Faktoriály a kombinační čísla

7. kapitola. Různé

In: Jiří Sedláček (author): Faktoriály a kombinační čísla. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1964. pp. 72–81.

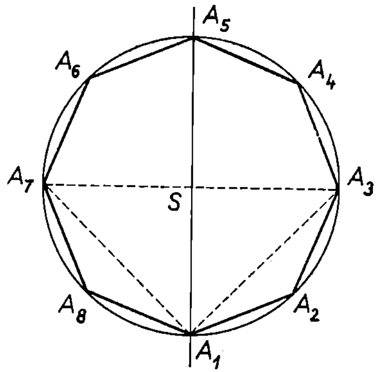
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403522

7. kapitola

RŮZNÉ

V závěru této knížky uvedeme několik příkladů s kombinatorickým námětem. Budou to otázky, kde se zase nevystačí jen s mechanickým použitím hotového vzorce, nýbrž bude třeba provést určitou matematickou úvahu. Náš první příklad je z planimetrie.

Příklad 42. V rovině je dán pravidelný n-úhelník $A_1A_2A_3\ldots A_n$ (kde n je sudé). Z n vrcholů A_1, A_2, A_3, …, A_n vyberte tři tak, aby tvořily vrcholy rovnoramenného trojúhelníka. Kolika způsoby je to možné?



Obr. 9.

Řešení. Odpovězme nejprve na otázku, kolik zde existuje rovnoramenných trojúhelníků s hlavním vrcholem v bodě A_1. Označme S střed kružnice opsané danému n-úhelníku a sestrojme přímku A_1S*). Z geometrie víme, že tato přímka prochází ještě jedním vrcholem našeho n-úhelníka (vrcholem, jehož index je $\frac{n}{2}+1$). Přímka A_1S rozděluje rovinu na dvě poloroviny; zvolme si z nich tu, která obsahuje uvnitř bod A_2. Uvnitř této poloroviny leží $\frac{1}{2}(n-2)$ vrcholů našeho n-úhelníka a číslo $\frac{1}{2}(n-2)$ znamená zřejmě i počet rovnoramenných trojúhelníků s hlavním vrcholem A_1. Mezi těmito trojúhelníky může ovšem existovat i trojúhelník rovnostranný, neboť i tento trojúhelník zahrnujeme pod pojem trojúhelníka rovnoramenného. Kdy může vzniknout rovnostranný trojúhelník? Zřejmě je to možné právě tehdy, je-li číslo n dělitelné třemi. Budeme tedy rozlišovat dva případy.

Je-li n dělitelné třemi, pak počet rovnoramenných trojúhelníků, jež nejsou rovnostranné a mají hlavní vrchol A_1, je

$$\frac{1}{2}(n-2)-1=\frac{1}{2}(n-4).$$

Stejný počet ovšem dostáváme, volíme-li za hlavní vrchol kterýkoli z dalších bodů $A_2, A_3, \ldots, A_n$. Součin

$$n.\frac{1}{2}(n-4)$$

udává tedy počet všech rovnoramenných trojúhelníků, jež nejsou rovnostranné. Počet rovnostranných trojúhelníků

*) Na obr. 9 jsme znázornili případ $n=8$. Zde je též tečkovaně narýsován jeden z rovnoramenných trojúhelníků, o nichž jedná příklad 42 (je to trojúhelník $A_1A_3A_7$).

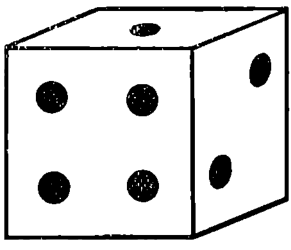
však určíme snadno — je totiž roven číslu $\frac{n}{3}$. Je-li n dělitelné třemi, máme tedy celkový výsledek

$$\frac{n}{2}(n-4)+\frac{n}{3}=\frac{n}{6}(3n-10).$$

Zbývá ještě případ, kdy n není dělitelné třemi. Pak nelze sestrojit žádný rovnostranný trojúhelník a číslo $\frac{n}{2}(n-2)$ znamená tedy hledaný počet rovnoramenných trojúhelníků.

Odpověď. Je-li n dělitelné třemi, pak hledaný počet rovnoramenných trojúhelníků je $\frac{n}{6}(3n-10)$; není-li n dělitelné třemi, je hledaný počet $\frac{n}{2}(n-2)$.

Jistě znáte kostku, kterou se hrají různé společenské hry (viz obr. 10). Každá stěna kostky je označena některým z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 tím, že je na ní uveden příslušný počet bodů (ok). V některých kombinatorických úlohách, jež vedou k počtu pravděpodobnosti, se vyskytují též otázky spojené s jednou nebo několika takovými hracími kostkami.



Obr. 10.

Uvedeme nejprve jednu velmi jednoduchou variantu takového příkladu.

Příklad 43. Máme dvě hrací kostky — červenou a modrou. Kolika způsoby můžeme při hodu těmito kostkami dosáhnout součtu 6?

Řešení. Součet 6 se může vyskytnout např. tak, že na červené kostce padne 1 a na modré 5. Uvědomte si, že tento případ musíme odlišovat od případu, kdy na červené máme 5 a na modré 1.

Celkem nám dá odpověď tato tabulka:

červená	1	2	3	4	5
modrá	5	4	3	2	1

Součet 6 může padnout pěti způsoby.

Po přípravné úvaze z předcházejícího příkladu se nyní obrátíme k otázce složitější.

Příklad 44. Máme tři hrací kostky — červenou, modrou a bílou. Při hodu těmito kostkami mohou padnout součty 3, 4, 5, ..., 17, 18. Vyšetřete, kolika způsoby lze každý z těchto součtů uskutečnit.

Řešení. Barva kostek nás zase upozorňuje na to, že je třeba dbát na pořadí, ve kterém uvažovaný součet padl.

Součet 3 můžeme uskutečnit jediným způsobem — na každé kostce padne 1. Součet 4 lze uskutečnit třemi způsoby — číslo 2 padne na jedné kostce a na ostatních dvou jsou jedničky. Postupujeme-li tímto způsobem dále, dostáváme počet možností pro každý z uvažovaných součtů.

Přehledně je výsledek takového vyšetřování patrný z této tabulky:

součet	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
počet způsobů	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

Bývá zvykem, že se taková tabulka znázorní i graficky. Na obr. 11 vidíme sloupkový diagram, který odpovídá naší úloze o třech hracích kostkách. Všimněte si, že je tento diagram „souměrný“ podle svislé přímky, kterou jsme v obr. 11 narýsovali čárkovaně.

Našli jsme tedy odpověď na otázku o třech hracích kostkách. Zůstaňme však ještě u této problematiky a ukažme si jiný způsob, kterým můžeme celý výpočet zformalizovat a tím si jej podstatně usnadnit. Uvažujme pomocný šestičlen

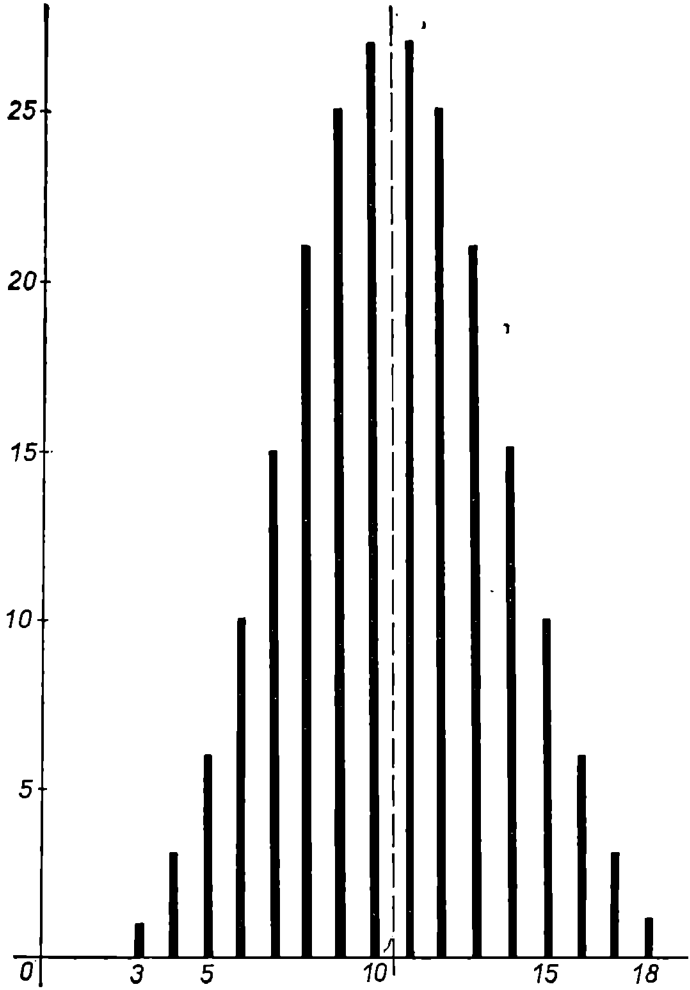
$$A = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$$

a vytvořme mocninu A^3. To je mnohočlen v proměnné x a má tvar

$$A^3 = s_3x^3 + s_4x^4 + s_5x^5 + \ldots + s_{17}x^{17} + s_{18}x^{18}.$$

Jakou úlohu zde mají koeficienty $s_3, s_4, s_5, \ldots, s_{17}, s_{18}$? Odpovězme příkladem. Napíšeme-li A^3 jako součin $A.A.A$, pak např. koeficient s_6 dostaneme takto: Mocninu x^6 lze vytvořit tak, že v prvním činiteli A vybereme vhodný člen x^a, v druhém A člen x^b a ve třetím A člen x^c tak, že $a + b + c = 6$. Číslo s_6 tedy určuje počet všech způsobů, jimiž tento výběr můžeme provést. Představíme-li si nyní, že první činitel A odpovídá kostce červené, druhý modré a třetí bílé, plyne odtud okamžitě, že s_6 značí počet způsobů, jimiž na našich třech kostkách lze vytvořit součet 6.

Nyní k technickému použití právě popsané skutečnosti. Abychom určili všechna čísla s_i, zabývejme se čistě aritme-



Obr. 11.

tickou úlohou — totiž umocňováním našeho šestičlenu na třetí. Platí

$$A^3=[(x+x^2+x^3)+x^3(x+x^2+x^3)]^3=$$

$$=(x+x^2+x^3)^3(1+x^3)^3=$$

$$=[x^3+3x^2(x^2+x^3)+3x(x^2+x^3)^2+(x^2+x^3)^3](1+x^3)^3=$$

$$=(x^3+3x^4+3x^5+3x^5+6x^6+3x^7+x^6+3x^7+3x^8+$$

$$+x^9)(1+x^3)^3=$$

$$=(x^3+3x^4+6x^5+7x^6+6x^7+3x^8+x^9)(1+3x^3+$$

$$+3x^6+x^9)=$$

$$=x^3+3x^4+6x^5+10x^6+15x^7+21x^8+25x^9+27x^{10}+$$

$$+27x^{11}+25x^{12}+21x^{13}+15x^{14}+10x^{15}+6x^{16}+3x^{17}+x^{18}.$$

Je vidět, že koeficienty získaného mnohočlenu jsou skutečně čísla, která jsou nám už známa z předcházejícího řešení úlohy o třech hracích kostkách.

Do kombinatorické analýzy bývají často zahrnovány i poučky o tzv. latinských čtvercích. Je to problematika, která svým původem vlastně patří do matematiky rekreační a byla studována již mnoha autory. *Latinský čtverec* je čtvercové schéma (tvaru šachovnice z n^2 polí), přičemž na každé pole tohoto schématu je napsáno jedno z přirozených čísel 1, 2, 3, ... n. Přitom ani v žádném řádku ani v žádném sloupci se nesmí žádné číslo vyskytovat více než jedenkrát. Pro $n = 5$ zde uvádíme tento příklad latinského čtverce:*)

*) Uvědomte si, že v jednotlivých řádcích latinského čtverce jsou napsány některé permutace čísel 1, 2, 3, 4, 5.

1	2	3	4	5
2	1	4	5	3
3	4	5	1	2
4	5	2	3	1
5	3	1	2	4

Latinské čtverce sice svým původem patří do matematiky rekreační, avšak v dnešní době hrají velmi důležitou roli v matematické statistice, v tzv. plánování čili uspořádávání pokusů. Představme si např., že na pokusném poli, jež má 5 × 5 dílců podobně jako v našem schématu latinského čtverce, chceme pěstovat 5 odrůd určité plodiny (nebo při určité plodině vyzkoušet 5 druhů hnojení apod.), abychom zjistili jejich výnosnost. Odrůdy prostě označme čísly 1, 2, 3, 4, 5. Každou odrůdu máme vyzkoušet na stejném počtu dílců, tj. v našem případě na 5 dílcích. Kdybychom nyní třeba všechny dílce s odrůdou 1 umístili v levém horním rohu schématu a dostali třeba podstatně vyšší nebo nižší výnos, nevěděli bychom potom, zdali tento výsledek byl skutečně způsoben kvalitou odrůdy nebo pouze tím, že v této oblasti pokusného pole půda má odlišnou kvalitu nebo odlišnou vlhkost apod. Abychom tedy co možno vyloučili vliv nestejnorodosti půdy, musíme dílce s každou odrůdou „rozptýlit“ po celém poli. To právě lze učinit schématem latinského čtverce tak, že odrůdu 1 umístíme na dílcích označených číslem 1 v latinském čtverci atd.

Jedním latinským čtvercem se budeme ještě zabývat v dalším příkladě.

Příklad 45. Je dáno čtvercové schéma se 16 poli:

		3	
4			
	1		
			2

Zde jsou čtyři pole obsazena čísly, ostatní jsou volná. Napište do volných okének čísla 1, 2, 3, 4 tak, aby vznikl latinský čtverec.

Řešení. Všimněme si levého horního pole v daném schématu. Zde nemůže stát číslo 3 (neboť tím již je první řádek obsazen) ani číslo 4 (tím je obsazen první sloupec). Přicházejí tedy v úvahu čísla 1 a 2.

Napišme sem tedy číslo 1. Na konci prvního řádku přichází tedy v úvahu jen číslo 4 a tím dostává první řádek tvar 1, 2, 3, 4. Podobně první sloupec končí nutně číslem 3 a má tedy (ve směru shora dolů) tvar 1, 4, 2, 3. Dále si všimneme třeba sloupce posledního, kde nám zatím chybí dva údaje; zřejmě tento sloupec musí mít tvar 4, 1, 3, 2. Podobně lze postupovat ještě v dalších případech; dostáváme tak posléze tento latinský čtverec:

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

Zbývá ještě probrat případ, kdy v levém horním rohu našeho schématu je číslo 2. Pak snadno najdeme třeba pro první řádek jedinou možnost 2, 4, 3, 1 a pro první sloupec rovněž 2, 4, 3, 1. I další konstrukce jsou zde jednoznačné a vedou k tomuto latinskému čtverci:

2	4	3	1
4	2	1	3
3	1	2	4
1	3	4	2

Je vidět, že daným podmínkám odpovídají dva latinské čtverce.

Úlohy

30. V rovině je dán pravidelný n-úhelník $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ (kde n je liché). Z n vrcholů $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ vyberte tři tak, aby tvořily vrcholy rovnoramenného trojúhelníka. Kolika způsoby je to možné?

31. Kolika způsoby lze hodit čtyřmi kostkami součet 12?