O podobnosti v geometrii

Kapitola II. O trojúhelníku a kružnici

In: Jaroslav Šedivý (author): O podobnosti v geometrii. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1963. pp. 23–33.

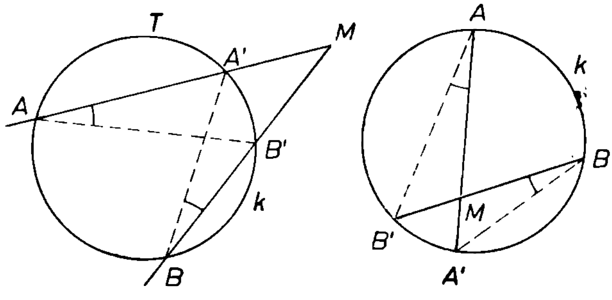
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403485

KAPITOLA II

O TROJÚHELNÍKU A KRUŽNICI

Ve druhé kapitole si připomeneme úzkou souvislost mocnosti bodu ke kružnici s podobností trojúhelníků. Využijeme jí k odvození jedné nutné a postačující podmínky pro to, aby čtyři body roviny ležely na jedné kružnici. V dalších odstavcích se budeme zabývat význačnými body, přímkami a kružnicemi trojúhelníků.

11. Mocnost bodu ke kružnici. Nechť je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a bod M neležící na této kružnici (obr. 15a, b). V bodě M se protínají (případně po prodloužení) tětivy AA', BB' kružnice k. Pomocí obvodových úhlů snadno dokážeme, že je $\triangle AMB' \sim \triangle BMA'$, platí proto



Obr. 15 a, b

$MA : MB' = MB : MA'$ a $MA . MA' = MB . MB'$. Tento součin je konstantní při jakékoliv poloze sečen AA', BB' procházejících bodem M.

Leží-li bod M vně kružnice a vedeme-li sečnu AA' středem S kružnice (načrtněte si obrázek), je $MA . MA' = (MS + r)(MS - r) = MS^2 - r^2$. Leží-li M uvnitř kružnice k, získáme stejným postupem vztah $MA . MA' = r^2 - MS^2$.

Číslo $MS^2 - r^2$ nazýváme mocností bodu M ke kružnici $k \equiv (S, r)$.

Je tedy mocnost vnějšího bodu ke kružnici kladná a rovna přímo součinu úseků $MA . MA'$ na libovolné sečně AA' kružnice k. Mocnost vnitřních bodů ke kružnici je záporná a rovna opačnému číslu k součinu $MA . MA'$. Mocnost bodů kružnice k této kružnici je zřejmě nulová.

41. Je-li M vnějším bodem kružnice $k \equiv (S, r)$ a bod T bodem dotyku tečny z M ke k, je mocnost bodu M ke k rovna MT^2.

42. Který bod roviny má ke kružnici nejmenší mocnost?

43. Vyšetřete množinu bodů, které mají k dané kružnici stejnou mocnost.

44. Jakou mocnost má střed S_1 kružnice $k_1 \equiv (S_1, r_1)$ ke kružnici $k_2 \equiv (S_2, r_2)$, která k_1 kolmo protíná?

45. Sestrojte na sečně AA' kružnice k bod M ležící vně k tak, aby bod A dělil úsečku MA' v poměru zlatého řezu. (Určete mocnost M ke k.)

46. Je dána tětiva AB kružnice k a bod C kružnice k různý od bodů A, B. Sestrojte patu D kolmice z C na AB a paty E, F kolmic z bodů A, B na tečnu kružnice k v bodě C. Dokažte, že je $CD^2 = AE.BF$. [Existuje-li průsečík M tečny a přímky AB, využijte pravoúhlých trojúhelníků s vrcholem M.]

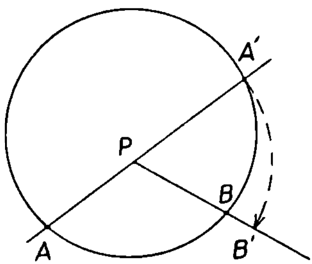
47.* Ukažte, že rovnice kružnice ve středovém tvaru charakterizuje body kružnice jako ty body roviny, které mají k dané kružnici nulovou mocnost.

48. Jsou-li dány úsečky a, b, sestrojte pomocí vhodně zvolené kružnice úsečku $x = \sqrt{ab}$.

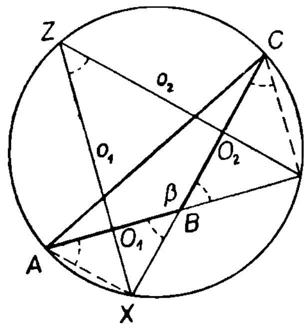
49. Jsou-li dány úsečky a, b, c, sestrojte úsečku x, pro kterou platí $ab = cx$. Využijte vhodně mocnosti bodu ke kružnici.

12. Na základě mocnosti bodu ke kružnici můžeme udat postačující podmínku pro to, aby čtyři různé body ležely na jedné kružnici.

Protínají-li se přímky AA', BB' v bodě P tak, že je $PA \, . \, PA' = PB \, . \, PB'$ a bod P leží současně uvnitř úseček AA', BB' nebo současně vně těchto úseček, leží body A, B, A', B' na jedné kružnici.



Obr. 16



Obr. 17

Větu snadno dokážete, sestrojíte-li kružnici, která prochází body A, A', B. Její společný bod B'' s přímkou BB' leží na polopřímce PB' a platí pro něj $PB' = PB''$, je proto $B' \equiv B''$. Na obr. 16 vidíte, že podmínka o poloze bodu P vzhledem k úsečkám AA', BB' nemůže být vynechána (na obrázku je $PA = PB$, $PA' = PB'$, $PA \, . \, PA' = PB \, . \, PB'$, ale body A, B, A', B' neleží na jedné kružnici).

Hravě dokážeme větu o pěti bodech ležících na kružnici.

Nechť je dán trojúhelník ABC, jehož úhel β není pravý. Sestrojme osu o_1 úsečky AB a osu o_2 úsečky BC. Průsečíky

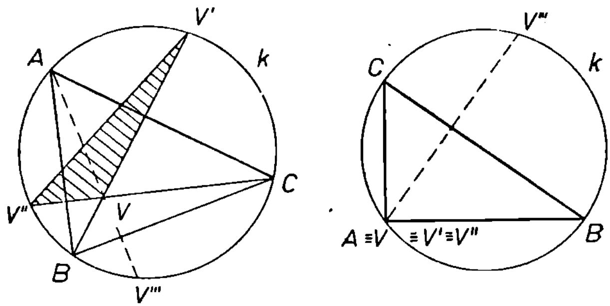
$X \equiv o_1 . BC$, $Y \equiv o_2 . AB$, $Z \equiv o_1 . o_2$ leží na jedné kružnici s body A, C.

Na obr. 17 je úhel β tupý. Podle věty *uu* o podobnosti trojúhelníků je $\triangle BO_1X \sim \triangle BO_2Y$, platí proto $BO_1 : BX = BO_2 : BY$, $2 . BO_1 . BY = 2 . BO_2 . BX$ a tedy také $BA . BY = BC . BX$. Protože je bod B vrcholem tupého úhlu, leží body X, Y na prodlouženích stran AB, BC za bod B a bod B je vnitřním bodem obou úseček AY, CX. Podle dříve dokázané věty leží body A, C, X, Y na jedné kružnici. Ze shodnosti obloučkem vyznačených úhlů na obr. 17 vyplývá, že i bod Z leží na jedné kružnici s body A, C, X, Y.

50. Dokažte, že body A, C, X, Y, Z leží na jedné kružnici i v případě, kdy je úhel β trojúhelníka ABC ostrý. Jak je tomu při $\beta = 90°$?
51. Dokažte pomocí podobnosti trojúhelníků, že každé dvě výšky trojúhelníka jsou tětivami jedné kružnice.
52. Je dána kružnice k a její nesečna PA. Bodem P prochází sečna XX' kružnice k. Dokažte, že kružnice procházející body X, X', A protnou přímku PA v témž bodě B, ať vedeme bodem P sečnu XX' jakkoliv.

13. Čím vyniká průsečík výšek. Pomocí podobnosti trojúhelníků můžeme dokázat zajímavé vlastnosti výšek trojúhelníka, jejich pat a průsečíku. Ještě „čerstvé" věty o pěti bodech na kružnici použijeme k důkazu věty, že *body souměrné s průsečíkem výšek podle stran trojúhelníka leží na kružnici trojúhelníku opsané.*

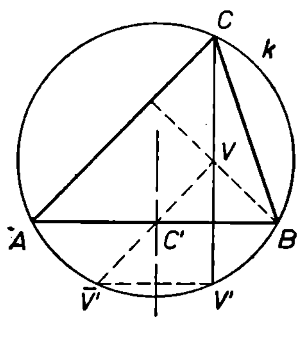
Není-li trojúhelník ABC pravoúhlý (obr. 18a), jsou body V', V'', V''' souměrné s V podle stran trojúhelníka navzájem různé. Na trojúhelník $V'V''V$ můžeme aplikovat větu o pěti bodech. Zjistíme, že body V', V'', A, B, C leží na jedné kružnici. Obdobnou úvahou o trojúhelníku $VV'V'''$ dokážeme, že i zbývající bod V''' leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC.



Obr. 18 a, b

Je-li trojúhelník ABC pravoúhlý s úhlem $\alpha = 90°$ (obr. 18b), je $V \equiv A$ a také $V' \equiv V'' \equiv V$. Bod V''' souměrný s V podle přepony BC leží na kružnici o průměru BC, která obsahuje i body $V' \equiv V'' \equiv A$.

Snadno lze dokázat, že *body souměrné s průsečíkem výšek podle středů stran trojúhelníka leží na kružnici trojúhelníku opsané.*



Obr. 19

Zobrazíme-li bod V v osové souměrnosti dle přímky AB (obr. 19), dostaneme bod V' ležící na kružnici k. Souměrností podle osy strany AB přiřadíme bodu V' bod $\bar{V}'$ kružnice k. Je zřejmé, že body V, $\bar{V}'$ jsou souměrné podle průsečíku os použitých souměrností, tj. podle středu strany AB.

53. Sestrojíte-li průsečík výšek V trojúhelníka ABC, který není pravoúhlý, získáte čtveřici bodů A, B, C, V. Každý z těchto bodů je průsečíkem výšek trojúhelníka určeného ostatními třemi.
54. Je-li trojúhelník ABC vepsán do kružnice k, dělí body A, B, C kružnici na tři oblouky. Překlopíme-li každý z nich podle jeho tětivy (strany trojúhelníka), získáme tři oblouky procházející jedním bodem. Který je to bod?
55. Jsou-li body A_1, B_1, C_1 patami výšek trojúhelníka ABC a bod V průsečíkem těchto výšek, je $AV.VA_1 = BV.VB_1 = CV.VC_1$. [Využijte mocnosti bodu V ke kružnici trojúhelníku opsané.]
56. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dán střed kružnice opsané, průsečík výšek a vrchol A.
57. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dán jeho vrchol C, těžiště T a průsečík výšek V. [Využijte středu strany AB.]

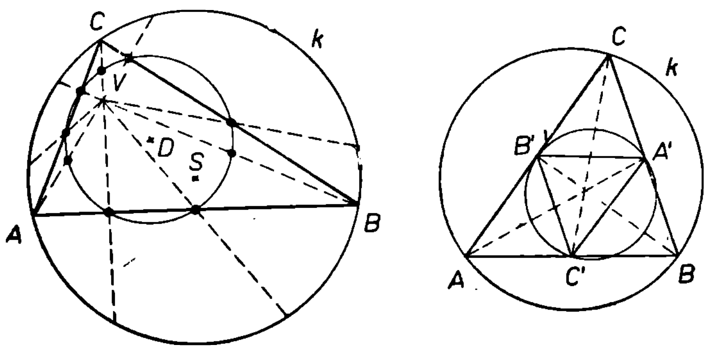
14. Kružnice devíti bodů. V minulém odstavci jsme dokázali, že na kružnici trojúhelníku opsané leží kromě vrcholů trojúhelníka ještě body souměrné s průsečíkem výšek podle stran trojúhelníka a podle středů těchto stran. Získáváme tak devět bodů (nikoliv nutně různých), které leží na kružnici k (obr. 20). Název kružnice devíti bodů však nedáváme této kružnici, ale kružnici s ní stejnolehlé, je-li středem stejnolehlosti bod V a koeficientem číslo $\varkappa = \frac{1}{2}$.

Zobrazíme-li v této stejnolehlosti všech devět bodů kružnice opsané, zjistíme, že

1. *paty výšek trojúhelníka,*

2. *středy stran trojúhelníka,*
3. *středy úseček spojujících průsečík výšek s vrcholy trojúhelníka, leží na jedné kružnici.*

Na obr. 20 jsou jmenované body vyznačeny jen plným kroužkem. Ze stejnolehlosti kružnic okamžitě vyplývá, že *střed D kružnice devíti bodů je středem úsečky spojující průsečík výšek se středem kružnice trojúhelníku opsané.* Poloměr kružnice devíti bodů je roven $\frac{1}{2}r$.



Obr. 20 a, b

58. Jaká je vzájemná poloha kružnice devíti bodů a kružnice trojúhelníku opsané? Kdy jsou soustředné? [Proberte jednotlivé typy trojúhelníků.]
59. Dokažte, že trojúhelníky *ABC, BCV, CVA, VAB* mají společnou kružnici devíti bodů. Co z toho plyne pro poloměry kružnic opsaných těmto trojúhelníkům?
60. Sestrojte trojúhelník $O_a\, O_b\, O_c$, jehož vrcholy jsou středy kružnic vně vepsaných trojúhelníku *ABC*. Určete kružnici devíti bodů trojúhelníka $O_a\, O_b\, O_c$.

15. Eulerova přímka. Víme, že na kružnici devíti bodů trojúhelníka ABC leží středy stran — body A', B', C'. Trojúhelník $A'B'C'$ je stejnolehlý s trojúhelníkem ABC podle těžiště T, koeficient stejnolehlosti zobrazující trojúhelník ABC na trojúhelník $A'B'C'$ je $\varkappa' = -\frac{1}{2}$. V této stejnolehlosti se zobrazí kružnice opsaná trojúhelníku ABC jako kružnice opsaná trojúhelníku $A'B'C'$, tj. jako kružnice devíti bodů trojúhelníka ABC (obr. 20b).

Těžiště trojúhelníka ABC je vnitřním středem stejnolehlosti kružnice devíti bodů a kružnice trojúhelníku opsané.

Střed stejnolehlosti dvou kružnic leží na jejich středné nebo splývá s jejich společným středem (jsou-li soustředné). Není-li trojúhelník ABC rovnostranný, není těžiště trojúhelníka středem kružnice opsané a leží proto na spojnici středu kružnice opsané a kružnice devíti bodů. Na této přímce leží i průsečík výšek, jak víme z odstavce 14.

Těžiště, průsečík výšek, střed kružnice trojúhelníku opsané a střed jeho kružnice devíti bodů leží na jedné přímce (tzv. Eulerově přímce trojúhelníka) *nebo splývají v jeden bod.*

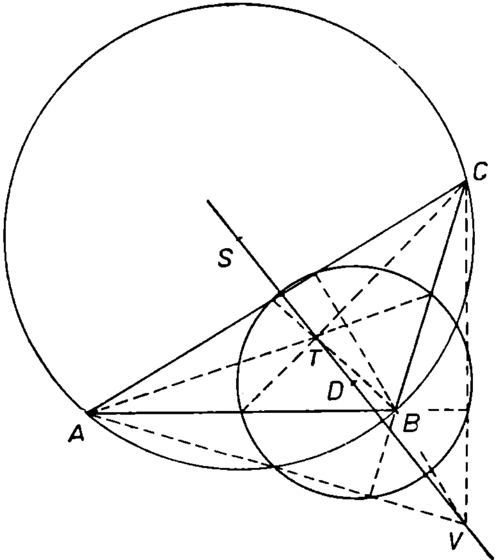
Zajímavá je i poloha jmenovaných bodů na Eulerově přímce. Na obr. 21 je sestrojena Eulerova přímka tupoúhlého trojúhelníka ABC. Bod D (střed kružnice devíti bodů) je středem úsečky SV, bod T leží uvnitř úsečky SD a dělí ji v poměru $2:1$ jako každou těžnici, je $ST = 2 . TD$.

61. Vyjádřete polohu bodu T vzhledem k bodům S, V dělicím poměrem.

62.* Dokažte, že body S, D, T, V tvoří harmonickou čtveřinu bodů na Eulerově přímce.

63. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:

a) těžiště T, střed kružnice opsané a poloměr kružnice devíti bodů,



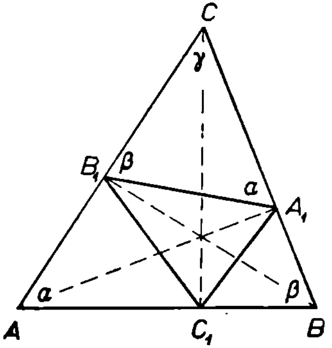
Obr. 21

b) těžiště T, střed kružnice devíti bodů a střed strany AC,
c) těžiště T, průsečík výšek V a pata jedné výšky. [Při rozboru stanovte dělicí poměry vhodných trojic bodů na Eulerově přímce. Z údajů ve cvičení a) lze sestrojit čtyři význačné body trojúhelníka ABC, které leží na Eulerově přímce, i kružnici trojúhelníku opsanou. Zamyslete se nad tím, zda může být libovolný bod této kružnice zvolen za vrchol A trojúhelníka.]

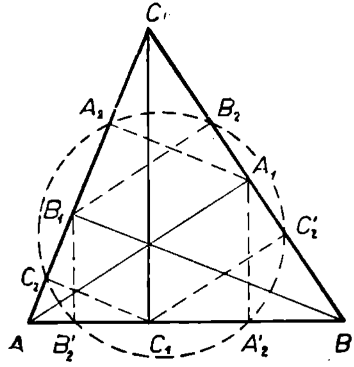
16. Trojúhelník pat výšek. Sestrojíme-li v ostroúhlém trojúhelníku ABC paty výšek — body A_1, B_1, C_1, rozdělíme úsečkami C_1A_1, B_1A_1, C_1B_1 daný trojúhelník na čtyři trojúhelníky (obr. 22).

Každý z trojúhelníků AB_1C_1, BA_1C_1, CB_1A_1 je podobný trojúhelníku ABC.

Důkaz tohoto tvrzení můžeme založit na známé vlastnosti vypuklých čtyřúhelníků vepsaných do kružnice (součet jejich protilehlých úhlů je úhel přímý). V ostroúhlém trojúhelníku leží body A_1, B_1 uvnitř stran BC, AC na kružnici o průměru AB. Je proto $\sphericalangle\ BAB_1 + \sphericalangle\ BA_1B_1 = 180°$ a také $\sphericalangle\ ABA_1 + \sphericalangle\ AB_1A_1 = 180°$. Snadno vypočítáte, že je $\sphericalangle\ A_1B_1C = \beta$ a $\sphericalangle\ B_1A_1C = \alpha$. Podle věty *uu* je $\triangle\ A_1B_1C \sim \triangle\ ABC$. Obdobně můžete dokázat podobnost zbývajících dvou trojúhelníků s trojúhelníkem ABC.



Obr. 22



Obr. 23

64. Využijte věty o obvodovém úhlu v kružnici k důkazu věty pro tupoúhlý trojúhelník.
65. Dokažte, že výšky ostroúhlého trojúhelníka ABC jsou osami úhlů trojúhelníka $A_1B_1C_1$ (tzv. *ortického trojúhelníka)*. [Označte si na obr. 22 všechny známé úhly písmeny α, β, γ.]
66. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dán jeho ortický trojúhelník $A_1B_1C_1$. [Využijte poznatků ze cvičení 65 a 63.]
67. Dokažte, že střed kružnice opsané trojúhelníku $O_aO_bO_c$ ze cvičení 60 je souměrný se středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC podle středu kružnice opsané trojúhelníku ABC.

17.* Kružnice šesti bodů. Sestrojíme-li ortický trojúhelník $A_1B_1C_1$ nepravoúhlého trojúhelníka ABC, můžeme sestrojit tzv. druhotné paty výšek, tj. paty kolmic vedených body A_1, B_1, C_1 ke stranám trojúhelníka ABC. Na obr. 23 je zobrazeno šest druhotných pat A_2, A'_2, B_2, B'_2, C_2, C'_2. Lze dokázat, že šest druhotných pat výšek leží na jedné kružnici.

Důkaz této věty pro ostroúhlý trojúhelník ABC (obr. 23) proveďte v těchto krocích:

a) dokažte na základě podobnosti trojúhelníků ABC a A_2B_2C, že je $A_2B_2 \parallel AB$,

b) dokažte pomocí čtyřúhelníka vepsaného do kružnice, že je $C_2C'_2 \parallel A_1B_1$,

c) dokažte, že čtyřúhelník $A_2B_2C_2C_2'$ lze vepsat do kružnice,

d) dokažte, že každý ze zbývajících bodů A'_2, B'_2 leží na jedné kružnici s body B_2, C_2, C'_2 nebo C_2, A_2, A'_2.

68.* Dokažte platnost vyslovené věty pro tupoúhlý trojúhelník.

69. Které body na obr. 1 jsou druhotnými patami výšek pravoúhlého trojúhelníka ABC? Leží na jedné kružnici?

70.* Pokračujte dále v sestrojování pat kolmic (z druhotných pat výšek znovu kolmice na strany trojúhelníka). Získáte 12 bodů, které neleží na jedné kružnici. Neleží však tyto body na dvou kružnicích?