2. kapitola

KOMBINAČNÍ ČÍSLO

Připomeňme si nejprve definici známou ze školy. Jsou dána dvě přirozená čísla k, n, přičemž $k \leqq n$. Potom klademe

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!.(n-k)!},$$

což lze pro $k > 1$ vyjádřit též ve tvaru

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ \dots\ (n-k+1)}{1.2.3.\ \dots\ k}$$

a pro $k=1$ ve tvaru $\binom{n}{1} = \frac{n}{1} = n.$

Číslo $\binom{n}{k}$ čteme „n nad k" a nazýváme *kombinační číslo* neboli *binomický koeficient*. Definice kombinačního čísla se rozšiřuje i pro $k=0$ a klade se

$$\binom{n}{0} = 1$$

pro každé přirozené číslo n. Dalším rozšířením je

$$\binom{0}{0} = 1.$$

Kombinační číslo se někdy definuje i pro ta přirozená čísla k, n, pro něž platí $k > n$. Potom klademe

$$\binom{n}{k} = 0.$$

V několika příkladech si všimneme aritmetických vlastností kombinačních čísel.

Budeme zde pracovat se dvěma vzorci, které jsme si odvozovali ve škole. Jsou to vzorce

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1},$$

které platí pro libovolná dvě celá čísla k, n, splňující vztah $0 \leqq k \leqq n$.

Příklad 10. Jsou dána kombinační čísla $\binom{500}{490}$ a $\binom{499}{9}$. Rozhodněte, které z nich je větší.

Řešení. Nejprve upravíme první kombinační číslo. Platí

$$\binom{500}{490}=\binom{500}{500-10}=\binom{500}{10}=\frac{500 \,.\, 499 \,.\, \ldots \,.\, 491}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \ldots \,.\, 10}.$$

Pro druhé kombinační číslo máme

$$\binom{499}{9}=\frac{499 \,.\, 498 \,.\, \ldots \,.\, 491}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \ldots \,.\, 9}.$$

Platí

$$\binom{500}{10}=\frac{500}{10} \,.\, \binom{499}{9}=50 \,.\, \binom{499}{9},$$

takže číslo $\binom{500}{10}$ je padesátkrát větší než číslo $\binom{499}{9}$.

Odpověď: Číslo $\binom{500}{490}$ je větší než číslo $\binom{499}{9}$.

Příklad 11. Jsou dána dvě přirozená čísla m, n. Dokažte, že platí

$$\binom{m+n}{3}-\binom{m}{3}-\binom{n}{3}=\binom{m}{2} \,.\, n+\binom{n}{2} \,.\, m \,. \qquad (1)$$

Řešení. Vyjdeme z definice kombinačního čísla a budeme nejprve upravovat levou stranu vzorce (1). Abychom nemuseli pracovat se zápisy, ve kterých se vyskytují zlomky, vypočteme nejprve

$$6\,.\binom{m+n}{3}=(m+n)(m+n-1)(m+n-2)=$$

$$=m^3+3m^2n+3mn^2+n^3-3m^2-6mn-3n^2+2m+2n;$$

podobně je

$$6\,.\binom{m}{3}=m^3-3m^2+2m,$$

$$6\,.\binom{n}{3}=n^3-3n^2+2n.$$

Pro úpravu levé strany vzorce (1) vypočteme tedy

$$6\,.\binom{m+n}{3}-6\,.\binom{m}{3}-6\,.\binom{n}{3}=3m^2n+3mn^2-6mn,$$

takže levá strana rovnosti (1) je $\frac{1}{2}mn(m+n-2)$. Na tento tvar však snadno převedeme i pravou stranu vzorce (1) a tím je jeho platnost prokázána.

Poznamenejme, že se ke vzorci (1) ještě vrátíme později. Uvidíme, že nám tento vzorec vyplyne jako snadný důsledek jedné geometrické úvahy. Nyní se však zabývejme ještě dalšími příklady o kombinačních číslech.

Příklad 12. Je dáno přirozené číslo r; položme $s=\binom{r}{2}$. Dokažte, že platí

$$\binom{s}{2}=3\,.\binom{r+1}{4}.$$

Řešení. Upravujeme kombinační číslo

$$\binom{s}{2}=\frac{1}{2}s(s-1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{r(r-1)}{2}\cdot\frac{r(r-1)-2}{2}.$$

V posledním čitateli lze psát*)

$$r(r-1)-2=r^2-r-2=(r+1)(r-2).$$

Platí tedy

$$\binom{s}{2}=\frac{(r+1)r(r-1)(r-2)}{2.2.2}=3\cdot\binom{r+1}{4},$$

což jsme měli dokázat.

Příklad 13. Určete přirozené číslo n tak, aby platilo

$$\binom{n}{3}+\binom{n+2}{3}+\binom{n+4}{3}=\frac{n^3}{2}+88.$$

Řešení. Podle definice kombinačního čísla upravíme nejprve levou stranu dané rovnice. Dostáváme

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+\frac{(n+2)(n+1)n}{6}+\frac{(n+4)(n+3)(n+2)}{6},$$

což po malé úpravě dává

$$\frac{1}{2}(n^3+3n^2+10n+8).$$

Daná rovnice se tím převede na tvar

$$\frac{1}{2}(n^3+3n^2+10n+8)=\frac{n^3}{2}+88,$$

což po úpravě vede na kvadratickou rovnici

$$3n^2+10n-168=0.$$

Snadný výpočet ukazuje, že kořeny této rovnice jsou

*) Při úpravě lze použít pomocné kvadratické rovnice $r^2-r-2=0$, která má kořeny $r=-1$, $r=2$.

$$n=6, \quad n=-\frac{28}{3}.$$

Výsledek $n=6$ vyhovuje zřejmě podmínkám naší úlohy, zatímco druhý kořen rovnice není číslo přirozené, a proto nemůže být ani řešením naší úlohy.

Odpověď. Hledané přirozené číslo je $n=6$.

Další příklad souvisí s teorií čísel. Je zajímavý sám o sobě, ale zařadili jsme jej sem proto, že jej budeme ještě potřebovat v dalších úvahách jako pomocnou větu.

Příklad 14. Je dáno prvočíslo p. Dokažte, že každé z kombinačních čísel

$$\binom{p}{1}, \binom{p}{2}, \binom{p}{3}, \ldots, \binom{p}{p-1}$$

je dělitelné číslem p.

Řešení. Uvažujme kombinační číslo $\binom{p}{k}$, kde $1 \leqq k \leqq p-1$. Napišme je jako zlomek

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)}{1.2.3.\ldots.k}.$$

Ve jmenovateli se nevyskytuje činitel p, takže jmenovatel tohoto zlomku není dělitelný prvočíslem p. Čitatel je ovšem tímto prvočíslem dělitelný a z toho již plyne tvrzení, které jsme měli dokázat.

V dalším příkladě budeme potřebovat matematickou indukci.

Příklad 15. Jsou dána dvě přirozená čísla k, n. Dokažte, že platí

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\binom{k+3}{k}+\ldots+\binom{k+n}{k}=\binom{k+n+1}{k+1}.$$

Řešení. Budeme postupovat matematickou indukcí podle n. V celé úvaze budeme předpokládat, že přirozené číslo k je libovolně pevně dané. Pro $n=1$ máme vztah

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}=\binom{k+2}{k+1},$$

o jehož platnosti se můžeme přesvědčit velmi snadno. Předpokládejme tedy, že pro některé přirozené číslo n náš vztah platí a budeme dokazovat obdobný vztah pro číslo $n+1$. V tomto novém vztahu se levá strana liší od původního vzorce jen tím, že zde máme na konci ještě kombinační číslo $\binom{k+n+1}{k}$ jako poslední sčítanec. Podle indukčního předpokladu lze tedy levou stranu vyjádřit ve tvaru

$$\binom{k+n+1}{k+1}+\binom{k+n+1}{k},$$

což podle známého vzorce dává $\binom{k+n+2}{k+1}$. To však je stejný výsledek, jaký bychom dostali, kdybychom do pravé strany dokazovaného vzorce dosadili $n+1$ místo n. Tím je i druhý indukční krok proveden a platnost vzorce dokázána.

Ze školy si pamatujeme, že se kombinační čísla dají snadno vypočítat pomocí tzv. *Pascalova**) *trojúhelníka*. Tímto názvem označujeme tabulku trojúhelníkového tvaru

*) *Blaise Pascal* (1623—1662) je znám nejen jako matematik, ale vynikl i ve fyzice a ve filosofii.

$n=0$	1
$n=1$	1 1
$n=2$	1 2 1
$n=3$	1 3 3 1
$n=4$	1 4 6 4 1
$n=5$	1 5 10 10 5 1
$n=6$	1 6 15 20 15 6 1

....

Každý řádek zde obsahuje všechna kombinační čísla pro totéž n. Podle známého vzorce dostaneme sečtením dvou sousedních kombinačních čísel některého řádku to kombinační číslo, jež stojí v dalším řádku pod mezerou mezi nimi. Pascalův trojúhelník tak může sloužit k dosti rychlému a celkem jednoduchému výpočtu kombinačních čísel.

Příklad 16. Určete počet sudých čísel, která se vyskytují ve 13. řádku Pascalova trojúhelníka (tedy pro $n=12$).

Řešení. Okamžitě nás napadne, že můžeme prostě spočítat všech 13 řádek Pascalova trojúhelníka a dát pak odpověď na otázku, která byla položena v našem příkladě. To je ovšem postup dosti zdlouhavý a mohli bychom se ostatně při počítání dopustit i numerické chyby. Zamyslíme-li se však na okamžik nad danou otázkou, vidíme, že se zde nezajímáme o velikost binomických koeficientů, nýbrž jen o to, zda jsou to čísla sudá nebo lichá. Označíme-li liché číslo l a sudé s, můžeme napsat tyto schematické rovnice:*)

$$l+l=s; \quad l+s=s+l=l, \quad s+s=s. \tag{1}$$

*) Zápisu $l+l=s$ rozumějte tak, že součet dvou lichých čísel je vždy sudý. Analogický význam mají i další zápisy.

Z písmen *l*, *s* můžeme nyní sestavit „Pascalův" trojúhelník podle stejných zásad, na jaké jsme zvyklí ze školy. Dostáváme tak schema

```
                        l
                       l l
                      l s l
                     l l l l
                    l s s s l
                   l l s s l l
                  l s l s l s l
                 l l l l l l l l
                l s s s s s s s l
               l l s s s s s s l l
              l s l s s s s s l s l
             l l l l s s s s l l l l
            l s s s l s s s l s s s l
            . . . . . . . . . . . . .
```

Odpověď. Ve 13. řádku Pascalova trojúhelníka je právě 9 sudých čísel.

V probraném příkladě jsme tedy postupovali tak, aby vynaložená námaha byla přiměřená tomu, čeho chceme dosáhnout. To ostatně je v matematice (a zejména v matematice středoškolské) jev celkem všeobecný: Z postupů, které se nám nabízejí při řešení některé úlohy, si volíme vždycky tu cestu, která je nejschůdnější a nejjednodušší.

Pro úplnost poznamenejme k příkladu 16, že jednoduchou odpověď lze najít také tak, že použijeme vhodných matematických tabulek. Tak např. ve Valouchových „Pětimístných tabulkách logaritmických" najdeme binomické koeficienty $\binom{n}{k}$ až do $n = 10$. Z tabulek tedy můžeme pro náš příklad vybrat přímo 11. řádek „Pascalova" trojúhelníka ve tvaru $l, s, l, s, s, s, s, s, l, s, l$ a pokračovat pak jen v sestrojení dalších dvou řádků.

Čtenáře možná bude zajímat samo počítání s písmeny l, s, pro něž jsme definovali sčítání rovnicemi (1). Setkali jsme se tu totiž s velmi jednoduchým příkladem abstraktního pojmu, který se studuje v moderní algebře, s tzv. Abelovou grupou. Čtenáře, který by se chtěl s pojmem grupy seznámit podrobněji, odkazujeme např. na starší, ale velmi pěknou knížku L. Riegra „O grupách a svazech", Praha 1952.

Úlohy

10. Pro která přirozená čísla n platí nerovnost

$$\binom{n}{2}+\binom{n+3}{2}+\binom{n+6}{2}<100.$$

11. Jsou dána dvě přirozená čísla m, n, jež jsou obě větší než 1. Dokažte, že platí

$$\binom{m+n}{2}\geqq\binom{m}{2}+\binom{n}{2}+4.$$

Kdy nastane rovnost?

12. Je dáno přirozené číslo n. Uvažujte n čísel tvaru

$$1.\binom{n}{1},\quad 2.\binom{n}{2},\quad 3.\binom{n}{3},\ \ldots,\ (n-1).\binom{n}{n-1},\quad n.\binom{n}{n};$$

rozhodněte, které z těchto čísel je největší.

13. Určete, kolik je v 15. řádku Pascalova trojúhelníka čísel dělitelných třemi.