O podobnosti v geometrii

Kapitola III. Stejnolehlá zobrazení

In: Jaroslav Šedivý (author): O podobnosti v geometrii. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1963. pp. 34–47.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403486

KAPITOLA III

STEJNOLEHLÁ ZOBRAZENÍ

●

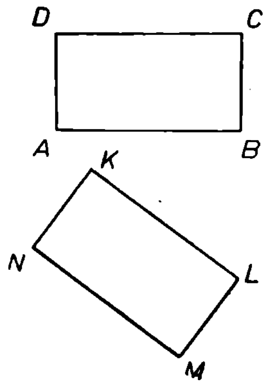
V prvních dvou kapitolách jsme hovořili o shodných, stejnolehlých a podobných útvarech. Jen na několika místech jsme se zmínili o souměrnostech a stejnolehlostech. V dalších kapitolách se budeme zabývat stejnolehlými a podobnými zobrazeními, především jejich konstruktivním využitím.

18. Zobrazení v rovině. Víte, že shodnost útvarů ověřujeme pomocí přemístění. Sledujeme-li při přemístění útvaru, jak se přemisťují jeho jednotlivé body, můžeme rozlišovat různá přemístění jednoho útvaru na druhý.

Dvě přemístění útvaru U_1 *na útvar* U_2 *považujeme za různá, přiřazují-li (aspoň) jednomu bodu útvaru* U_1 *různé body útvaru* U_2.

Obdélník $ABCD$ na obr. 24 lze přemístit na obdélník $KLMN$ tak, že přejde $A \rightarrow K$, $B \rightarrow L$, $C \rightarrow M$, $D \rightarrow N$.*) Při jiném možném přemístění přiřadíme např. $A \rightarrow M$, $B \rightarrow N$, $C \rightarrow K$, $D \rightarrow L$. Která jsou další možná přemístění obdélníka $ABCD$ na obdélník $KLMN$? Který bod obdélníka $ABCD$ přejde ve všech těchto přemístěních v týž bod obdélníka $KLMN$?

*) Šipkou nahrazujeme slova „do bodu“, která bychom museli stále opakovat. Při zápisu přiřazování bodů budeme užívat šipek.



Obr. 24

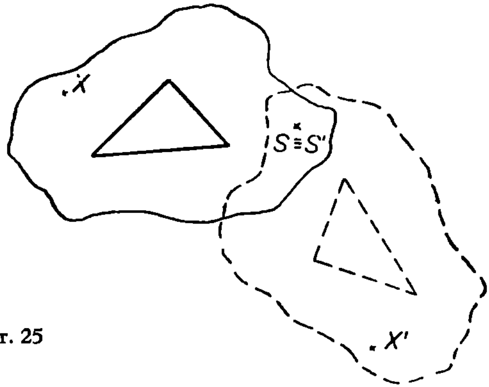
71. Kolika různými přemístěními lze dosáhnout toho, že se kryjí dvě shodné desky mající tvar pravidelných šestiúhelníků? Označte si jejich vrcholy písmeny a zapište přiřazení bodů pomocí šipek. [Je dvanáct možností.]

Přemisťujeme-li jeden rovinný útvar, např. trojúhelník ABC, můžeme s ním současně přemístit i libovolně velkou část roviny (obr. 25). Každému bodu X této části roviny přiřadíme při přemístění $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$ bod X' roviny. Může se stát, že se některý bod roviny „vrátí na své místo", takový bod nazveme samodružným v daném přemístění (na obr. 25 je $S \equiv S'$).

Představíme-li si, že při přemístění trojúhelníka ABC na trojúhelník $A'B'C'$ přemisťujeme celou rovinu, kryje se přemístěná rovina s původní rovinou.*) Každému bodu roviny přiřazujeme tímto přemístěním právě jeden bod roviny.

Předpis, kterým přiřadíme každému bodu X roviny právě jeden bod X' této roviny (je lhostejno, zda je $X \equiv X'$

*) Na tom není nic divného, vždyť i kruh můžeme přemístit nekonečně mnoha způsoby tak, že se kryje se svou původní polohou.



Obr. 25

nebo $X \not\equiv X'$*), nazýváme zobrazením v rovině. Bod* X *nazýváme vzorem a bod* X' *jeho obrazem v daném zobrazení.*

Předpis, kterým přiřadíme každému bodu X roviny bod $X' \equiv S$, je jistým zobrazením v rovině, ovšem málo zajímavým. Předpis, kterým přiřadíme každému bodu X roviny bod $X' \equiv X$, určuje zobrazení v rovině, které nazýváme *identitou.* Předpis pro středovou souměrnost se středem S může znít např. takto: bodu S přiřadíme bod S, každému bodu $X \not\equiv S$ přiřadíme bod X' polopřímky opačné k polopřímce SX, pro který platí $SX' = SX$.

72. Formulujte předpis pro osovou souměrnost a otočení. Předpis pro posunutí je uveden ve třetím svazku knižnice na str. 53. [Popište geometrickými termíny konstrukci obrazu bodu ve jmenovaných zobrazeních.]

Budeme se zabývat výhradně těmi zobrazeními, která

1. *přiřazují každým dvěma různým bodům roviny opět dva různé body,*
2. *vyplní obrazy bodů roviny celou rovinu.*

V takových zobrazeních je každý bod roviny vzorem jednoho bodu a současně obrazem jednoho bodu roviny. Shodná zobrazení v rovině mají obě uvedené vlastnosti. *Zobrazení, která mají vlastnosti* 1. *a* 2. *nazveme prostá zobrazení roviny na rovinu.*

73. Ověřte, že všechna známá shodná zobrazení a stejnolehlost jsou prostá zobrazení roviny na rovinu.

19. Symbolika. Chceme-li pracovat se zobrazeními, je užitečné, abychom si je označili písmeny. Užíváme písmen velké latinské abecedy, např. **Z**, **O**, **S**, **H**, **P**, **R**, **T**, **K**. V tisku je odlišujeme od písmen označujících body polotučným typem písma, v rukopise obvykle tím, že použijeme velkých psacích písmen.

Zápis **Z** $(X \to X')$ čteme jako „zobrazení **Z** přiřazuje bodu X bod X'“. Zápis **Z** $(\triangle ABC \to \triangle A'B'C')$ čteme slovy „zobrazení **Z** zobrazuje trojúhelník ABC na trojúhelník $A'B'C'$“.

74. Přečtěte slovy tyto zápisy: **H**$(S \to S)$, **T**$(AB \to CD)$, **R**$(\sphericalangle SMD \to \sphericalangle RUV)$.

75. Zapište značkami tyto věty:

a) Otočení **R** přiřazuje bodu U bod H' a bodu T bod N,

b) kružnice k je zobrazena posunutím **T** na kružnici k_1,

c) čtyřúhelník $ABCD$ přechází souměrností **S** na čtyřúhelník $DLKV$.

Označíme-li při řešení úloh některé prosté zobrazení roviny na rovinu symbolem **H**, použijeme zpravidla v téže úloze i symbolu $\mathbf{H}^{-1}$. Jestliže **H**$(X \to X')$, pak $\mathbf{H}^{-1}$ $(X' \to X)$, jde tedy o „opačná“ zobrazení, mají stejné dvojice vzoru a obrazu, ale bod, který je v jednom vzorem, je ve druhém obrazem a obráceně. O takových dvou zobrazeních říkáme, že jsou *navzájem inversní*.

K otočení **R** kolem středu S o úhel α v kladném smyslu je inversním zobrazením R^{-1} opět otočení kolem S o úhel α, ale v záporném smyslu. Ke stejnolehlosti H se středem S a koeficientem $\varkappa$ je inversním zobrazením stejnolehlost H^{-1} s koeficientem $\frac{1}{\varkappa}$.

76. Jakými vektory jsou určena navzájem opačná posunutí?
77. Dokažte, že pro osovou souměrnost O a středovou souměrnost S platí $O = O^{-1}$, $S = S^{-1}$.

20. Stejnolehlá zobrazení. Význačnou vlastností stejnolehlosti je to, že zobrazuje každou přímku p na přímku p' rovnoběžnou s p. Tuto vlastnost nemají jen stejnolehlosti, ale také posunutí a samozřejmě identita (v identitě je $p \equiv p'$, tedy také $p \parallel p'$).

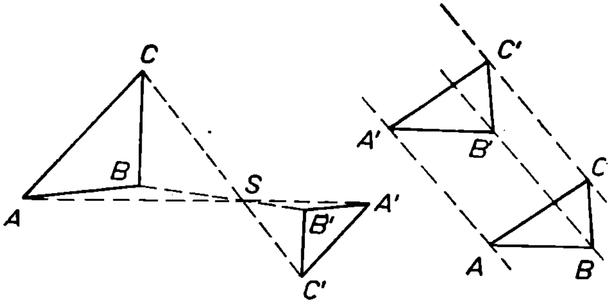
Prostá zobrazení roviny na rovinu, která zobrazují každou přímku na přímku s ní rovnoběžnou, nazveme stejnolehlými zobrazeními v rovině.

Zobrazíme-li trojúhelník ABC v některém stejnolehlém zobrazení, získáme trojúhelník $A'B'C'$, pro který platí $A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel BC$, $C'A' \parallel CA$ (obr. 26). Trojúhelníky s touto vlastností nazveme stejnolehlými trojúhelníky. Platí tato věta:

Jsou-li dány dva stejnolehlé trojúhelníky, existuje stejnolehlé zobrazení, které zobrazí jeden trojúhelník na druhý.

Spojíme-li odpovídající si vrcholy obou trojúhelníků, protnou se nám tyto přímky v jednom bodě nebo jsou navzájem rovnoběžné.*) V prvním případě je možno zobrazit jeden trojúhelník na druhý stejnolehlostí se středem S (obr. 26), ve druhém případě posunutím.

*) Předpokládáme, že trojúhelníky jsou různé; jsou-li totožné, není třeba žádných konstrukcí, protože můžeme zobrazit jeden na druhý identitou.



Obr. 26

78. Zvolte stejnolehlé trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ tak, že je $A \equiv B'$, $B \equiv A'$. Sestrojte jejich střed stejnolehlosti.
79. Prodlužte strany AB, CD, EF pravidelného šestiúhelníka $ABCDEF$ tak, aby vznikl trojúhelník KLM. Určete středy stejnolehlostí, kterými lze zobrazit trojúhelník KLM na rovnostranné trojúhelníky, z nichž se skládá šestiúhelník.
80.* Zobrazte v rovině trojúhelníkovou síť a zvolte pevně jeden trojúhelník sítě. Určete množinu středů stejnolehlostí, kterými lze zvolený trojúhelník zobrazit na „větší" trojúhelníky (sestavené ze čtyř, děvíti atd. trojúhelníků sítě).

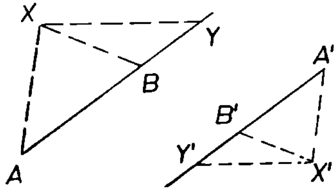
Jsou-li dány dvě rovnoběžné úsečky AB, $A'B'$ (obr. 27), existuje právě jedno stejnolehlé zobrazení, které zobrazí $A \to A'$, $B \to B'$.

Libovolnému bodu X roviny, který neleží na AB, přiřazuje toto zobrazení průsečík X' přímek vedených body A', B' rovnoběžně s přímkami AX, BX. Bodu Y přímky AB můžeme přiřadit obraz Y' pomocí bodů X, X' (obr. 27).

81. Sestrojte střed stejnolehlosti úseček AB, $A'B'$ na obr. 27.
82. Dokažte, že pro obrazy A', B', C' bodů A, B, C v libovolném stejnolehlém zobrazení platí buď $(A'B'C') = (ABC)$ nebo $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

83. Vepište do dané kružnice trojúhelník stejnolehlý s daným pravoúhlým trojúhelníkem ABC. [Zvolte v kružnici průměr rovnoběžný s přeponou trojúhelníka. Jsou dvě řešení!]

84.* Dokažte, že každé dvě paraboly s rovnoběžnými osami jsou stejnolehlé. Použijte stejnolehlosti úseček F_1V_1, F_2V_2, určených ohnisky a vrcholy parabol. Ukažte, že touto stejnolehlostí lze zobrazit jednu parabolu na druhou.



Obr. 27

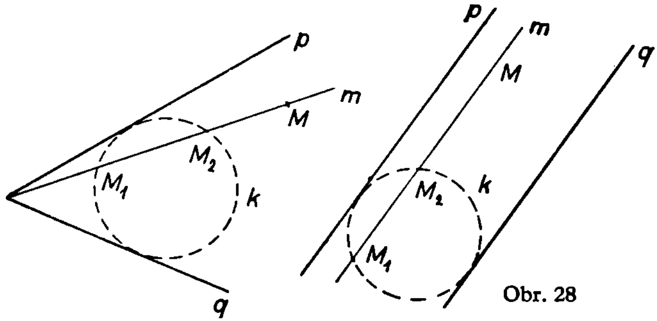
21. Pomocí pojmu stejnolehlých zobrazení můžeme odstranit některé potíže při formulaci vět o stejnolehlosti útvarů a konstrukcích útvarů pomocí stejnolehlosti.

Tak např. při formulaci věty o stejnolehlosti kružnic říkáme, že dvě neshodné kružnice jsou stejnolehlé dvěma způsoby a shodné kružnice jedním způsobem (neexistuje vnější střed stejnolehlosti shodných kružnic). Pomocí pojmu stejnolehlých zobrazení můžeme vyslovit jednotnou větu pro oba případy:

Jsou-li dány dvě libovolné kružnice k_1, k_2 v rovině, existují právě dvě stejnolehlá zobrazení, která zobrazí k_1 na k_2.

Dokažte větu diskusí všech tří možností (k_1, k_2 neshodné, shodné různé a totožné). V posledním případě je jedním ze stejnolehlých zobrazení identita.

Úlohy, ve kterých se využívá stejnolehlosti se středem v průsečíku různoběžek, lze řešit v případě rovnoběžek tak, že „zastoupíme" stejnolehlost posunutím. Uveďme jako příklad známou úlohu na *sestrojení kružnice, která se dotýká dvou přímek p, q a prochází daným bodem M* (obr. 28).



Obr. 28

Její řešení dobře znáte v případě, kdy jsou p, q různoběžky. Tehdy sestrojíme libovolnou kružnici k, která se dotýká přímek p, q a zobrazíme ji ve stejnolehlosti se středem S tak, aby jeden bod kružnice k přešel do bodu M. Jsou-li přímky p, q rovnoběžné (text úlohy to nevylučuje), můžeme řešit úlohu zcela obdobně, kružnici k však nezobrazujeme ve stejnolehlosti, ale v posunutí.

V obou případech zobrazujeme body M_1, M_2 kružnice k do bodu M stejnolehlým zobrazením. Body M_1, M_2 leží na přímce m spojující bod M s průsečíkem S přímek p, q nebo rovnoběžné s p, q.

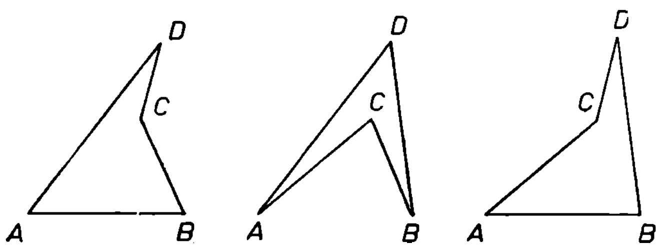
Úlohy tohoto typu budeme řešit v následující kapitole, pokuste se vyřešit jednu takovou „dvojitou" úlohu již teď.

85. Jsou dány dvě přímky p, q, bod M a směr s různoběžný s p, q. Sestrojte úsečku $PQ \parallel s$, jejíž krajní body leží na p, q a která je vidět z bodu M pod úhlem 60°. [V obou případech sestrojte libovolnou

úsečku $P_1Q_1 \parallel s$ a množinu μ $(P_1, Q_1, 60°)$. Použijte přímky m jako na obr. 28 a vhodných stejnolehlých zobrazení.]

22. Konstrukce čtyřúhelníků. Již ve třetím svazku knižnice je stručná zmínka o sestrojování čtyřúhelníků pomocí posunutí. Ve zbývajících odstavcích této kapitoly se seznámíme důkladněji s konstrukcemi čtyřúhelníků pomocí posunutí, jednoho ze stejnolehlých zobrazení. Konstruktivnímu využití stejnolehlosti budeme věnovat samostatnou kapitolu.

Zjistíme-li o třech bodech roviny, že jsou vrcholy trojúhelníka, můžeme trojúhelník jednoznačně sestrojit. U čtyřúhelníků tomu tak není, protože *čtyřúhelník**) *není svými vrcholy jednoznačně určen.* Může proto dojít k paradoxní situaci, kterou vidíte na obr. 29. Jsou na něm zobrazeny tři čtyřúhelníky, které nelze přemístěním ztotožnit, ačkoliv jejich vrcholy lze přemístěním ztotožnit.

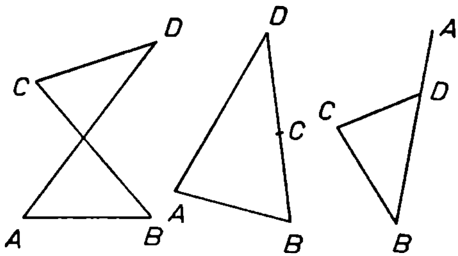


Obr. 29

*) Čtyřúhelníkem rozumíme útvar, který je sjednocením dvou trojúhelníků se společnou stranou, které leží v různých polorovinách vzhledem ke společné straně a nemají žádné další strany na jedné přímce. Může tedy jít o čtyřúhelníky vypuklé i nevypuklé.

Čtyřúhelník považujeme za sestrojený, je-li sestrojena lomená čára jeho obvodu. V zápisu čtyřúhelníka uvádíme vrcholy v tom pořadí, jak jimi procházíme při vyznačování obvodu jedním tahem. Na obr. 29 jde o čtyřúhelníky $ABCD$, $ACBD$, $ABDC$.

Každá lomená čára $ABCDA$ nemusí být obvodem čtyřúhelníka. Na obr. 30 jsou zakresleny tři typy lomených

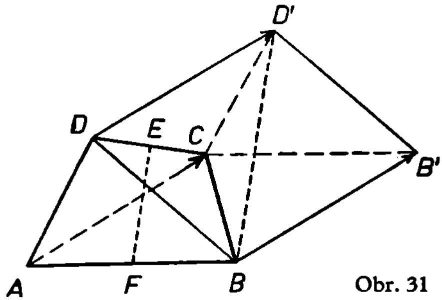


Obr. 30

čar, které nejsou obvody čtyřúhelníků. Přesto se první z nich nazývá někdy zkříženým čtyřúhelníkem. Často nám při konstrukcích vyjdou jako výsledek konstrukce i lomené čáry z obr. 30. Je to přirozený důsledek úmluvy o sestrojování čtyřúhelníků (sestrojujeme lomenou čáru, která má jisté vlastnosti).

86. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, pro který platí:
a) $AB = 3, BC = 4, AC = 5, CD = 6, DA = 7$,
b) $AB = 5, AC = 4, CD = 5, \sphericalangle ABC = 45°, \sphericalangle BAD = 90°$,
c) $AB = 4, AC = 6, \sphericalangle ABC = 60°, \sphericalangle ADB = 60°, \sphericalangle ADC = 30°$.
Kolik bodů C, D můžete sestrojit, umístíte-li úsečku AB? Sestrojte všechny lomené čáry $ABCDA$. Které z nich jsou obvody čtyřúhelníků?

23. Kouzelný rovnoběžník. Každé lomené čáře $ABCDA$ můžeme přiřadit význačné rovnoběžníky. Sledujte konstrukci jednoho z nich na obr. 31. Vyznačíme si úhlopříčku BD lomené čáry a posuneme body B, D o vektor



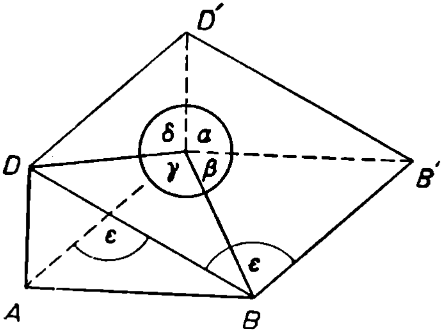
Obr. 31

AC druhé úhlopříčky do poloh B', D'. *Rovnoběžník $DBB'D'$* v sobě „koncentruje“ vlastnosti lomené čáry, *nazveme* jej *význačným rovnoběžníkem lomené čáry $ABCDA$.*

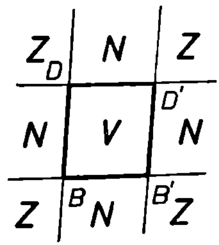
Strany rovnoběžníka $DBB'D'$ jsou shodné s úhlopříčkami BD, AC lomené čáry. Úsečky CB', CB, CD, CD' jsou po řadě shodné s úsečkami AB, BC, CD, DA lomené čáry. Střed strany CD je středem rovnoběžníka $ACD'D$, střední příčka EF lomené čáry je rovnoběžná s úhlopříčkou BD' význačného rovnoběžníka, platí zřejmě $BD' = 2.EF$.

Je-li lomená čára obvodem vypuklého čtyřúhelníka, leží bod C uvnitř význačného rovnoběžníka $DBB'D'$. Je společným vrcholem úhlů α', β', γ', δ' shodných s vnitřními úhly čtyřúhelníka (obr. 32). Úhel $\varepsilon = \sphericalangle AUB$ je shodný s jedním vnitřním úhlem význačného rovnoběžníka.

Každé uzavřené lomené čáře $ABCDA$ umíme přiřadit její význačný rovnoběžník $DBB'D'$. Zvolíme-li naopak libovolný rovnoběžník $DBB'D'$ a *bod* C *různý od jeho vrcholů*, můžeme sestrojit lomenou čáru $ABCDA$, pro kterou je daný rovnoběžník význačným rovnoběžníkem. Postačí, posuneme-li bod C do bodu A o vektor $B'B$. Proveďte si konstrukci na vlastním obrázku.



Obr. 32



Obr. 33

Umístíme-li pevně rovnoběžník $DBB'D'$, vyjde nám podle volby bodu C lomená čára $ABCDA$ jako obvod vypuklého, nevypuklého nebo zkříženého čtyřúhelníka. Zvolíme-li bod C na některé z přímek DB, BB', $B'D'$, $D'D$, dostaneme lomené čáry těch typů, které jsme zobrazili na obr. 30. Na obr. 33 jsou označeny písmeny V, N, Z ty oblasti roviny, pro jejichž *vnitřní body* C dostaneme vypuklý, nevypuklý nebo zkřížený čtyřúhelník.

87. Jaké význačné rovnoběžníky přísluší čtvercům? Které čtyřúhelníky mají význačné obdélníky?
88. Jak můžete charakterizovat význačné rovnoběžníky rovnoběžníků a lichoběžníků?
89. Dokažte, že význačný rovnoběžník vypuklého čtyřúhelníka má dvojnásobný obsah než čtyřúhelník.

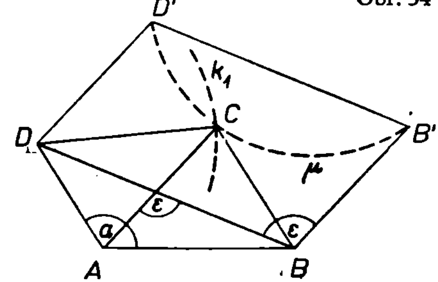
24. Vlastností význačného rovnoběžníka lze výhodně využít ke konstrukcím čtyřúhelníků. Jsou-li dány takové prvky čtyřúhelníka, že z nich snadno sestrojíme jeho význačný rovnoběžník a jeden vrchol čtyřúhelníka, sestrojíme snadno hledaný čtyřúhelník.

Příklad 2. *Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jsou-li dány jeho úhlopříčky AC, BD, úhel $\varepsilon = \sphericalangle AUB$ jimi sevřený, úhel α a strana CD.*

Rozbor. Má-li čtyřúhelník $ABCD$ požadované vlastnosti (obr. 34), má jeho význačný rovnoběžník stranu $BB' = AC$ a $\sphericalangle DBB' = \varepsilon$. Na základě těchto údajů můžeme rovnoběžník $DBB'D'$ sestrojit. Vrchol C hledaného čtyřúhelníka leží pak na kružnici $k_1 \equiv (D, CD)$ a náleží množině bodů $\mu\ (B', D', \alpha)$. Bod A je obrazem bodu C v posunutí $T\ (B' \rightarrow B)$.

Konstrukce K_1: *Sestrojíme rovnoběžník* $DBB'D'$.
K_2: *Sestrojíme kružnici* $k_1 \equiv (D, CD)$.
K_3: *Sestrojíme* $\mu\ (B', D', \alpha)$.
K_4: *Sestrojíme bod C jako společný bod kružnice k a množiny μ.*
K_5: *Sestrojíme bod A jako obraz bodu C v $T\ (B' \rightarrow B)$.*

Obr. 34



K_6: Sestrojíme lomenou čáru ABCDA.

Důkaz konstrukce plyne z dříve uvedených vlastností význačného čtyřúhelníka.

Diskuse. Počet řešení*) je roven počtu bodů C, protože všechny konstrukce kromě K_4 jsou jednoznačné. Můžeme získat nejvýše čtyři řešení.

90. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, je-li kromě AC, BD, ε dáno
a) AB, CD b) AD, β c) α, β d) $AD : BC = 1 : 3$, γ

91. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, je-li dáno a) AC, BD, AB, CD, b) AC, BD, ε, BC.

92. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, je-li dáno AC, BD, α, γ a střední příčka EF (úsečka spojující středy stran AB, CD).

93. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, je-li dáno AC, BD, EF a poměry $AB : CD$, $BC : DA$. [Využijte Apolloniovy kružnice.]

*) Řešením rozumíme uzavřenou lomenou čáru $ABCDA$. Není snadné rozhodnout, kolik z těchto čar je obvodem vypuklého čtyřúhelníka.