Konvexní útvary

Kapitola 4. Opěrné roviny konvexního útvaru v prostoru

In: Jan Vyšín (author): Konvexní útvary. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1964. pp. 49–55.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403505

Kapitola 4.

OPĚRNÉ ROVINY KONVEXNÍHO ÚTVARU V PROSTORU

Pojmy z kapitoly 3 lze přenést s příslušnými obměnami z roviny do prostoru. Místo opěrné přímky tu bude opěrná rovina, místo opěrné poloroviny opěrný poloprostor, místo dvojrozměrného útvaru útvar trojrozměrný.

Úloha 35. Vyslovte definice opěrné roviny, opěrného poloprostoru a trojrozměrného útvaru. Uveďte příklady všech těchto tří pojmů.

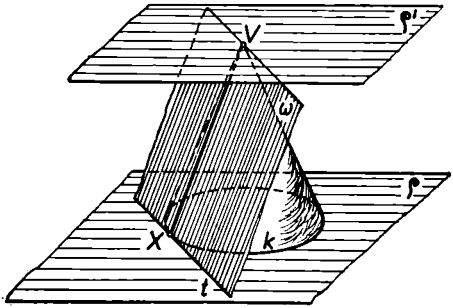
Není překvapující, že i v prostoru platí věty obdobné větám IV, IV′, V. Tyto věty (které nebudeme dokazovat) znějí:

VI. *Nechť je* U *útvar v prostoru, σ libovolná rovina. Pak existují nejvýše dvě opěrné roviny útvaru* U, *rovnoběžné s rovinou σ.*

VI′. *Nechť je* U *omezený trojrozměrný útvar, σ libovolná rovina. Pak existují právě dvě (různé) opěrné roviny útvaru* U, *rovnoběžné s rovinou σ.*

Právě tak jako v rovině lze zavést i v prostoru pojem průměru a šířky.

Úloha 36. Vyslovte definice průměru a šířky omezeného trojrozměrného útvaru. Najděte průměr a šířku čtyřstěnu a krychle. [Průměr čtyřstěnu je délka jeho nejdelší hrany, jeho šířka je velikost jeho nejmenší výšky anebo nejmenší vzdálenost dvou jeho protějších hran. Průměr krychle je délka její tělesové úhlopříčky, její šířka je délka hrany.]



Obr. 26

Jako v rovině platí i v prostoru věta obdobná větě V:

VII. *Je-li vzdálenost dvou rovnoběžných opěrných rovin ω_1, ω_2 rovna průměru útvaru* U, *pak v každé z těchto rovin leží jediný hraniční bod a spojnice těchto dvou hraničních bodů je kolmá k rovinám ω_1, ω_2.*

Příklad 15. Je dán rotační kužel, jehož výška je v a jehož podstava má poloměr r. Máme určit všecky opěrné roviny kužele a určit jeho průměr.

Řešení. a) Každá opěrná rovina ω, která obsahuje vnitřní bod strany VX daného kužele, obsahuje celou stranu VX, neboť jinak by oddělovala body V, X a nebyla by opěrná (obr. 26). Rovinu ϱ podstavy kužele protne rovina ω v přímce t, která prochází bodem X; podstava kužele i její obvod — kružnice k — leží v téže polorovině vyťaté přímkou t. Proto je t tečna kružnice k v bodě X a rovina ω je tečná rovina kužele podél strany VX (obr. 26).

b) Jestliže opěrná rovina ω neobsahuje jiné hraniční body kužele než body podstavy, pak je to buď rovina ϱ podstavy, nebo obsahuje jediný bod X kružnice k; pak je to rovina procházející příslušnou tečnou t (různá od rovin tV, ϱ), která nemá s kuželem mimo X žádný společný bod. Vyložte podrobně!

c) Zbývají ještě ty opěrné roviny, které neobsahují jiný hraniční bod mimo vrchol V. Sem patří jednak vrcholová rovina ϱ' rovnoběžná s rovinou ϱ, jednak ty vrcholové roviny, které protínají rovinu ϱ v přímce, která nemá s kružnicí k žádný společný bod.

Odůvodněte, že jsou tím vyčerpány všecky opěrné roviny kužele.

Jsou-li ω_1, ω_2 dvě rovnoběžné opěrné roviny kužele, pak je to buď dvojice ϱ, ϱ', nebo opěrné roviny ω_1, ω_2 protínají rovinu ϱ ve dvou rovnoběžkách o_1, o_2; aspoň jedna z přímek o_1, o_2 je pak tečnou kružnice k (proč?).

Jsou tedy tři možnosti:

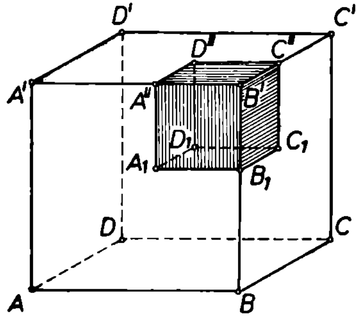
1. Jedna z rovin ω_1, ω_2 je typu a), druhá typu b);
2. jedna z rovin ω_1, ω_2 je typu b), druhá typu c);
3. obě roviny ω_1, ω_2 jsou typu b).

Pro určení průměru kužele užijeme věty VII. Podle této věty je vyloučen případ dvojice ϱ, ϱ' a případ 1 (proč?). V případě 2 musí být obě roviny ω_1, ω_2 kolmé k jedné straně kužele a průměr je roven délce této strany, tj. číslu $\sqrt{r^2 + v^2}$. V případě 3 musí být obě roviny ω_1, ω_2 kolmé k rovině ϱ a průměr je pak $2r$.

Je tedy třeba porovnat čísla $\sqrt{r^2 + v^2}$, $2r$. Je-li $2r \geqq \sqrt{r^2 + v^2}$, je $4r^2 \geqq r^2 + v^2$, tj. $v \leqq r\sqrt{3}$, a obráceně.

Závěr. Průměr kužele je roven průměru podstavy jen tehdy, je-li $v \leqq r\sqrt{3}$; jinak je průměr kužele roven délce jeho strany.

Úloha 37.* Určete šířku rotačního kužele z příkladu 15. (Je třeba opět provést diskusi vzhledem k číslům r, v).



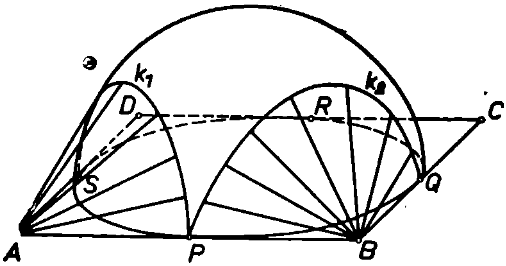
Obr. 27

Úloha 38.* Útvar U se skládá z rotačního kužele a polokoule (vně kužele) omezené kruhem, který je podstavou kužele. Určete všecky opěrné roviny tělesa, jeho průměr a šířku.

Další pojem, který lze přenést z roviny do prostoru, je pojem konvexního obalu.

Úloha 39. Vyslovte definici konvexního obalu trojrozměrného útvaru (pomocí opěrných poloprostorů). Jako příklad udejte konvexní obal nekonvexního tělesa U, které vznikne z krychle $ABCDA'B'C'D'$ oddělením krychle $A_1B_1C_1D_1A''B'C''D''$ (viz obr. 27).

Úloha 40.*V rovině ϱ je dán půlkruh K_1 o průměru AB, v rovině σ různoběžné s ϱ je dán půlkruh K_2 o průměru AB. Určete konvexní obal útvaru U složeného z obou obrazců. Určete průměr a šířku útvaru U.

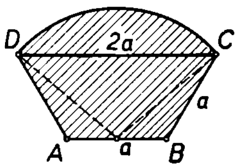


Obr. 28

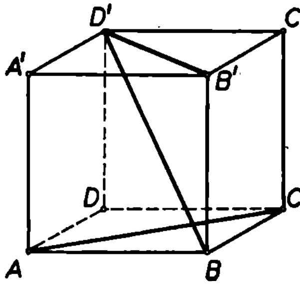
Příklad 16. Útvar U se skládá z čtverce $ABCD$ a polokoule, omezené kruhem vepsaným čtverci $ABCD$. Máme vyšetřit konvexní obal a průměr útvaru U.

Řešení (obr. 28). a) Pro rozřešení úlohy je třeba prozkoumat opěrné roviny útvaru U. Daná polokoule je omezena kruhem a jistým hlavním vrchlíkem V kulové plochy K. Vyšetříme, které tečné roviny kulové plochy K jsou opěrnými rovinami útvaru U. Jsou to takové tečné roviny kulové plochy K, jejichž dotykové body náležejí vrchlíku V a jimiž vyťaté poloprostory obsahují nejen danou polokouli, ale i čtverec $ABCD$. Dostaneme je takto: Vedeme z bodů A, B, C, D tečny ke kulové ploše K, ovšem jen ty, které se dotýkají v bodech vrchlíku V. Dotykové body těchto tečen vyplní čtyři shodné polokružnice k_1, k_2, k_3, k_4 (z nich dvě k_1 a k_2 jsou zakresleny na obr. 28). Tyto čtyři kružnice mají po dvou společné body — jsou to středy

P, Q, R, S stran AB, BC, CD, DA; vysvětlete proč. Z vrchlíku V vynecháme ty body, jež leží uvnitř kuželových ploch tečen, vedených z bodů A, B, C, D ke kulové ploše K. Zbude jistá část V′ hlavního vrchlíku V, omezená polokružnicemi k_1, k_2, k_3, k_4 (které k V′ patří). Z tečných rovin plochy K patří mezi opěrné roviny útvaru U právě všecky ty roviny, které se dotýkají v bodech útvaru V′.



Obr. 29



Obr. 30

Dále patří mezi opěrné roviny útvaru U všecky roviny procházející vrcholy A, B, C, D, které nemají s danou polokoulí žádný společný bod. Konečně patří k opěrným rovinám útvaru U i rovina čtverce $ABCD$.

Jiné opěrné roviny nejsou; odůvodněte to. Zejména dokažte, že žádným hraničním bodem útvaru U, který náleží vrchlíku V, ale nikoli útvaru V′, neprochází žádná opěrná rovina.

b) Z předchozí úvahy snadno odvodíme, co je průnikem $\overline{U}$ všech opěrných poloprostorů útvaru U; je to daný útvar U, doplněný „polokuželi“ s vrcholy A, B, C, D a řídícími „polokružnicemi“ k_1, k_2, k_3, k_4. Tento útvar $\overline{U}$ je konvexní obal útvaru U.

c) K určení průměru útvaru U je třeba podle věty VII najít takové dva hraniční body, jejichž spojnice je kolmá k opěrným rovinám, které jimi procházejí. Takové dvojice hraničních bodů jsou dvojice bodů ležících uvnitř protějších stran čtverce $ABCD$; ty však nepřicházejí podle věty VII v úvahu, neboť příslušné opěrné roviny obsahují více než jeden hraniční bod. Z téhož důvodu nepřichází v úvahu dvojice složená z roviny ABC a z tečné roviny kulové plochy K, která je s ní rovnoběžná. Zbývají tedy jen dvojice bodů A, C a B, D a opěrné roviny kolmé k úhlopříčkám čtverce $ABCD$. Průměr útvaru U (i jeho konvexního obalu $\overline{\mathrm{U}}$) je proto délka úhlopříčky čtverce $ABCD$.

Úloha 41. Těleso T je složeno z komolého kužele, který vznikne rotací rovnoramenného lichoběžníka $ABCD$ kolem osy jeho základny AB, a z kulové úseče, která je omezena kruhem o průměru CD a je uťata z koule, jejíž střed je středem základny AB (osový řez je na obr. 29). Zjistěte, zda těleso propadne štěrbinou tvaru rovinného pásu, která má danou šířku d. Je dáno: $AB = BC = \frac{1}{2}\,CD = a$. Je těleso T konvexní?

Úloha 42.* a) Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$. Zjistěte konvexní obal útvaru složeného z úseček AC, BD', $B'D'$ (obr. 30).

b) Zjistěte konvexní obal útvaru složeného ze čtyř (různých) bodů, které neleží v rovině.