# O podobnosti v geometrii

## Kapitola V. Podobná zobrazení

In: Jaroslav Šedivý (author): O podobnosti v geometrii. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1963. pp. 61–[78].

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403488

KAPITOLA V

# PODOBNÁ ZOBRAZENÍ

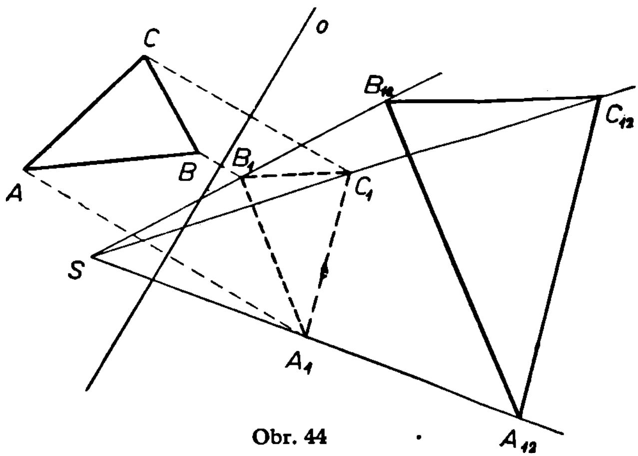
V poslední kapitole budeme definovat pojem „podobné zobrazení v rovině" a ukážeme si několik způsobů jeho využití při řešení konstruktivních úloh. Podrobnější studium podobných zobrazení přesahuje již podstatně středoškolskou látku, nebudeme se jím proto zabývat.

**30. Složení zobrazení.** Uveďme si nejprve příklad na složení osové souměrnosti a stejnolehlosti. Na obr. 44 je zobrazen trojúhelník $ABC$ nejprve v osové souměrnosti $O$ s osou $o$ na trojúhelník $A_1B_1C_1$. Tento trojúhelník je pak zobrazen ve stejnolehlosti $H$ se středem $S$ a koeficientem $\varkappa = 2$ na trojúhelník $A_{12}B_{12}C_{12}$. Dvojí index píšeme místo správnějšího, ale složitějšího zápisu $(A_1)_2$ $(B_1)_2$ $(C_1)_2$, který vyjadřuje, že ve druhém zobrazení zobrazujeme body $A_1$, $B_1$, $C_1$.

Jak vidíte, je podstatou skládání dvou zobrazení to, že provedeme dvě zobrazení „za sebou". Na obr. 44 jsme získali jako výsledek zobrazení trojúhelníka $ABC$ na trojúhelník $A_{12}B_{12}C_{12}$. Vyslovme nyní definici.

*Jsou-li dána dvě zobrazení $Z_1$, $Z_2$ v rovině tak, že $Z_1$ $(X \rightarrow X_1)$ a $Z_2(X_1 \rightarrow X_{12})$, nazveme zobrazení $Z(X \rightarrow X_{12})$ složením zobrazení $Z_1$, $Z_2$ a zapíšeme je $Z = Z_1 Z_2$.*

Pořadí, v jakém zobrazení $Z_1$, $Z_2$ skládáme, je podstatné, nemusí být $Z_1Z_2 = Z_2Z_1$. Přesvědčte se, že na obr. 44 je $OH \neq HO$ (postačí, zobrazíte-li bod $A$ nejprve ve stejno-



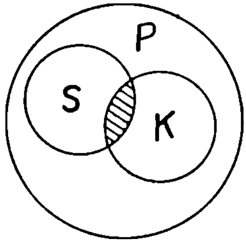

Obr. 44

lehlosti na bod $A_2$ a tento bod pak v osové souměrnosti na bod $A_{21}$).

106. Složte osovou souměrnost a stejnolehlost v případě, kdy leží střed stejnolehlosti na ose souměrnosti. Jaký je pak vztah mezi $OH$ a $HO$?
107. Složte otočení $R$ o pravý úhel kolem středu $S$ se stejnolehlostí $H$ $(S, \varkappa = -2)$. Je $RH = HR$?

**31. Podobná zobrazení.** Na obr. 44 jsme zobrazili trojúhelník $ABC$ ve zobrazení $Z$, které bylo složením shodného zobrazení (osové souměrnosti) a stejnolehlého zobrazení (stejnolehlosti). Protože je $A_{12}B_{12} = 2.AB$, $B_{12}C_{12} = 2.BC$, $C_{12}A_{12} = 2.CA$, je trojúhelník $A_{12}B_{12}C_{12}$ podobný trojúhelníku $ABC$. Charakteristickou vlastností zobrazení $Z$ je právě to, že zobrazuje každou úsečku $XY$ na úsečku $X'Y' = k.XY$, kde $k$ je konstantou. Stejnou vlastnost má každé zobrazení, které vznikne složením shodného a stejnolehlého zobrazení v rovině.

*Zobrazení, které je složením shodného a stejnolehlého zobrazení v rovině, nazýváme podobným zobrazením v rovině.* Označujeme je zpravidla písmenem $P$, číslo $k$ nazýváme poměrem podobnosti.




Obr. 45

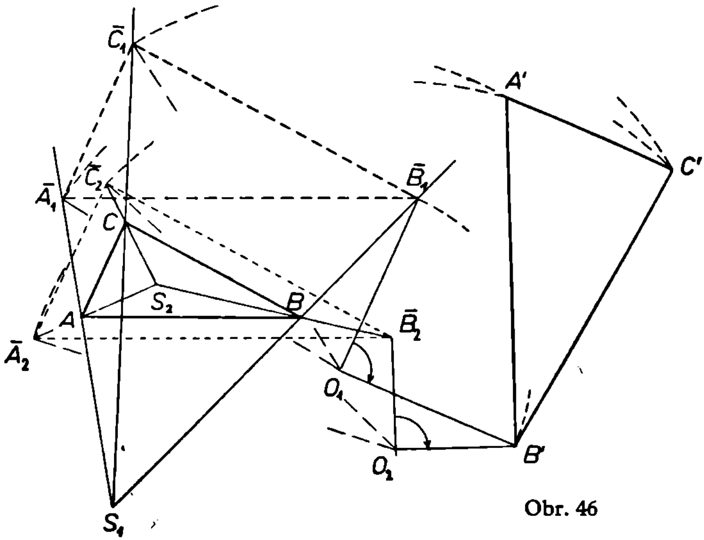
Snadno lze dokázat, že také podobné zobrazení v rovině je prostým zobrazením roviny na rovinu. Každé shodné i stejnolehlé zobrazení v rovině, včetně identity, je podobným zobrazením v rovině.*) Na obr. 45 je schematicky znázorněn vztah množiny P podobných zobrazení, množiny S stejnolehlých zobrazení a množiny K shodných (kongruentních) zobrazení. Vyšrafovaný průnik představuje ta stejnolehlá zobrazení, která jsou současně shodnými zobrazeními (identitu, posunutí a středovou souměrnost).

S podobnými zobrazeními, která nejsou shodnými zobrazeními ani stejnolehlostmi (s tzv. *vlastními podobnostmi*) pracujeme obvykle tak, že je vyjádříme jako složení stejnolehlosti a shodného zobrazení v rovině (v tomto pořadí).

*) Shodné zobrazení v rovině je podobným zobrazením s poměrem podobnosti $k = 1$. Ze stejnolehlých zobrazení je posunutí a identita shodným, tedy i podobným zobrazením. Stejnolehlost s koeficientem $\varkappa$ zobrazuje každou úsečku $XY$ na úsečku $X'Y' = |\varkappa| . XY$, je proto podobným zobrazením s koeficientem $k = |\varkappa|$.

Využíváme při tom věty obdobné větě o stejnolehlých zobrazeních (odst. 20 tohoto svazku) a větě o shodných zobrazeních (str. 18 třetího svazku této knižnice).

*Jsou-li dány dva podobné trojúhelníky $ABC$, $A'B'C'$, existuje právě jedno podobné zobrazení v rovině, které zobrazuje $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$.*




Obr. 46

Této větě je třeba rozumět tak, že každá dvě podobná zobrazení $P_1$ ($A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$), $P_2$ ($A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$) přiřazují každému bodu $X$ roviny týž bod $X' \equiv X'_1 \equiv X'_2$. Přitom však může být podobné zobrazení $P_1$ složením jiné stejnolehlosti a jiné shodnosti než podobné zobrazení $P_2$. Na obr. 46 je zobrazen trojúhelník $ABC$ na trojúhelník $A'B'C'$ podobným zobrazením $P_1$, které je složením stejnolehlosti $H_1\left(S_1, \varkappa_1 = \frac{A'B'}{AB}\right)$ a otočení $R_1$ se středem $O_1$. Současně je možno zobrazit trojúhelník $ABC$ na trojúhelník $A'B'C'$ podobným zobrazením $P_2$, které je složením stejnolehlosti $H_2\left(S_2, \varkappa_2 = \varkappa_1 = \frac{A'B'}{AB}\right)$ a otočení $R_2$ se středem $O_2$.

Rozklad podobného zobrazení na stejnolehlost a shodné zobrazení není tedy jednoznačný. Střed stejnolehlosti je možno volit libovolně, její koeficient $\varkappa$ však musí vyhovovat vztahu $\varkappa| = k$, kde $k$ je koeficientem podobnosti trojúhelníků $ABC$, $A'B'C'$ a současně koeficientem podobného zobrazení.

108. Zobrazte si libovolný šestiúhelník $ABCDEF$ a trojúhelník $A'B'C'$ podobný trojúhelníku $ABC$. Sestrojte obrazy bodů $D$, $E$, $F$ v podobném zobrazení $P$ $(A \to A', B \to B', C \to C')$.

Lze dokázat, že *každá vlastní podobnost v rovině má právě jeden samodružný bod.* Označíme-li jej písmenem $S$, *platí při* $P$ $(S \to S' \equiv S, A \to A', B \to B', C \to C')$ vztahy $SA' = k.SA$, $SB' = k.SB$, $SC' = k.SC$, ($k$ je koeficient podobnosti). Bod $S$ náleží tedy Apolloniovým kružnicím $\mu_1$ $(A', A, k)$, $\mu_2$ $(B', B, k)$ a $\mu_3$ $(C', C, k)$. *Samodružný bod podobnosti nazýváme středem podobnosti* a sestrojujeme jej jako průsečík tří Apolloniových kružnic.

109. Sestrojte střed podobnosti zobrazující libovolný trojúhelník $ABC$ na podobný trojúhelník $A'B'C'$. Zvolte bod $S$ za střed stejnolehlosti zobrazující trojúhelník $ABC$ na trojúhelník shodný s trojúhelníkem $A'B'C'$. Jakou vlastnost má pak shodné zobrazení, kterým lze přemístit sestrojený trojúhelník na trojúhelník $A'B'C'$?

110. Je dán čtverec $KLMN$ a bod $A$, který neleží na jeho obvodu. Určete množiny vrcholů $B$, $C$, $D$ těch čtverců $ABCD$, jejichž střed

leží na obvodu čtverce $KLMN$. Použijte podobných zobrazení se středem $A$, kterými lze zobrazit střed čtverce $ABCD$ do jeho vrcholů $B$, $C$, $D$.

**32. Podobné útvary.** Podobnosti trojúhelníků jsme již využili mnohokrát, i v minulém odstavci k vyslovení věty o určenosti podobného zobrazení v rovině. Pomocí podobných zobrazení můžeme definovat podobnost libovolných dvou útvarů.

*Útvar $U_1$ je podobný útvaru $U_2$, existuje-li podobné zobrazení v rovině, které zobrazuje $U_1$ na $U_2$.*

Vyslovená definice vystihuje pomocí termínu „podobné zobrazení" to, co říká školská definice (dva útvary jsou podobné, lze-li je přemístěním uvést do polohy stejnolehlé). Svou formou je definice zcela obdobná definici shodnosti nebo stejnolehlosti útvarů.

Připouštíme, že může existovat několik podobných zobrazení útvaru $U_1$ na útvar $U_2$. Tak např. půlkruh o průměru $AB$ lze zobrazit na libovolný půlkruh o průměru $KL$ dvěma podobnými zobrazeními, $P_1$ $(A \to K,\ B \to L)$ a $P_2$ $(A \to L,\ B \to K)$. Narýsujte si takové dva půlkruhy a přiřaďte ještě $C \to M$ (body $C$, $M$ jsou koncové body poloměrů kolmých k $AB$, $KL$). Sestrojte středy podobností $P_1$, $P_2$.

V definici podobnosti útvarů jsme nepožadovali, aby útvary $U_1$, $U_2$ byly omezené.*) Můžeme proto na základě definice prohlásit, že každé dvě přímky jsou podobné nebo každé dva pásy jsou podobné.

Existuje více množin útvarů téhož druhu, jejichž prvky jsou navzájem podobné. Dokázali jsme již, že každé dva půlkruhy jsou podobné. Z tohoto důkazu je zřejmé, že

*) Útvar považujeme za omezený, existuje-li kruh, který obsahuje všechny body útvaru.

každé dvě úsečky $AB$, $KL$ jsou podobné. Určete všechna čtyři podobná zobrazení v rovině, kterými lze zobrazit úsečku $AB$ na úsečku $KL$.

111. Dokažte, že jsou podobné každé dva čtverce a obecně každé dva pravidelné $n$-úhelníky (při témž $n$). [Využijte některých podobností, kterými lze zobrazit stranu jednoho $n$-úhelníka na stranu druhého $n$-úhelníka.]

112.* Dokažte, že jsou podobné každé dvě kružnice, každé dvě paraboly a každé dvě rovnoosé hyperboly.

113.* Dokažte, že jsou podobné každé dvě Archimedovy spirály.

## 33. Konstrukce trojúhelníka podobného danému trojúhelníku.

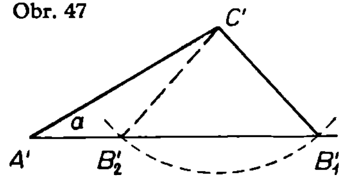
Při dalších konstrukcích využijeme často toho, že sestrojíme trojúhelník podobný hledanému trojúhelníku dříve než hledaný trojúhelník. Je-li jeden trojúhelník narýsován, sestrojíme velmi snadno trojúhelník jemu podobný (sestrojíme např. trojúhelník stejnolehlý). Nám však jde právě o ten případ, kdy máme udány jen některé prvky jednoho trojúhelníka a chceme sestrojit trojúhelník jemu podobný.

**Příklad 10.** *Víme, že trojúhelník $ABC$ má úhel $\alpha = 30°$, těžnici $t_a = 4$ a strany $a$, $b$ v poměru $a : b = 2 : 3$. Sestrojte trojúhelník $A'B'C'$ podobný trojúhelníku $ABC$.*

*Řešení.* Existuje nekonečně mnoho trojúhelníků $A'B'C'$ podobných trojúhelníku $ABC$, budeme však spokojeni, sestrojíme-li jediný z nich. Některé údaje o trojúhelníku $ABC$ se vztahují i na trojúhelník $A'B'C'$, a to úhly a poměry stran. Trojúhelník $A'B'C'$ (obr. 47) má úhel $B'A'C' = \alpha$, poměr stran $B'C' : A'C' = 2 : 3$. Tyto údaje nestačí ke konstrukci trojúhelníka $A'B'C'$, musíme si zvolit ještě jeden délkový prvek trojúhelníka $A'B'C'$ (stranu, výšku, těžnici nebo osu úhlu).

*Vtip řešení* spočívá v tom, že nemusíme volit délku těžnice $t'_a$, ale můžeme zvolit délku strany $A'C'$. Z daného poměru zjistíme délku strany $B'C' = \frac{2}{3} A'C'$, o úhlu $B'A'C'$ víme, že je shodný s úhlem $\alpha$.

Obr. 47




Umístíte-li úsečku $A'C' = 3$, sestrojíte pomocí strany $B'C' = 2$ a úhlu $B'A'C' = \alpha$ velmi snadno trojúhelník $A'B'C'$ podobný trojúhelníku $ABC$. Jak je patrno z obrázku 47, sestrojíme dva body $B'$; trojúhelník $A'B'_1C'$ není podobný trojúhelníku $A'B'_2C'$. Musíme proto konstatovat, že existují dvě množiny trojúhelníků podobných trojúhelníkům $ABC$*) s $\alpha = 30°$, $t_a = 4$, $a : b = 2 : 3$. To ovšem znamená, že z daných prvků lze sestrojit neshodné trojúhelníky $ABC$. Přesvědčte se o tom.

Kdybychom zvolili při konstrukci trojúhelníka $A'B'C'$ stranu $B'C'$, byl by postup obdobný. Při volbě strany $A'B'$ za doplňující údaj bychom použili ke konstrukci trojúhelníka $A'B'C'$ Apolloniovy kružnice.

114. Sestrojte trojúhelník $A'B'C'$ podobný trojúhelníku $ABC$, znáte-li tyto údaje o trojúhelníku $ABC$:

a) $\beta, \gamma, a + r$ b) $a, \beta, v_a + v_b + v_c$
c) $a : c, b : a, \varrho$ d) $t_a : t_b, t_c : v_c, a + b$.

*) Každé dva trojúhelníky téže množiny jsou podobné, ale žádný trojúhelník jedné množiny není podobný trojúhelníku druhé množiny.

## 34. Nepolohové úlohy na sestrojení trojúhelníka a čtyřúhelníka.

Máme-li *sestrojit trojúhelník ABC, když je dáno* $a$, $\beta$, $v_a + v_b + v_c$, povzdychneme si nad třetí podmínkou. Kdyby šlo o sestrojení trojúhelníka s úhly $\alpha$, $\beta$, věděli bychom si rady hned. Začněme tady tím, že si místo hledaného trojúhelníka $ABC$ sestrojíme trojúhelník $A'B'C'$ s úhly $\alpha$, $\beta$. Je zřejmé, že trojúhelník $ABC$ je podobný trojúhelníku $A'B'C'$, existuje proto podobné zobrazení $P\ (A \to A', B \to B', C \to C')$.

V úloze nejsou vysloveny žádné podmínky pro polohu trojúhelníka $ABC$ (jde o úlohu nepolohovou), můžeme jej proto sestrojit kdekoliv. Nejvýhodnější je sestrojit trojúhelník $ABC$ v poloze stejnolehlé s trojúhelníkem $A'B'C'$. Vyřešíme nyní úlohu podrobněji.

*Rozbor*. Má-li trojúhelník $ABC$ (obr. 48) požadované vlastnosti, můžeme sestrojit úsečku $AU = v_a + v_b + v_c$ na polopřímce $AA_1$)*. Obraz trojúhelníka $ABC$ v libovolné stejnolehlosti se středem $A$ označme jako trojúhelník $A'B'C'$, $H(A \to A' \equiv A,\ B \to B',\ C \to C',\ U \to U')$. Trojúhelník $A'B'C'$ má úhel $\sphericalangle B'A'C' = \alpha$, $\sphericalangle A'B'C' = \beta$, úsečka $AU' = v'_a + v'_b + v'_c$ (součtu výšek trojúhelníka $A'B'C'$). Sestrojíme-li trojúhelník $A'B'C'$ a body $U'$, $U$, můžeme zobrazit trojúhelník $A'B'C'$ na trojúhelník $ABC$ stejnolehlostí $H^{-1}\ (A \to A,\ U' \to U)$.

*Konstrukce*. $K_1$: *Sestrojíme trojúhelník* $A'B'C'$ *s úhly* $\alpha$, $\beta$.

$K_2$: *Na polopřímce* $A'A'_1$ *sestrojíme součet výšek* $v'_a + v'_b + v'_c = A'U'$.

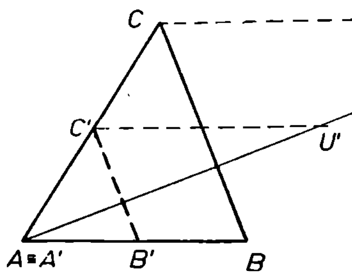
$K_3$: *Na polopřímku* $A'U'$ *přeneseme úsečku* $AU = v_a + v_b + v_c$.

$K_4$: *Sestrojíme trojúhelník* $ABC$ *jako obraz trojúhelníka* $A'B'C'$ *ve stejnolehlosti* $H^{-1}(A' \to A',\ U' \to U)$.

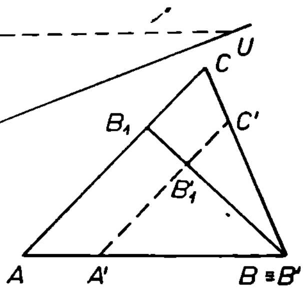
*) Bod $A_1$ je patou výšky $v'_a$ v trojúhelníku $ABC$, bod $A'A'_1$ je patou výšky $v'_a$ v trojúhelníku $A'B'C'$.

*Důkaz konstrukce.* Z konstrukce $K_4$ plyne, že $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, je proto $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle CBA = \beta$. Zřejmě je i $v_a + v_b + v_c = AU$.

*Diskuse.* Všechny kroky konstrukce jsou jednoznačné, pokud je $\alpha + \beta < 180°$. Úloha má pak právě jedno řešení.




Obr. 48




Obr. 49

115. Sestrojte trojúhelník $ABC$, je-li dáno:

a) $a, \beta, c + r$
b) $\beta, \gamma, a + b + c$
c) $a, \gamma, r + 2\,t_b$
d) $\gamma, \alpha - \beta, v_a + t_c$.

**Příklad 11.** *Sestrojte trojúhelník $ABC$, je-li dáno $\alpha$, $v_b$ a poměr $a : b = 3 : 2$.*

*Rozbor.* Má-li trojúhelník $ABC$ požadované vlastnosti, je jeho obrazem v každé stejnolehlosti se středem $B$ trojúhelník $A'B'C'$, který má úhel $B'A'C' = \alpha$ a poměr stran $B'C' : A'C' = 3 : 2$ (obr. 49). Pata $B_1$ výšky $v_b = BB_1$ se zobrazí v patu $B'_1$ výšky $v'_b$ trojúhelníka $A'B'C'$.

*Konstrukce* trojúhelníka $A'B'C'$ je popsána v příkladě 10 při obráceném poměru stran.

*Konstrukce.* $K_1$: *Sestrojte trojúhelník $A'B'C'$ s vlastnostmi popsanými v rozboru.*

$K_2$: *Sestrojíme patu $B'_1$ výšky $v'_b$ a na polopřímce $B'B'_1$ sestrojíme bod $B_1$ tak, aby $B'B_1 = v_b$.*

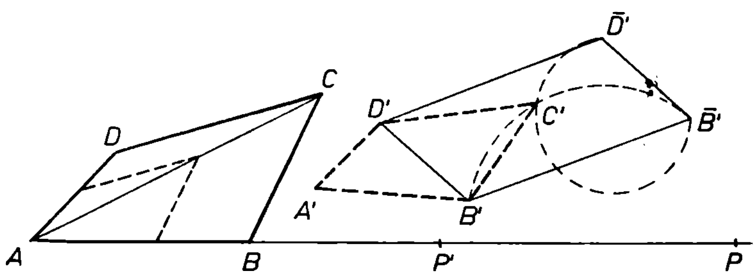
$K_3$: *Sestrojíme trojúhelník $ABC$ jako obraz trojúhelníka $A'B'C'$ ve stejnolehlosti $H$ $(B \rightarrow B' \equiv B, B'_1 \rightarrow B_1)$.*

Zbývající fáze řešení proveďte sami, diskusi konstrukce $K_1$ můžete provést podle diskuse příkladu 10.

Při řešení úloh tohoto typu je důležité využít při rozboru úsečky, která charakterizuje hledaný trojúhelník ($v_a + v_b + v_c$ v první úloze, $v_b$ v příkladě 11). Uvedeme ještě jednu úlohu na sestrojení čtyřúhelníka.

**Příklad 12.** *Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, je-li dána délka jeho obvodu, poměr délek úhlopříček $AC = 2 . BD$, úhel $\varepsilon$ sevřený úhlopříčkami a vnitřní úhly $\alpha$, $\beta$.*

*Rozbor.* Má-li čtyřúhelník $ABCD$ (obr. 50) požadované vlastnosti, sestrojme si na polopřímce $AB$ úsečku $AP \doteq AB + BC + CD + DA$. Obrazem čtyřúhelníka $ABCD$ v libovolné stejnolehlosti se středem $A$ je čtyřúhelník




Obr. 50

$A'B'C'D'$ podobný čtyřúhelníku $ABCD$. V této stejnolehlosti přejde bod $P$ do bodu $P'$, pro který platí $A'P' = A'B' + B'C' + C'D' + D'A'$.

Jeden čtyřúhelník $A'B'C'D'$ podobný čtyřúhelníku $ABCD$ snadno sestrojíme, zvolíme-li úsečku $B'D'$. Je pak $A'C' = 2 . B'D'$ a při znalosti úhlu $\varepsilon$ můžeme sestrojit význačný rovnoběžník $D'B'\bar{B}'\bar{D}'$ čtyřúhelníka $A'B'C'D'$ (obr. 50). Proveďte konstrukci čtyřúhelníka $A'B'C'D'$ podle postupu popsaného v odst. **24.**

*Konstrukce.* $K_1$: *Sestrojíme jeden čtyřúhelník* $A'B'C'D'$ *podobný čtyřúhelníku* $ABCD$.

$K_2$: *Na polopřímce* $A'B'$ *sestrojíme bod* $P'$ *tak, že je* $A'P' = A'B' + B'C' + C'D' + D'A'$.

$K_3$: *Na polopřímce* $A'P'$ *sestrojíme bod* $P$, $AP = AB + BC + CD + DA$.

$K_4$: *Čtyřúhelník* $ABCD$ *sestrojíme jako obraz čtyřúhelníka* $A'B'C'D'$ *v* $H(A' \rightarrow A' \equiv A, P' \rightarrow P)$.

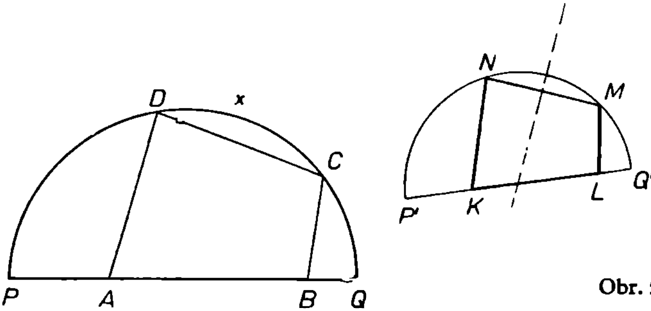
*Důkaz* konstrukce a diskusi proveďte sami.

116. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno:
a) $a : b$, $b : c$, $t_a + t_b + t_c$ b) $\beta$, $a : c$, $3r + b$

117. Sestrojte kosočtverec, je-li dán poměr jeho úhlopříček a součet strany a jedné úhlopříčky.

**35. Řešení polohových úloh pomocí podobnosti.** Princip řešení těchto úloh zůstává stejný jako v minulém odstavci. Sestrojujeme kdekoliv v rovině útvar podobný hledanému. Navíc však musíme zobrazit pomocný útvar na hledaný útvar tak, aby měl požadovanou polohu, nevystačíme proto všude se stejnolehlostí, ale musíme užít i přemístění.

**Příklad 13.** *Je dán půlkruh nad průměrem $PQ$ a vypuklý čtyřúhelník $KLMN$. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$ podobný čtyřúhelníku $KLMN$ tak, aby jeho vrcholy $A$, $B$ ležely na průměru a vrcholy $C$, $D$ na kružnici ohraničující půlkruh.*




Obr. 51

*Rozbor*. Je-li čtyřúhelník $ABCD$ (obr. 51) řešením úlohy, je podobný čtyřúhelníku $KLMN$, existuje tedy podobné zobrazení $P$ $(A \to K, B \to L, C \to M, D \to N)$. Zobrazíme-li v této podobnosti i body $P$, $Q$ v body $P'$, $Q'$, získáme půlkruh o průměru $P'Q'$ opsaný čtyřúhelníku $KLMN$. Střed tohoto půlkruhu leží na přímce $KL$ a na ose úsečky $MN$.

*Konstrukce.* $K_1$: *Sestrojíme bod $S$ jako společný bod přímky $KL$ a osy úsečky $MN$.*

$K_2$: *Sestrojíme půlkruh $k \equiv (S, SM)$ omezený průměrem $P'Q'$ ležícím na přímce $KL$.*

$K_3$: *Sestrojíme čtyřúhelník $ABCD$ jako obraz čtyřúhelníka $KLMN$ v podobnosti, která zobrazí půlkruh o průměru $P'Q'$ na půlkruh o průměru $PQ$.*

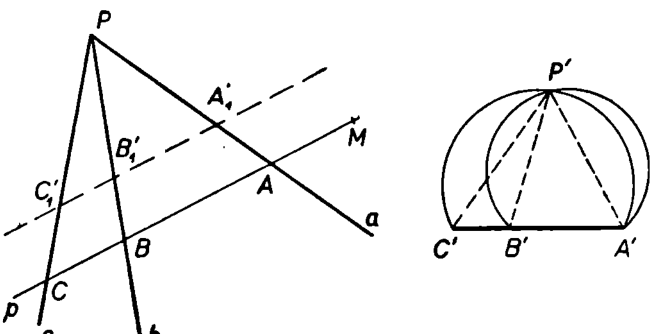
Správnost konstrukce je zcela zřejmá. Úloha má dvě řešení souměrná podle osy úsečky $PQ$.

**Příklad 14.** *Jsou dány tři přímky $a$, $b$, $c$ procházející bodem $P$ a bod $M \not\equiv P$. Sestrojte přímku, která prochází bodem $M$ a protíná přímky $a$, $b$, $c$ v bodech $A$, $B$, $C$ tak, že je $B$ mezi $A$, $C$ a $AB = 2.BC$.*

*Rozbor.* Má-li přímka $p$ požadované vlastnosti, vzniká trojúhelník $ACP$. Každý trojúhelník $A'C'P'$ podobný trojúhelníku $ACP$ má úhel $\sphericalangle A'P'C' = \sphericalangle APC$, $\sphericalangle A'P'B' = \sphericalangle APB$, $B'$ leží mezi $A'$, $C'$ tak, že je $A'B' = 2.B'C'$. Sestrojíme-li kdekoliv v rovině trojúhelník $A'C'P'$, který má uvedené vlastnosti, lze jej přemístit tak, že se stane stejnolehlým s hledaným trojúhelníkem (obr. 52).

Při sestrojování trojúhelníka $A'C'P'$ umístíme úsečku $A'C' = 3$ a vyznačíme bod $B'$ úsečky tak, aby bylo $A'B' = 2$. Bod $P'$ náleží množinám bodů $\mu\ (A', C', \sphericalangle APC)$, $\mu_2\ (A', B', \sphericalangle APB)$.

*Konstrukce.* $K_1$: *Sestrojíme trojúhelník $A'C'P'$ s vlastnostmi uvedenými v rozboru.*




Obr. 52

$K_2$: *Přemístíme trojúhelník $A'C'P'$ tak, aby $P' \rightarrow P$ a body $A'_1$, $C'_1$ ležely na přímkách $a$, $c$.*

$K_3$: *Bodem $M$ vedeme přímku $p \parallel A'_1C'_1$; její průsečíky s přímkami $a$, $b$, $c$ jsou hledané body $A$, $B$, $C$.*

*Důkaz* konstrukce a diskusi proveďte sami. Úloha má jedno nebo žádné řešení.

118. Jsou dány přímky $a$, $b$, $c$ procházející bodem $P$ a další přímka $q$, která bodem $P$ neprochází. Sestrojte přímku $p$, která protíná dané přímky v bodech $A$, $B$, $C$, $Q$ tak, že bod $B$ leží mezi $A$, $Q$, bod $C$ mezi $B$, $Q$ a $AB = 2.BC = 3.CQ$.

119. V kružnici $k \equiv (S, r)$ jsou zobrazeny dva poloměry $SA$, $SB$. Sestrojte tětivu $XY$ kružnice $k$, která je dělena průsečíky s poloměry $SA$, $SB$ na tři shodné části.

120.* Je dán úhel $\alpha$ s vrcholem $V$ a dva body $A$, $B$. Sestrojte kružnici procházející body $A$, $B$ tak, aby proťala ramena úhlu $\alpha$ v bodech $X$, $Y$, jejichž spojnice $XY$ prochází bodem $B$.

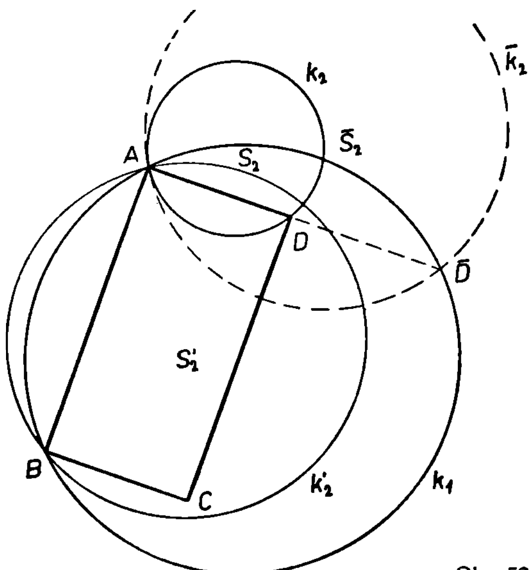
**36. Konstrukce pomocí středu podobnosti.** Je-li podobnost složením stejnolehlosti a otočení, která mají společný střed, je tento bod samodružný v podobném zobrazení a nazývá se střed podobnosti. Téměř každou úlohu, kterou lze řešit pomocí středu stejnolehlosti nebo otočením, můžeme zobecnit na úlohu, při jejímž řešení se uplatní střed podobnosti.

**Příklad 15.** *Jsou dány dvě kružnice $k_1$, $k_2$, které se protínají v bodě $A$. Sestrojte obdélník $ABCD$, jehož vrchol $B$ leží na $k_1$, vrchol $D$ na $k_2$ a pro jehož strany platí $AB = 2.AD$.**)

*) Tato úloha je zobecněním cvičení 31 ze třetího svazku knižnice, ve kterém se požaduje sestrojení čtverce $ABCD$ se stejnými polohovými vlastnostmi.

*Rozbor*. Má-li obdélník $ABCD$ žádané vlastnosti, je bod $A$ středem podobnosti, která zobrazuje $D \rightarrow B$. Toto podobné zobrazení získáme složením stejnolehlosti $H$ se středem $A$ a koeficientem $\varkappa = 2$, která zobrazí $A \rightarrow A$, $D \rightarrow \overline{D}$, a otočení $R$ kolem středu $A$ o pravý úhel, kterým přejde bod $\overline{D}$ do bodu $B$. Zobrazíme-li současně s bodem $D$ i kružnici $k_2$, získáme kružnici $k'_2$, která prochází bodem $B$. Bod $B$ leží tedy na $k_1$ a na $k'_2$ (obrazu kružnice $k_2$ v podobnosti $P = HR$).

*Konstrukce.* $K_1$: *Sestrojíme obraz $k'_2$ kružnice $k_2$ v podobnosti $P = HR$.*




Obr. 53

$K_2$: *Sestrojíme bod $B \neq A$ jako společný bod kružnic $k_1$, $k'_2$.*

$K_3$: *Sestrojíme bod $D$, který je obrazem bodu $B$ v $P^{-1}$.*

$K_4$: *Sestrojíme obdélník $ABCD$.*

*Důkaz.* Správnost konstrukce je zřejmá, bod $B$ leží na $k_1$, bod $D$ leží na obrazu kružnice $k'_2$ v $P^{-1}$, tj. na kružnici $k_2$. Je přitom $AB \perp AD$, $AB = 2.AD$.

*Diskuse.* Při konstrukci $K_1$ můžeme zvolit otočení o pravý úhel v kladném nebo záporném smyslu, existují proto dvě podobnosti $P$ a dvě kružnice $k'_2$ (obr. 53). Je-li $k'_2 \equiv k_1$, má úloha nekonečně mnoho řešení, v ostatních případech jsou právě dvě řešení nebo žádné.

121. Je dána kružnice $k$, přímka $p$ a bod $A$, který leží na $k$. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$ s úhlem $\alpha = 60°$, jehož vrchol $B$ leží na $k$, vrchol $D$ na $p$ tak, že je $AB = 2.CD$.

122. Na kružnici $k$ je dán bod $A$. Sestrojte trojúhelník $ABC$ vepsaný do kružnice $k$, je-li dán jeho úhel $\alpha = 30°$ a poměr $AC : AB = \sqrt{3} : \sqrt{2}$.

123. Jsou dány dvě přímky $p$, $q$, bod $A$ a trojúhelník $KLM$. Sestrojte trojúhelník $ABC$ podobný trojúhelníku $KLM$ tak, aby bod $B$ ležel na $p$ a bod $C$ na $q$. (Tato úloha je zobecněním úlohy 24 ze třetího svazku knižnice).

*

Seznámili jsme se s několika způsoby konstruktivního využití podobných zobrazení. Používali jsme jen definice podobného zobrazení a podobnosti útvarů. Je samozřejmé, že hlubší studium podobných zobrazení v rovině dává větší možnosti konstruktivního využití.