Faktoriály a kombinační čísla

Výsledky úloh

VÝSLEDKY ÚLOH

1. Větší je číslo $500!.503!$.

2. a) Kdyby bylo $n!(n+3)! \leqq (n+1)!(n+2)!$, pak by po zkrácení vyšlo $n+3 \leqq n+1$ (spor).

b) Kdyby bylo $n!+(n+3)! \leqq (n+1)!$, pak by vyšlo $n^3+5n^2+7n+4 \leqq 0$ (spor).

3. Oba vzorce lze dokázat matematickou indukcí.

4. Je $7!.5!$ možností.

5. Je to možné $(n-1)!$ způsoby.

6. Nemůžeme.

7. Pro přirozené číslo $n>2$ položíme $x=n$, $y=n!-1$, $z=(n!)!-1$, $t=[(n!)!]!-1$. Pak je $u=[(n!)!]!$.

8. Vyhovuje jen $x=1$, $y=1$, $z=2$.

9. Nejmenší je $x=12$, jak se lze přesvědčit podle tabulek faktoriálů.

10. Nerovnost lze upravit na tvar $3n^2+15n-164<0$, čemuž vyhovují přirozená čísla $n \leqq 5$.

11. Ekvivalentními úpravami se nerovnost převede na tvar $mn \geqq 4$. Z toho je též patrné, že rovnost nastane jen pro $m=n=2$.

12. Vyjdeme ze vztahu

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{k-1}\frac{n-k+1}{k},$$

z něhož plyne

$$k.\binom{n}{k}=(k-1).\binom{n}{k-1}\frac{n-k+1}{k-1}.$$

Nyní vyšetříme, kdy je zlomek $\frac{n-k+1}{k-1}$ větší než 1, kdy se rovná číslu 1 a kdy je menší než toto číslo. Je-li n liché, pak z uvažovaných čísel dostaneme největší pro $k=\frac{n+1}{2}$. Je-li n sudé, pak největší dostaneme pro $k=\frac{n}{2}$ a $k=\frac{n+2}{2}$.

13. Tři.

14. Celkem $\binom{64}{3} - 8.\binom{8}{3}$ způsoby.

15. Vznikne $\binom{n}{4}$ průsečíků.

16. Celkem $\binom{20}{3}$ rovin. Vnitřkem prochází $\binom{20}{3} - 12$ rovin.

17. Celkem $\binom{m}{2}\cdot\binom{n}{2}$ čtyřstěnů.

18. a) $208+120\sqrt{3}$; b) $8-8i$.

19. Dvakrát použijte Bernoulliho nerovnost.

20. Lze počítat např. logaritmicky. Se čtyřmístnými tabulkami nemůžeme dosáhnout žádané přesnosti, proto použijeme tabulek pětimístných. Podle nich najdeme $0{,}43150 < \log e_{100} < 0{,}43250$ a proto $2{,}700 < e_{100} < 2{,}708$. Máme tedy zaručena dvě desetinná místa — totiž 2,70. Poznamenejme, že úlohu lze řešit též pomocí binomické věty.

21. Důkaz matematickou indukcí.

22. Čtyřmístné logaritmické tabulky a Stirlingův vzorec dávají $\log 300! \doteq 614{,}48$. Z toho lze soudit, že číslo 300! má v desítkové soustavě 615 míst.

23. Odpověď uvádí obr. 12.

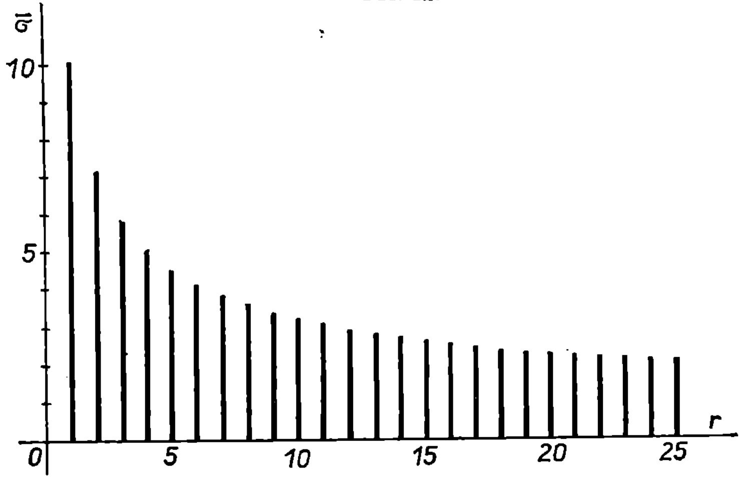
24. Všechny členy jsou čísla trojúhelníková.

25. Najdeme vyjádření $60=6.10$.

26. Úloze vyhovují např. všechna prvočísla větší než 3.

27. Najdeme $630=3.10.21=6.105$.

Obr. 12.



28. Je $3+2\sqrt{2}>1$, $0<3-2\sqrt{2}<1$. Proto je $(3+2\sqrt{2})^m <$ $<(3+2\sqrt{2})^n$ a současně $(3-2\sqrt{2})^m > (3-2\sqrt{2})^n$. Z toho již snadno plyne $a_m < a_n$.

29. Rovnice má nekonečně mnoho řešení, jak plyne např. ze vztahu

$$\binom{3k+1}{2}+\binom{4k+2}{2}=\binom{5k+2}{2},$$

který platí pro libovolné přirozené číslo k.

30. Je-li n dělitelné třemi, je hledaný počet $\frac{n}{6}(3n-7)$, v každém jiném případě máme $\frac{n}{2}(n-1)$ možností.

31. Celkem 125 způsoby.