolně volitelné souřadnice. Každá z těchto souřadnic může opět probíhat celou množinu reálných čísel. Proto říkáme, že náš *prostor je trojrozměrný*. A protože euklidovská geometrie je ta geometrie, při níž měření vzdáleností je vyjádřeno vzorcem (3,1), říkáme, že **prostor, v němž měření provádíme podle vzorce (3,1), je trojrozměrný euklidovský prostor.**

Cvičení

3,1. Určete délky stran trojúhelníka ABC, je-li A (2; 1; 3), B (5; 4; 8), C (3; 0; 3). Na základě toho se přesvědčte, že tento trojúhelník je pravoúhlý.

3,2. Přesvědčte se, že trojúhelník A (2; 3; −1), B (4; 1; 5), C (1; −3; 1) je rovnoramenný.

3,3. Přesvědčte se, že bod S o souřadnicích daných rovnicemi (3,2) má stejnou vzdálenost od bodu A $(a_1; a_2; a_3)$ jako od bodu B $(b_1; b_2; b_3)$ a že je $AS = BS = \frac{1}{2} AB$.

3,4. Přesvědčte se počtem, že střed úsečky leží v její rovině souměrnosti.

3,5. Určete bod S, který má od bodů A(1; −1; 1), B (2; 1; −2), C (−1; 3; −1), D (1; 1; 1) vesměs stejné vzdálenosti.

3,6. Napište rovnici plochy kulové, která má

a) střed v počátku a poloměr $r = 1$;

b) střed S (2; 0; 0) a prochází počátkem;

c) střed $S\ (4; 2; 2)$ a poloměr $r = 3$.

3,7. Určete střed a poloměr plochy kulové, jejíž rovnice je

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 6x_2 - 10x_3 + 10 = 0$;

b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2ax_3 = 0$; kde je $a > 0$.

3,8. Napište rovnici plochy kulové, která prochází body A, B, C, D ze cvičení *3,5*.

3,9. Pokuste se řešit soustavu rovnic

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 - 5 = 0,$$
$$-6x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 7 = 0,$$

a na základě výsledků rozhodněte, zdali obě roviny, určené těmito rovnicemi, jsou spolu rovnoběžné nebo ne.

3,10. Ukažte, že tři roviny, jejichž rovnice jsou

a) $2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 1 = 0,$
$3x_1 + x_2 + 2x_3 - 7 = 0,$
$5x_1 + 7x_2 - x_3 - 16 = 0;$

b) $x_1 + x_2 - x_3 = 0,$
$2x_1 + x_2 - x_3 = 1,$
$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0,$

se protínají v jednom bodě; najděte jej!

3,11. Tři roviny o rovnicích

$$x_1 + x_2 - 2x_3 + 1 = 0,$$
$$3x_1 - x_2 + x_3 - 2 = 0,$$
$$11x_1 - x_2 - x_3 - 4 = 0,$$

mají nekonečně mnoho společných bodů. Určete jejich souřadnice.

3,12. Určete společné body rovin o rovnicích

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0,$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 0,$$
$$2x_1 - x_3 - 1 = 0.$$

3,13. Dokažte, že přímka, daná rovnicemi

$$3x_1 + 4x_2 - 25 = 0,$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 11 = 0,$$

je tečnou plochy kulové o rovnici

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 25 = 0.$$