KAPITOLA IV

STEJNOLEHLOST V POLOHOVÝCH ÚLOHÁCH

●

Stejnolehlost je jednoznačně určena, je-li udán její střed a koeficient. Můžeme ji však použít i tehdy, když nejsou známy oba údaje. Uvedeme ukázky řešení polohových konstruktivních úloh, při nichž použijeme stejnolehlosti v případě, kdy

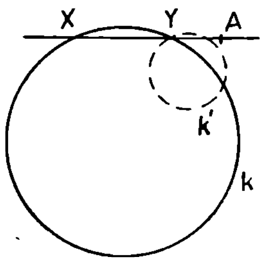
a) známe střed stejnolehlosti i její koeficient,
b) známe střed stejnolehlosti, ale neznáme její koeficient,
c) neznáme střed stejnolehlosti, ale známe její koeficient,
d) neznáme střed stejnolehlosti ani její koeficient.

25. Do první skupiny úloh patří téměř všechny úlohy řešené pomocí středové souměrnosti (stejnolehlosti s koeficientem $\varkappa = -1$) ve třetím svazku této knižnice. Uveďme proto nejdříve úlohy, které jsou průhledným zobecněním úloh řešených středovou souměrností. Mezi nejjednodušší patří úlohy o příčkách, které řešíte i ve škole.

Příklad 3. *Je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a bod A, který leží vně k. Sestrojte sečnu XY kružnice k tak, aby procházela bodem A, protínala k v bodech X, Y a aby platilo $AX = 3 . AY$.*

Rozbor. Neznámými body jsou zřejmě body X, Y. Je-li přímka XY řešením úlohy (obr. 35), je bod Y obrazem bodu X ve stejnolehlosti H se středem A a koeficientem

$\varkappa = \frac{1}{3}$. Protože bod X leží na k, leží bod Y na obrazu k' kružnice k ve stejnolehlosti H. Docházíme k závěru: bod Y leží na kružnici $k \equiv (S, r)$ a na kružnici k', která je obrazem k ve stejnolehlosti H. Bod X je obrazem bodu Y ve stejnolehlosti H^{-1}.



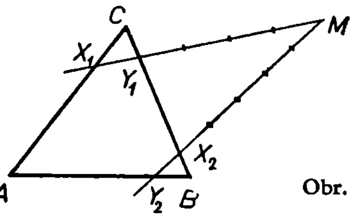
Obr. 35

Konstrukce. K_1: *Sestrojíme k' jako obraz k ve stejnolehlosti H.*
K_2: *Sestrojíme Y jako společný bod kružnic k, k'.*
K_3: *Sestrojíme X jako obraz Y ve stejnolehlosti H^{-1}.*
K_4: *Sestrojíme přímku XY.*

Důkaz konstrukce. Z konstrukce K_3 vyplývá, že je $AX = 3 . AY$ a že body A, X, Y leží na jedné přímce. Stejnolehlost H^{-1} $(k' \to k)$ přiřazuje bodu Y kružnice k' bod X kružnice k. Bod Y leží na k podle konstrukce K_2, je tedy XY tětivou kružnice k.

Diskuse. Počet bodů Y závisí na vzájemné poloze kružnic k, k'. Jsou proto buď dvě, jedno nebo žádné řešení.

O něco obtížnější jsou úlohy o příčkách, ve kterých je třeba koeficient stejnolehlosti nejprve spočítat. Použijeme-li vztahů pro dělicí poměry tří bodů (odst. 5), stanovíme snadno koeficient stejnolehlosti.



Obr. 36

Příklad 4. *Je dán trojúhelník ABC a bod M ležící vně trojúhelníka. Sestrojte přímku procházející bodem M tak, aby protala obvod trojúhelníka v bodech X, Y a aby platilo* $MX = 5 . XY$.

Rozbor. Má-li přímka XY požadované vlastnosti, leží buď X mezi M, Y nebo Y mezi M, X (obr. 36). V prvním případě je $(MY_1X_1) = 5$ a koeficient $\varkappa_1$ stejnolehlosti H_1 $(X_1 \rightarrow Y_1)$ je $\varkappa_1 = (Y_1X_1M) = \frac{4}{5}$. Ve druhém případě je $(MY_2X_2) = -5$ a $\varkappa_2 = (Y_2X_2M) = \frac{6}{5}$. Stejnou úvahou jako v příkladě 3 dospějeme k závěru, že bod Y leží na obvodu trojúhelníka ABC a na obvodu trojúhelníka $A_1B_1C_1$ nebo $A_2B_2C_2$, které jsou obrazy obvodu trojúhelníka ABC v $H_1\left(M, \frac{4}{5}\right)$*) a $H_2\left(M, \frac{6}{5}\right)$.

*) Stejnolehlost se středem S a koeficientem $\varkappa$ budeme značit symbolem $H(S, \varkappa)$.

Konstrukce. K_1: *Sestrojíme obraz trojúhelníka ABC v* $H_1\left(M, \frac{4}{5}\right)$ a $H_2\left(M, \frac{6}{5}\right)$.

K_2: *Sestrojíme bod Y jako společný bod obvodu trojúhelníka ABC s jeho obrazy v* H_1 *nebo* H_2.

K_3: *Sestrojíme přímku MY a její druhý průsečík X s obvodem trojúhelníka ABC.*

Důkaz konstrukce se provede obdobně jako v předešlém příkladě.

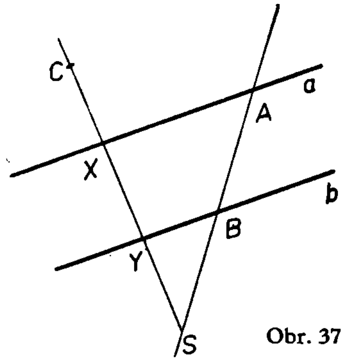
Diskuse. Úloha má nejvýše čtyři řešení, může jich míti méně, záleží na poloze trojúhelníka ABC a trojúhelníků $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$. Počet řešení se zmenší, leží-li M na prodloužení některé strany trojúhelníka ABC.

Proč jsme použili při řešení příkladu 4 dvou stejnolehlostí, zatímco v příkladě 3 jen jediné? Požadovaným vztahem $AX = 3 . AY$ je v příkladě 3 stanoveno, že bod X je vzdálenější od A než bod Y. V příkladě 4 však není dán vztah mezi MX, MY, nemůžeme proto říci, která z těchto úseček je menší. Musíme proto počítat s možností, že je $MX < MY$ i $MY < MX$. Pamatujte na to při řešení úloh ve cvičeních.

94. Je dána kružnice k a její body A, B, C. Sestrojte tětivu AX kružnice k tak, aby z ní její průsečík Y s tětivou BC oddělil čtvrtinu.
95. Je dán trojúhelník a jeho vnitřní bod P. Sestrojte příčku trojúhelníka procházející bodem P tak, že ji bod P dělí v poměru 1 : 2. Vyznačte v trojúhelníku množinu bodů P, pro které má úloha řešení.
96. Dvě kružnice k_1, k_2 se protínají v bodě A. Veďte jím přímku, na které vytíná kružnice k_1 dvakrát delší tětivu než kružnice k_2.

26. Uveďme nyní úlohu typu c), ve které střed stejnolehlosti není dán, ale lze jej snadno sestrojit a převést tak úlohu na typ a).

Příklad 5. *Jsou dány body A, B, C a různé rovnoběžky a, b, které procházejí A, B. Sestrojte přímku procházející bodem C tak, aby protala přímku a v bodě X, přímku b v bodě Y a aby platilo $AX = 2.BY$.*



Obr. 37

Rozbor. Neunáhleme se, volba bodu C za střed stejnolehlosti by nebyla šťastná! Uvědomme si, že úsečky AX, BY jsou stejnolehlé a že tedy existuje stejnolehlost, která zobrazí úsečku BY na úsečku AX, $H\ (B \to A, Y \to X)$. Její střed S je průsečíkem přímek AB, XY (obr. 37). Pro koeficient této stejnolehlosti platí: $|\varkappa| = \dfrac{AX}{BX} = 2$, je tedy $|\varkappa| = |(ABS)| = 2$. Střed S stejnolehlosti $H\ (B \to A, Y \to X)$ leží na AB a platí pro něj vztah $|(ABS)| = 2$. Přímka XY prochází bodem C a bodem S.

Konstrukce. K_1: *Sestrojíme bod S, pro který platí $|(ABS)| = 2$.*

K_2: *Sestrojíme přímku SC, která protne přímku a v bodě X a přímku b v bodě Y.*

Důkaz konstrukce. Stejnolehlost H se středem S a $|\varkappa| = 2$ zobrazuje úsečku BY ležící na b na úsečku AX ležící na $a \parallel b$. Je $AX = |\varkappa| . BY = 2 . BY$ a přímka XY prochází bodem C.

Diskuse. Při konstrukci K_1 sestrojíme dva body S, $(ABS_1) = 2$, $(ABS_2) = -2$. Je-li $S \not\equiv C$, existuje jediná přímka SC, je-li $S \equiv C$, existuje nekonečně mnoho přímek procházejících body S, C. Body X, Y existují, pokud není $SC \parallel a$. Úloha může mít nekonečně mnoho, dvě nebo jedno řešení.

97. Řešte úlohu v příkladě 5, je-li místo bodu C dán směr hledané přímky XY.

98. Jsou dány různoběžky a, b, bod A ležící na a, bod B ležící na b a směr s různoběžný s a, b. Sestrojte přímku směru s, která protne přímku a v bodě X a přímku b v bodě Y tak, že je $AX = 2 . BY$. [Veďte bodem A přímku $a' \parallel b$, sestrojte její průsečík X' s XY a určete vztah úseček AX', BY.]

27. Rozsáhlou skupinu úloh tvoří úlohy typu b). Uvedeme ty úlohy tohoto typu, které požadují sestrojení útvaru (lomené čáry nebo kružnice), jehož význačné body leží na dvou přímkách. Stejnolehlosti používáme v případě, kdy jsou přímky různoběžné.

Při řešení těchto úloh pracujeme s množinou všech stejnolehlostí, které mají společný střed. Není to nic těžkého, potřebujeme jen následující věty:

Je-li dán bod S a bod $A \not\equiv S$, je množinou obrazů bodu A ve všech stejnolehlostech se středem S přímka AS bez bodů A, S. Správnost věty je zřejmá. Z definice stejnolehlosti víme, že obraz bodu A v libovolné stejnolehlosti se středem S leží na přímce AS a je $A \not\equiv S$. Je-li obráceně bod $A' \not\equiv A, S$ libovolným bodem přímky AS, existuje právě jedna stejnolehlost $H\,(S, A \rightarrow A')$.

Je samozřejmé, že *množinou bodů roviny, které mohou být* *zobrazeny do bodu A některou stejnolehlostí se středem S, je opět přímka AS bez bodů A, S.*

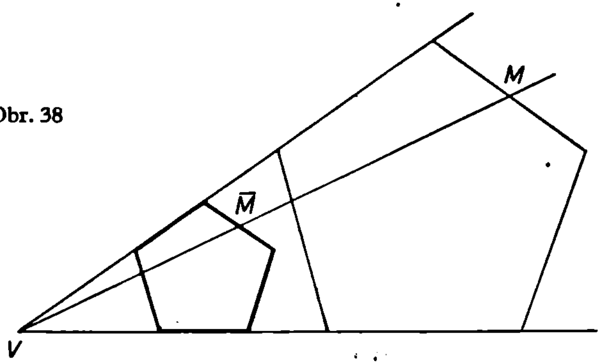
Začněme snadnou úlohou o pětiúhelníku.

Příklad 6. *Dvě nesousedící strany pravidelného pětiúhelníka byly prodlouženy tak, až vznikl vrchol V úhlu, na jehož ramenech leží strany pětiúhelníka. Uvnitř tohoto úhlu je dán bod M. Sestrojte pravidelný pětiúhelník, jehož dvě strany leží na ramenech úhlu a třetí prochází bodem M.*

Řešení. Hledaný pětiúhelník a narýsovaný pětiúhelník jsou stejnolehlé podle středu V. Existuje tedy stejnolehlost se středem V, která zobrazuje narýsovaný pětiúhelník v hledaný. Podle věty vyslovené před textem úlohy leží každý bod $\overline{M}$, který lze zobrazit do bodu M stejnolehlostí se středem V, na přímce VM. Současně leží M na některé straně daného pětiúhelníka.

Konstrukce. K_1: *Sestrojíme bod $\overline{M}$ ležící na obvodu daného pětiúhelníka a na přímce VM.*

K_2: *Zobrazíme daný pětiúhelník ve stejnolehlosti* $\mathrm{H}(V, \overline{M} \to M)$.



Obr. 38

Důkaz konstrukce je triviální.

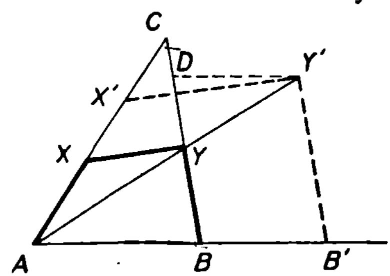
Diskuse spočívá v určení počtu bodů $\overline{M}$, protože konstrukce K_2 je jednoznačná. Existují zřejmě právě dva body $\overline{M}$ a tedy i právě dva pětiúhelníky požadovaných vlastností.

Řešení úlohy v příkladě 6 bylo usnadněno tím, že útvar stejnolehlý s hledaným byl již sestrojen. Zpravidla tomu tak nebývá, někdy je dokonce konstrukce takového útvaru „tvrdým oříškem", někdy není jednoznačná.

Příklad 7. *Je dán trojúhelník ABC. Sestrojte úsečku XY tak, aby bylo $AX = XY = YB$ a aby bod X ležel na přímce AC, bod Y na přímce BC.*

Rozbor. Představme si, že je dán úhel BAC a přímka BC. Lomená čára $AXYB$ (obr. 39) je řešením úlohy. Zobrazíme-li ji ve stejnolehlosti se středem A, přejde $X \to X'$, $Y \to Y'$, $B \to B'$ a bude platit $AX' = X'Y' = Y'B'$, $Y'B' \parallel CB$.

Předpokládejme, že máme sestrojenu lomenou čáru $AX'Y'B'$, která má výše uvedené vlastnosti. Potom je hledaná lomená čára obrazem této čáry ve stejnolehlosti



Obr. 39

$H\ (A \to A,\ X' \to X,\ Y' \to Y,\ B' \to B)$. Bod Y je společným bodem přímky BC a AY'.

Konstrukce. K_1: *Sestrojíme lomenou čáru $AX'Y'B'$ s vlastnostmi uvedenými v rozboru úlohy*).*

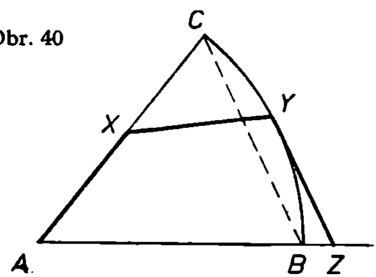
K_2: *Sestrojíme bod Y jako společný bod přímky AY' s přímkou BC.*

K_3: *Sestrojíme lomenou čáru $AXYB$ jako obraz lomené čáry $AX'Y'B'$ v $H\ (A \to A,\ Y' \to Y)$.*

Důkaz správnosti konstrukce vyžaduje, abychom dokázali nejdříve správnost konstrukce K_1 popsané v poznámce. Proveďte si tento důkaz, správnost celé konstrukce je pak zřejmá z přiřazení, které provádí stejnolehlost H.

Diskuse. Konstrukce K_3 je jednoznačná, K_2 má jediné nebo žádné řešení. Konstrukce K_1 může mít až čtyři různá řešení. Daná úloha má tedy nejvýše čtyři řešení. Při kolika z nich leží body X, Y uvnitř stran AC, BC trojúhelníka ABC?

Obr. 40



*) Abychom netříštili postup řešení dané úlohy, popišme konstrukci lomené čáry $AX'Y'B'$ zde. Při volbě bodu X' přímky AC leží bod Y na $k\ (X', X'A')$ a na rovnoběžce vedené bodem D s AB. Bod D leží na BC a platí $BD = AX'$.

Všimněte si, že přímka BC udává jednak směr úsečky YB hledané lomené čáry, jednak se uplatňuje jako jedna základní křivka, která obsahuje bod Y. Udáme-li pro úsečku YB samostatnou podmínku směru, může být přímka BC nahrazena kterýmkoliv útvarem (kružnicí, obloukem kružnice, obvodem trojúhelníka atd.).

99. Je dána kruhová výseč ABC (obr. 40). Sestrojte lomenou čáru $AXYZ$ tak, aby bod X ležel na přímce AC, bod Y na oblouku BC, bod Z na AB a aby platilo $AX = XY = YZ$, $YZ \parallel BC$.

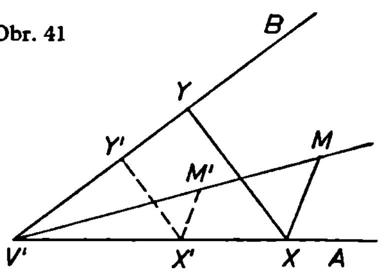
100. Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 a na každé z nich jeden bod. Sestrojte dvě shodné kružnice, které se dotýkají navzájem a každá z nich ještě jedné dané kružnice v daném bodě.

28.* Uvedeme nyní úlohy, na základě kterých lze sestrojovat průsečíky přímky s kuželosečkou. Přečtěte si znovu odst. **10** v kapitole I.

Příklad 8. *Je dán úhel AVB a jeho vnitřní bod M. Sestrojte bod X přímky AV, jehož vzdálenost od VB je dvojnásobkem úsečky XM.*

Rozbor. Označíme-li písmenem Y patu kolmice z X na VB (obr. 41), je hledaný bod X vrcholem lomené čáry YXM, pro kterou platí $XY \perp VB$, Y leží na VB, X leží na VA, $XY : XM = 2 : 1$. Zobrazíme-li hledanou lomenou čáru v některé stejnolehlosti se středem V, H

Obr. 41



$(V \to V,\ Y \to Y',\ X \to X',\ M \to M')$, dostaneme lomenou čáru $Y'X'M'$; bod Y' leží na VB, X' na VA, M' na VM. Je také $X'Y' \perp VB$ a $X'Y' : X'M' = 2 : 1$.

Sestrojíme-li lomenou čáru $Y'X'M'$ tak, aby měla právě uvedené vlastnosti, získáme jejím zobrazením ve stejnolehlosti H^{-1} $(V \to V,\ M' \to M)$ hledanou lomenou čáru YXM a tím i bod X. Konstrukci lomené čáry $Y'X'M'$ můžeme provést tak, že zvolíme libovolně bod X' na VA, sestrojíme Y' jako patu kolmice z X' na VB a přímku VM přetneme kružnicí $k \equiv \left(X', \frac{1}{2} X'Y'\right)$ v bodě M'. Dokončete sami řešení této úlohy; získáte nejvýše dvě řešení.

101.* Je dáno ohnisko F a řídicí přímka d paraboly a další přímka p. Sestrojte pomocí stejnolehlosti nebo posunutí průsečíky přímky p s parabolou.

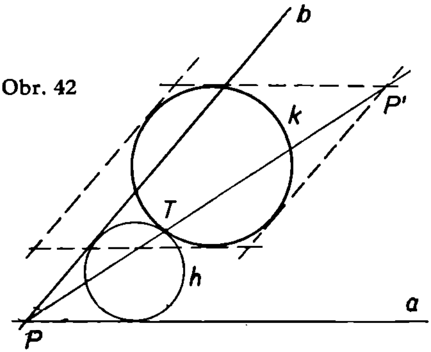
102.* Jsou dána ohniska elipsy a její hlavní vrcholy. Dále je dána přímka p, která protíná hlavní osu. Sestrojte průsečíky elipsy s přímkou p, využijete-li řídicí přímky elipsy (odst. 10 v kap. I).

29. Čtvrtý způsob konstruktivního využití stejnolehlosti je vhodný při některých úlohách o kružnicích. V rozboru takové úlohy *zvolíme za střed stejnolehlosti neznámý bod.* Sestrojíme jej pak na základě vlastností, které vyplývají z toho, že je středem stejnolehlosti zobrazující daný útvar v hledaný.

Příklad 9. *Jsou dány dvě různoběžky a, b a kružnice k, která se nedotýká žádné z nich. Sestrojte kružnici, která se dotýká přímek a, b i kružnice k.*

Rozbor. Hledaná kružnice h a daná kružnice k jsou stejnolehlé podle bodu dotyku T (obr. 42). Tato stejnolehlost H (s neznámým koeficientem) zobrazí tečny a, b kružnice h v tečny $a' \parallel a$, $b' \parallel b$ kružnice k. Ve stejnolehlosti H $(a \to a', b \to b')$ přejde průsečík P přímek a, b do bodu P' (průsečíku přímek a', b'). Aniž známe T, můžeme sestrojit přímky a', b' a jejich průsečík P'. Bod T pak leží na přímce PP' a na kružnici k. Hledaná kružnice h je obrazem dané kružnice ve stejnolehlosti H^{-1} $(T \to T, P' \to P)$.

Obr. 42



Konstrukce: K_1: *Sestrojíme tečny a', b' kružnice k tak, aby bylo $a' \parallel a$, $b' \parallel b$.*

K_2: *Sestrojíme průsečík P' přímek a', b'.*

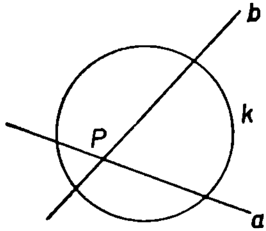
K_3: *Sestrojíme společný bod T kružnice k a přímky PP'.*

K_4: *Sestrojíme h jako obraz k v H^{-1} $(T \to T, P' \to P)$.*

Důkaz správnosti konstrukce je snadný. Z konstrukce K_1 plyne, že kružnice k se dotýká přímek a', b'. Stejnolehlostí H^{-1} zobrazíme $a' \to a$, $b' \to b$, $k \to h$. Dotýká se proto kružnice h přímek a, b. Protože střed stejnolehlosti leží na k, je bodem dotyku kružnice k a jejího obrazu, tj. kružnice h. Sestrojená kružnice má všechny požadované vlastnosti.

Diskuse. Konstrukcí K_1 získáme dvě tečny a' a dvě tečny

b' kružnice k, vesměs různé od přímek a, b. Konstrukcí K_2 získáme čtyři body $P' \not\equiv P$ jako vrcholy rovnoběžníka opsaného kružnici k. Každá přímka PP' protne k ve dvou bodech T_1, T_2 nebo nemá s k společný bod. Vznikne tedy nejvýše osm bodů T. Jaké jsou další možnosti pro počet bodů T? Na obr. 43 vidíte polohu přímek a, b a kružnice k, při které vznikne osm bodů T.



Obr. 43

103. Narýsujte si osm kružnic, které jsou řešením úlohy na obr. 43.
104. Zvolte polohu přímek a, b a kružnice k tak, aby body P' byly vrcholy čtverce se středem P. Body T pak po dvou splývají, ale osm stejnolehlostí zůstává, odlište si je navzájem.
105. Jak probíhá řešení úlohy, dotýká-li se daná kružnice k jedné z přímek a, b nebo obou?