O rovnicích s parametry

1. kapitola. Lineární rovnice o jedné neznámé

In: Jiří Váňa (author): O rovnicích s parametry. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1964. pp. 7–20.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403494

1. kapitola

LINEÁRNÍ ROVNICE O JEDNÉ NEZNÁMÉ

●

V této kapitole se budeme zabývat úlohami, které budou vyjádřeny lineárními rovnicemi o jedné neznámé s jedním parametrem. Poznamenejme na začátku, že o parametrech v rovnici hovoříme tehdy, obsahuje-li rovnice kromě neznámé x ještě proměnnou, kterou budeme obvykle označovat písmenem a nebo b; té budeme říkat *parametr.*

Úloha 1. V oboru přirozených čísel x řešte rovnici

$$2ax = (a + 1)\, x + 18, \tag{1}$$

kde a je přirozené číslo.

Předpokládejme, že rovnice (1) má řešení. Potom pro každé x, které rovnici (1) splňuje, musí platit též rovnice

$$(a - 1)\, x = 18. \tag{2}$$

Nyní musíme rozbor štěpit ve dva případy. Je-li $a - 1 \neq 0$, je každé číslo x, které může být řešením rovnice (1), nutně dáno vzorcem

$$x = \frac{18}{a - 1}. \tag{2a}$$

Je-li $a - 1 = 0$, pak nemá rovnice (2), a tedy ani rovnice (1) zřejmě žádné řešení.

Protože každé řešení rovnice (1) musí být vyjádřeno vzorcem (2a) a protože hledáme pouze přirozená čísla x, musí být číslo $a - 1$ dělitelem čísla 18.

Výsledek můžeme shrnout do tabulky:

Parametr a	Příslušné řešení
$a = 2$	$x = 18$
$a = 3$	$x = 9$
$a = 4$	$x = 6$
$a = 7$	$x = 3$
$a = 10$	$x = 2$
$a = 19$	$x = 1$

Pro jiné hodnoty parametru a nemá úloha řešení.

Úloha 2. V oboru reálných čísel x řešte rovnici

$$a(x - 1) = x + a, \tag{3}$$

kde a je reálné číslo.

Každé reálné číslo x, které vyhovuje rovnici (3), vyhovuje též rovnici

$$x(a - 1) = 2a, \tag{4}$$

která vznikne z rovnice (3) snadnými úpravami, při nichž nezáleží na hodnotě parametru a. Podobně jako v úloze 1 provádíme rozbor souhrnně, tj. řešíme vlastně najednou nekonečně mnoho úloh. Pomocí rovnice (4) nalezneme řešení rovnice (3). Rozbor ovšem musíme štěpit ve dva případy:

Je-li $a - 1 \neq 0$, je reálné řešení rovnice (3) dáno vzorcem

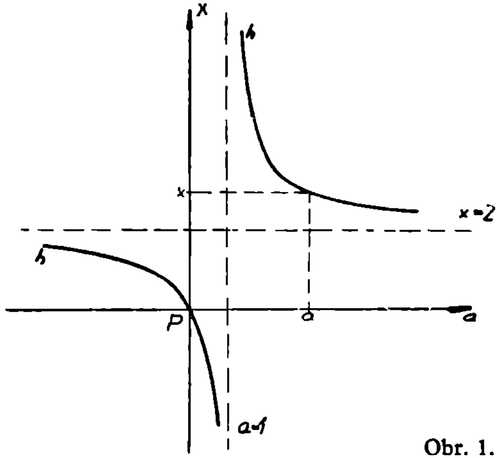
$$x = \frac{2a}{a - 1}. \tag{4a}$$

Je-li $a - 1 = 0$, tj. $a = 1$, má rovnice (3) tvar $x - 1 = x + 1$ a nevyhovuje jí žádné reálné číslo x. Zkoušku provedeme dosazením x z formule (4a) do rovnice (3). Na základě rozboru a zkoušky provedeme diskusi a výsledek shrneme do přehledné tabulky:

Parametr a	Počet řešení
$a = 1$	žádné
$a \neq 1$	jedno, viz (4a)

Všimněme si, že pro $a \neq 1$ je řešení rovnice (3) dáno formulí (4a). Řešení x rovnice (3) je funkcí parametru a. Sestrojíme graf této funkce pomocí jednotlivých funkčních hodnot (obr. 1). Upravíme-li rovnici (3) na tvar $(x - 2)(a - 1) = 2$, zjistíme, že je v pravoúhlých souřadnicích a, x početním vyjádřením rovnoosé hyperboly h; asymptotami jsou přímky o početním vyjádření $x = 2, a = 1$.

Každému reálnému číslu $a \neq 1$ odpovídá jediný bod $[a, x]$ hyperboly h; z předchozí diskuse víme, že rovnice (3) má skutečně pro každé $a \neq 1$ jediné řešení x. Asymptota o rovnici $a = 1$ neprotne hyperbolu h v žádném bodě; rovnice (3) — jak víme z předchozího výkladu — nemá pro $a = 1$ žádné řešení.



Obr. 1.

Každá přímka rovnoběžná s osou a, vyjma přímku o rovnici $x = 2$, protne hyperbolu h v jediném bodě; to znamená, že každé reálné číslo $x \neq 2$ je kořenem rovnice (3) při vhodně zvoleném parametru a. Číslo $x = 2$ není kořenem rovnice (3) pro žádné a; přesvědčte se.

Jednu nebo více neznámých funkcí nalezneme při řešení mnoha dalších rovnic s parametrem; nezávisle proměnnou bude parametr rovnice. Je samozřejmé, že jednotlivé funkce budou podstatně záviset na tom, jakých číselných hodnot může nabývat parametr a a do jakého číselného oboru má náležet řešení rovnice. Předpokládáme-li např., že v rovnici (3) je parametr a přirozené číslo, a chceme-li, aby též řešení této rovnice náleželo do oboru přirozených čísel, zjistíme, že daná rovnice má řešení pouze pro dvě hodnoty parametru a. Hodnotě $a = 2$ odpovídá $x = 4$, hodnotě $a = 3$ odpovídá $x = 3$. Dokažte užitím vztahu (4a), že jiné dvojice čísel a, x nesplňují požadované podmínky.

Úloha 3. V oboru reálných čísel x řešte rovnici

$$\frac{x - a}{1 - a} = \frac{x + a}{1 + a}, \tag{5}$$

kde a je reálné číslo.

Z rovnice (5) vyplývá, že parametr a nesmí nabýt hodnot $a = 1$ a $a = -1$, pro něž by úloha neměla význam. Použijeme-li jiného vyjádření, řekneme, že oborem proměnnosti parametru a jsou všechna reálná čísla s výjimkou čísel 1 a -1.

Pro každé reálné číslo x, které vyhovuje rovnici (5), musí platit rovnice

$$(x - a)(1 + a) = (x + a)(1 - a)$$

a po její úpravě rovnice

$$ax = a. \tag{6}$$

Nyní musíme rozbor štěpit. Je-li $a \neq 0$, dostáváme jediné řešení $x = 1$, a to pro jakoukoliv hodnotu parametru a s výjimkou hodnot již vyloučených. Je-li $a = 0$, má rovnice (5) tvar $x = x$ a vyhovuje jí libovolné reálné číslo x.

Provedeme zkoušku dosazením $x = 1$ do rovnice (5) a výsledek shrneme v tabulce:

Parametr a	Počet řešení
$a \neq -1, a \neq 0, a \neq 1$	jedno, $x = 1$
$a = 0$	nekonečně mnoho

Při rozboru jsme byli nuceni zabývat se vymezením oboru proměnnosti parametru a. V úlohách bývá často toto vymezení provedeno již v zadání. Naše úloha by zněla takto:

V oboru reálných čísel x řešte rovnici (5), kde a je reálné číslo, $a \neq 1, a \neq -1$.

Výsledná tabulka by se ovšem změnila:

Parametr a	Počet řešení
$a \neq 0$	jedno, $x = 1$
$a = 0$	nekonečně mnoho

Řešení rovnice (5) můžeme vyložit geometricky dvojím způsobem. První způsob známe již z úlohy 2: Považujme a, x za pravoúhlé souřadnice v rovině a rovnici (6) upravíme na tvar $a(x - 1) = 0$. Grafem této rovnice je dvojice různoběžek, skládající se z osy x a z přímky $x = 1$, rovnoběžné s osou a. Načrtněte graf rovnice (6) a proveďte znovu diskusi jako v úloze 2.

Druhý způsob geometrického výkladu diskuse se opírá o obvyklou metodu grafického řešení rovnice o jedné neznámé. V rovnici (5) položíme

$$y_1 = \frac{x - a}{1 - a}, \qquad y_2 = \frac{x + a}{1 + a}. \tag{7}$$

Při pevně zvoleném čísle a vyjadřují rovnice (7) dvě lineární funkce nezávisle proměnné x; grafem každé z funkcí (7) je přímka. Řešení x rovnice (5) je pak souřadnice x společného bodu (průsečíku) obou těchto přímek.

Při pevně zvoleném parametru a vyjadřuje každá z rovnic (7) přímku; mění-li se a, vyjadřuje každá z rovnic (7) množinu přímek. Zkoumejme např. množinu přímek vyjádřenou první rovnicí (7), tj. rovnicí

$$y_1 = \frac{x - a}{1 - a}. \tag{7a}$$

Každá přímka množiny obsahuje zřejmě bod $S \equiv$ $\equiv [1,1]$ (proč?); do množiny patří všecky přímky procházející bodem S s výjimkou přímky $x = 1$ (obr. 2). Množina přímek vyjádřených rovnicí (7a) při měnícím se parametru a je tedy svazek přímek se středem S s vyloučením přímky $x = 1$.

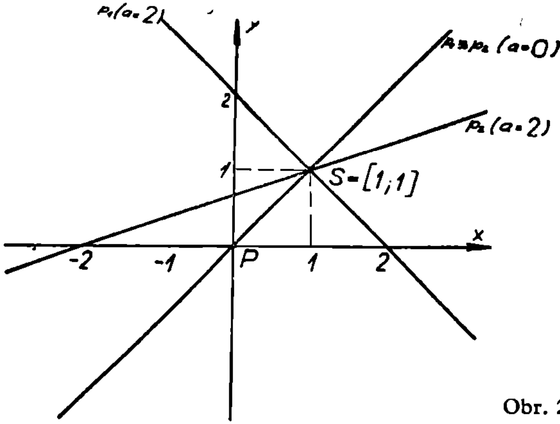
Obdobně zjistíme, že množina přímek vyjádřených rovnicí

$$y_2 = \frac{x + a}{1 + a} \tag{7b}$$

je týž svazek se středem S opět s vyloučením přímky $x = 1$.

Zvolíme-li určité číslo $a \neq 1, -1$, vyjadřují rovnice (7a), (7b) dvě přímky p_1, p_2 svazku. Přímky p_1, p_2 jsou navzájem různé, je-li $a \neq 0$ (proč?); proto mají společný jediný bod S. Přímky p_1, p_2 splynou, je-li $a = 0$. Vyložte pomocí toho geometricky diskusi rovnice (5).

Vraťte se nyní k rovnici (3) z úlohy 2 a užijte téhož způsobu pro geometrické provedení diskuse; přitom budete vyšetřovat dvě množiny přímek dané rovnicemi $y_1 = a(x - 1), y_2 = x + a$.



Obr. 2.

Úloha 4. Pro která reálná čísla a má rovnice

$$\frac{x}{x - a} = a + 1 \tag{8}$$

aspoň jedno záporné řešení x?

Při řešení úlohy 4 jde o řešení soustavy

$$\frac{x}{x - a} = a + 1, \quad x < 0. \tag{9}$$

Každé x, které splňuje soustavu (9), splňuje i soustavu

$$x = (a + 1)(x - a), \ x < 0,$$

neboli

$$ax = a(a + 1), \ x < 0. \qquad (10)$$

Je-li $a = 0$, splňují soustavu (10) všechna reálná $x < 0$; zkouška ukáže, že splňují také rovnici (8).

Je-li $a \neq 0$, musí platit

$$x = a + 1, \ x < 0,$$

což znamená, že musí být $a + 1 < 0$, tj. $a < -1$. Zkouškou se přesvědčíme, že řešení $x = a + 1$ rovnici (8) opravdu vyhovuje.

Shrneme-li dosavadní výsledky, dostaneme, že požadavky úlohy splňují čísla $a < -1$ a $a = 0$.

Úloha 5. V oboru reálných čísel x řešte rovnici

$$|x| + |a| = 1, \qquad (11)$$

kde a je reálné číslo.

Při řešení rovnice (11) je třeba rozbor rozdělit do dvou částí (viz definici absolutní hodnoty reálného čísla).

1. Je-li $a \geqq 0$, musí pro každé x splňující rovnici (11) platit též rovnice

$$|x| = 1 - a. \qquad (12)$$

Protože absolutní hodnota reálného čísla je vždy číslo nezáporné, má rovnice (12) řešení jen tehdy, je-li $1 - a \geqq 0$, tj. $a \leqq 1$. Potom platí buď $x = 1 - a$, nebo $x = -(1 - a) = a - 1$ pro každé a, pro něž je $0 \leqq a \leqq 1$.

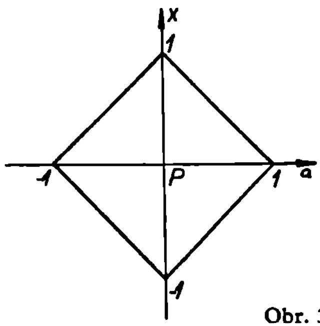
2. Je-li $a < 0$, musí pro každé x splňující rovnici (11) platit rovnice

$$|x| = 1 + a. \qquad (13)$$

Opět snadno usoudíme, že rovnice (13) má řešení jen tehdy, je-li $1 + a \geqq 0$, tj. $a \geqq -1$. Potom platí buď $x = 1 + a$, nebo $x = -(1 + a)$ pro každé a, pro něž je $-1 \leqq a < 0$. Snadno zjistíme, jaký útvar je grafem rovnice (11); je to obvod čtverce (viz obr. 3).

Diskusi úlohy shrneme do přehledné tabulky:

Parametr a	Počet řešení
$a < -1, a > 1$	žádné
$a = -1, a = 1$	jedno, $x = 0$
$-1 < a < 1$	dvě, viz rozbor



Obr. 3.

Úloha 6. V oboru reálných čísel x řešte rovnici

$$|x - 2| - |x + 2| = |a + 2| - |a - 2|, \qquad (14)$$

kde a je reálné číslo.

Protože v rovnici (14) se vyskytují absolutní hodnoty $|a + 2|$, $|a - 2|$, rozdělíme obor proměnnosti parametru a na tři části, z nichž každou se budeme zabývat zvlášť. Budeme vyšetřovat intervaly:

1) $a \geqq 2$,
2) $-2 \leqq a < 2$,
3) $a < -2$.

1. Pro každé x, které splňuje rovnici (14), musí platit

$$|x - 2| - |x + 2| = a + 2 - a + 2,$$

a tedy rovnice

$$|x - 2| - |x + 2| = 4. \tag{15}$$

Každé x, které splňuje rovnici (15), musí splňovat aspoň jednu ze soustav

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} & x - 2 - (x + 2) = 4, & x \geqq 2, \\
\text{(b)} & -(x - 2) - (x + 2) = 4, & -2 \leqq x < 2, \\
\text{(c)} & -(x - 2) + (x + 2) = 4, & x < -2.
\end{array}$$

Snadným výpočtem zjistíme, že soustava (a) není splněna pro žádné x, soustava (b) je splněna pro $x = -2$, soustava (c) je splněna pro každé $x < -2$.

2. Pro každé x, které splňuje rovnici (14), musí být splněna obdobně rovnice

$$|x - 2| - |x + 2| = 2a. \tag{16}$$

Každé x, které splňuje rovnici (16), musí splňovat aspoň jednu ze soustav

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} & x - 2 - (x + 2) = 2a, & x \geqq 2, \\
\text{(b)} & -(x - 2) - (x + 2) = 2a, & -2 \leqq x < 2, \\
\text{(c)} & -(x - 2) + (x + 2) = 2a, & x < -2.
\end{array}$$

Řešíme-li každou z uvedených soustav zvlášť, zjistíme, že soustava (a) má pro $a = -2$ nekonečně mnoho řešení

$x \geqq 2$ a pro $a > -2$ žádné řešení, soustava (b) má jedno řešení $x = -a$, soustava (c) nemá žádné řešení.

3. Každé x splňující rovnici (14) musí splňovat též rovnici

$$|x - 2| - |x + 2| = -(a + 2) + a - 2$$

a tedy rovnici

$$|x - 2| - |x + 2| = -4. \qquad (17)$$

Opět pro každé x, které splňuje rovnici (17), musí být splněna aspoň jedna ze soustav

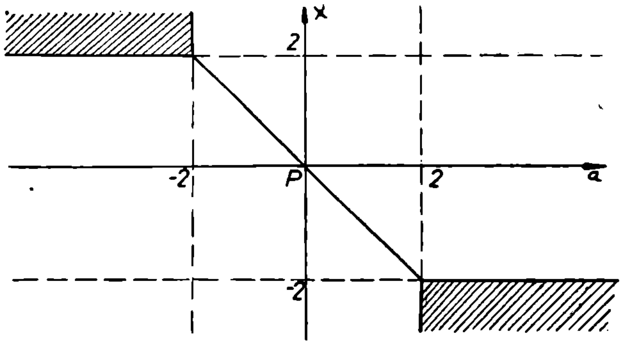
$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & x - 2 - (x + 2) = -4, \quad x \geqq 2, \\ \text{(b)} & -(x - 2) - (x + 2) = -4, \quad -2 \leqq x < 2, \\ \text{(c)} & -(x - 2) + (x + 2) = -4, \quad x < -2. \end{array}$$

Zjistíme, že soustava (a) je splněna pro každé $x \geqq 2$, soustava (b) a soustava (c) nemá žádné řešení.

Zkoušku provádíme po dosažení každého částečného výsledku.

V této úloze má grafické řešení ještě větší význam než v úlohách předcházejících, protože algebraické řešení je dosti nepřehledné. Užijeme pravoúhlého systému souřadnic s osami a, x. V obr. 4 jsou části roviny, jejichž souřadnice a, x vyhovují rovnici (14) vytaženy silněji nebo vyšrafovány. Prověřte podrobně, že je grafické zobrazení provedeno správně. Výsledek diskuse zkontrolované geometrickým znázorněním shrneme do tabulky:

Parametr a	Počet řešení
$-2 < a < 2$	jedno
$a \leqq -2, 2 \leqq a$	nekonečně mnoho



Obr. 4.

Několik neřešených úloh

1. Řešte v oboru celých čísel x rovnici

$$x\,(a + 4) + a\,(x + 2) = 2,$$

kde a je celé číslo.

2. Řešte v oboru reálných čísel x rovnici

$$\frac{ax - 6}{ax + 6a} = \frac{1}{a},$$

kde a je reálné číslo.

3. Řešte v oboru přirozených čísel x rovnici

$$\frac{a}{3 + x} = \frac{5}{x},$$

kde a je přirozené číslo.

4. Pro která reálná čísla a má rovnice

$$\frac{8x - 1}{x - 2} - 2 = a$$

aspoň jeden kladný kořen?

5. Pro která reálná čísla a má rovnice

$$\frac{a(x - 1)}{x + 1} = 5$$

aspoň jeden záporný kořen?

6. Řešte v oboru reálných čísel x rovnici

a) $|x| - |a| = 2,$

b) $|x| + |a| + \frac{1}{\sqrt{2}}(|x - a| + |x + a|) = \sqrt{2} + 1,$

c) $||x| - |a|| = 1,$

d) $||x| + ||a| - 3| - 3| = 1,$

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}(|x| - x) = a,$

kde a je reálné číslo. Znázorněte geometricky!

7. Řešte v oboru reálných čísel x rovnici

$$|x| - |x - 8| = |a + 4| + |4 - a|,$$

kde a je reálné číslo. Geometricky znázorněte!

Vytvářejte si sami podobné úlohy a řešte je!