

Faktoriály a kombinační čísla

Výsledky úloh

In: Jiří Sedláček (author): Faktoriály a kombinační čísla. (Czech).
Praha: Mladá fronta, 1964. pp. 82–84.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/403523>

Terms of use:

© Jiří Sedláček, 1964

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

VÝSLEDKY ÚLOH

1. Větší je číslo $500!.503!$.
2. a) Kdyby bylo $n!(n+3)! \leq (n+1)!(n+2)!$, pak by po zkrácení vyšlo $n+3 \leq n+1$ (spor).
b) Kdyby bylo $n!+(n+3)! \leq (n+1)!$, pak by vyšlo $n^3+5n^2+7n+4 \leq 0$ (spor).
3. Oba vzorce lze dokázat matematickou indukcí.
4. Je $7!.5!$ možností.
5. Je to možné $(n-1)!$ způsoby.
6. Nemůžeme.
7. Pro přirozené číslo $n > 2$ položíme $x=n$, $y=n-1$, $z=(n!)!-1$, $t=[(n!)!]!-1$. Pak je $u=[(n!)!]!$.
8. Vyhovuje jen $x=1$, $y=1$, $z=2$.
9. Nejmenší je $x=12$, jak se lze přesvědčit podle tabulek faktoriálů.
10. Nerovnost lze upravit na tvar $3n^2+15n-164 < 0$, čemuž vyhovují přirozená čísla $n \leq 5$.
11. Ekvivalentními úpravami se nerovnost převede na tvar $mn \geq 4$. Z toho je též patrné, že rovnost nastane jen pro $m=n=2$.
12. Vyjdeme ze vztahu

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \frac{n-k+1}{k},$$

z něhož plyne

$$k \cdot \binom{n}{k} = (k-1) \cdot \binom{n}{k-1} \frac{n-k+1}{k-1}.$$

Nyní vyšetříme, kdy je zlomek $\frac{n-k+1}{k-1}$ větší než 1, kdy se rovná číslu 1 a kdy je menší než toto číslo. Je-li n liché, pak z uvažovaných čísel dostaneme největší pro $k = \frac{n+1}{2}$.

Je-li n sudé, pak největší dostaneme pro $k = \frac{n}{2}$ a $k = \frac{n+2}{2}$.

13. Tři.

14. Celkem $\binom{64}{3} - 8 \cdot \binom{8}{3}$ způsoby.

15. Vznikne $\binom{n}{4}$ průsečíků.

16. Celkem $\binom{20}{3}$ rovin. Vnitřkem prochází $\binom{20}{3} - 12$ rovin.

17. Celkem $\binom{m}{2} \cdot \binom{n}{2}$ čtyřstěnů.

18. a) $208 + 120\sqrt{3}$; b) $8 - 8i$.

19. Dvakrát použijte Bernoulliho nerovnost.

20. Lze počítat např. logaritmičky. Se čtyřmístnými tabulkami nemůžeme dosáhnout žádané přesnosti, proto použijeme tabulek pětimístných. Podle nich najdeme $0,43150 < \log e_{100} < 0,43250$ a proto $2,700 < e_{100} < 2,708$. Máme tedy zaručena dvě desetinná místa — totiž 2,70. Poznamenejme, že úlohu lze řešit též pomocí binomické věty.

21. Důkaz matematickou indukcí.

22. Čtyřmístné logaritmické tabulky a Stirlingův vzorec dávají $\log 300! \doteq 614,48$. Z toho lze soudit, že číslo $300!$ má v desítkové soustavě 615 míst.

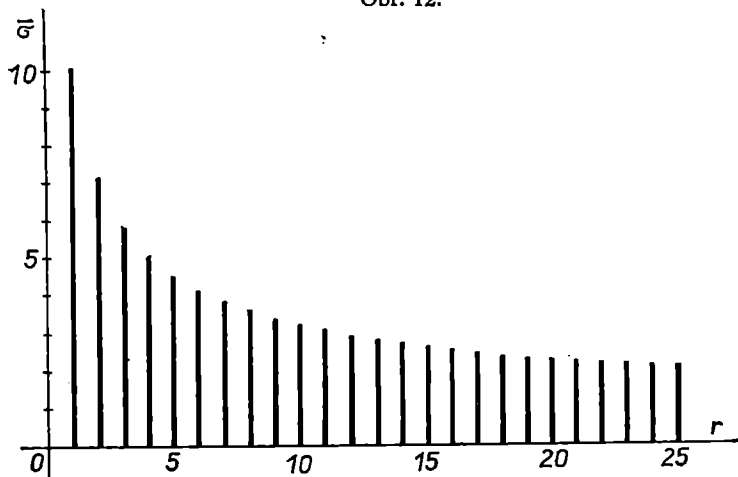
23. Odpověď uvádí obr. 12.

24. Všechny členy jsou čísla trojúhelníková.

25. Najdeme vyjádření $60 = 6 \cdot 10$.

26. Úloze vyhovují např. všechna prvočísla větší než 3.

27. Najdeme $630 = 3 \cdot 10 \cdot 21 = 6 \cdot 105$.



28. Je $3+2\sqrt{2} > 1$, $0 < 3-2\sqrt{2} < 1$. Proto je $(3+2\sqrt{2})^m < (3+2\sqrt{2})^n$ a současně $(3-2\sqrt{2})^m > (3-2\sqrt{2})^n$. Z toho již snadno plyne $a_m < a_n$.

29. Rovnice má nekonečně mnoho řešení, jak plyne např. ze vztahu

$$\binom{3k+1}{2} + \binom{4k+2}{2} = \binom{5k+2}{2},$$

který platí pro libovolné přirozené číslo k .

30. Je-li n dělitelné třemi, je hledaný počet $\frac{n}{6}(3n-7)$, v každém jiném případě máme $\frac{n}{2}(n-1)$ možností.

31. Celkem 125 způsobů.