O podobnosti v geometrii

Kapitola I. O poměrech

In: Jaroslav Šedivý (author): O podobnosti v geometrii. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1963. pp. 5–22.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403484

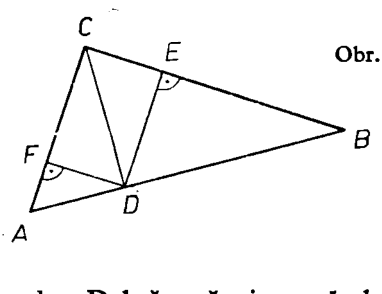
KAPITOLA I

O POMĚRECH

●

Podobnost trojúhelníků je silnou zbraní euklidovské geometrie. Využívá se jí nejen ke studiu trojúhelníků a mnohoúhelníků, ale i kružnic, kuželoseček a těles. V první kapitole si připomeneme souvislost podobnosti trojúhelníků s trigonometrií, hlavně se však budeme zabývat body a množinami bodů, které mají od daných bodů nebo přímek daný poměr vzdáleností.

1. Malá rozcvička. Na obr. 1 je zobrazen pravoúhlý trojúhelník ABC s několika příčkami kolmými k jeho stranám ($CD \perp AB$, $DE \perp BC$, $DF \perp CA$). Kolik trojúhelníků vidíte na obrázku? Podíváte-li se pozorně,



Obr. 1

uvidíte jich *sedm*. Dokažte, že jsou všechny navzájem podobné. Co by bylo možno o nich říci, kdyby trojúhelník ABC byl rovnoramenný pravoúhlý?

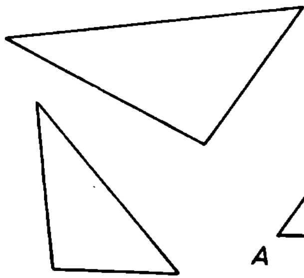
Víte, že na podobnosti trojúhelníků je založena trigonometrie pravoúhlého trojúhelníka. Zvolte v trojúhelníku ABC na obr. 1 úsečku CD za jednotkovou (tj. $CD = 1$) a vyjádřete délky úseček DA, DF, DE, DB, AC, BC jako hodnoty goniometrických funkcí úhlu α. Připíšete-li k úsečkám jejich velikosti, dostanete trigonometrii „na dlani". Pomocí vět Euklidových a věty Pythagorovy můžete pak snadno odvodit známé i méně známé vztahy mezi šesti goniometrickými funkcemi ostrého úhlu α.

1. Vyjádříte-li velikosti úseček na obr. 1 také jako hodnoty goniometrických funkcí úhlu β, můžete odvodit vztahy mezi goniometrickými funkcemi doplňkových úhlů α, β.
2. Dokažte pomocí goniometrického vyjádření velikostí úseček na obr. 1, že v každém pravoúhlém trojúhelníku ABC s úhlem $\gamma = 90°$ je $c + v_c > a + b$.
3. Vepište do pravoúhlého trojúhelníka dva čtverce, z nichž jeden má strany na odvěsnách a druhý má jednu stranu na přeponě (všechny vrcholy těchto čtverců leží na obvodu trojúhelníka). Zjistěte výpočtem, který z těchto čtverců má větší stranu.
4.* Pokračujte dále v konstrukci pat kolmic mezi rameny úhlů α, β na obr. 1 (z bodů E, F kolmice na AB, z pat těchto kolmic zpět kolmice na AC nebo BC atd.). Určete úhrnnou délku všech úseček, které lze tímto způsobem sestrojit.
5. Dokažte, že obsah ostroúhlého trojúhelníka ABC je číslo $P = \frac{abc}{4r}$, kde r je poloměr kružnice opsané. Použijte pravoúhlých trojúhelníků se stranami $\frac{1}{2}c$, r a v_b, a. Platí věta i pro pravoúhlé a tupoúhlé trojúhelníky?

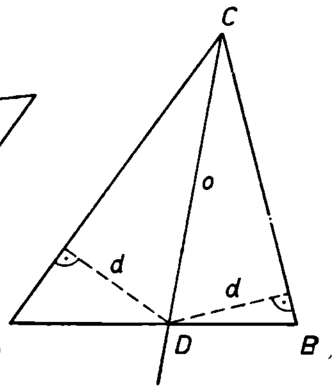
2. Zajímavé dvojice trojúhelníků. Víte, že dva trojúhelníky, které mají úměrné strany, jsou podobné. Zajímavou dvojicí podobných trojúhelníků jsou trojúhelníky, z nichž jeden má strany a, ka, k^2a a druhý ka, k^2a, k^3a (číslo $k \neq 1$ je kladné, $a > 0$). Tyto trojúhelníky se shodují v pěti dvojicích prvků (třech úhlech a dvou stranách), ale nejsou shodné.

Čím to je, že se vymykají větám o shodnosti trojúhelníků? Vyznačíte-li si na obr. 2 shodné strany trojúhelníků, najdete odpověď snadno.

6. Jakých hodnot může nabývat k, má-li být zajištěna existence trojúhelníka se stranami a, ka, k^2a?
7. Pro které hodnoty k je trojúhelník ze cvičení 6 pravoúhlý? Sestrojte jej.



Obr. 2



Obr. 3

Jinou zajímavou dvojicí trojúhelníků jsou trojúhelníky ADC, BDC na obr. 3. Bod D je průsečíkem osy úhlu γ s přímkou AB, má proto od přímek CA, CB shodné vzdálenosti d. Obsahem trojúhelníka ADC je číslo $P_1 = \frac{1}{2} AD . v_c = \frac{1}{2} AC . d$, obsahem trojúhelníka BDC je číslo $P_2 = \frac{1}{2} BD . v_c = \frac{1}{2} BC . d$. Získáváme tak poměr $P_1 : P_2 = AD : BD = AC : BC$. Poměr vzdáleností bodu D od A, B je roven poměru vzdáleností bodu C od A, B.

Proč nejsou trojúhelníky ADC, BDC podobné, když se shodují v jednom úhlu a mají úměrné dvě dvojice stran? Zřejmě proto, že shodné úhly nejsou sevřeny úměrnými stranami. Vidíte, jak záleží na každém předpokladu vět o shodnosti nebo podobnosti trojúhelníků. Povrchnost může svést k ukvapeným a nesprávným závěrům.

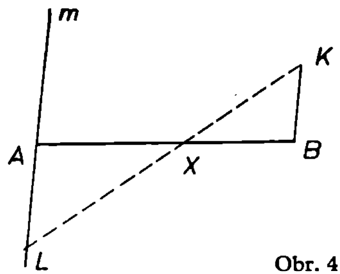
8. Je-li $AC \neq BC$, protne přímku AB i osa vnějšího úhlu trojúhelníka u vrcholu C. Dokažte, že pro průsečík D' platí $AD' : BD' = AC : BC$.
9. Vyjádřete délky úseček AD, BD resp. AD', BD' pomocí čísel a, b, c.
$\left[AD = \dfrac{bc}{a + b}\right]$

3. Dělicí poměr. Podobnosti trojúhelníků využíváme k sestrojení bodu X, který „dělí úsečku v daném poměru". Výrazem v uvozovkách vyjadřujeme skutečnost, že zlomek $\dfrac{AX}{BX}$ je roven předem danému číslu. Na obr. 4 je sestrojen bod X, který dělí úsečku AB v poměru $\sqrt{2} : 1$. Použili jsme rovnoběžných úseček AL, BK, $AL = \sqrt{2}$, $BK = 1$. Dokažte, že je opravdu $\dfrac{AX}{BX} = \sqrt{2}$.

Podívejme se nyní na obr. 4 „jinýma očima", představme si, že body A, B, K a přímka m jsou pevnými útvary, $m \parallel BK$, $BK = 1$. Jestliže se bod X pohybuje po přímce AB, pak přímka KX protíná m v různých bodech L. Každému bodu $X \neq B$ přímky AB můžeme přiřadit souřadnici λ bodu L na číselné ose m (bod A je na číselné ose m počátkem, kladná poloosa leží v téže polorovině jako bod K).

Pro bod X sestrojený na obr. 4 je $\lambda = -\sqrt{2}$, pro všechny body X ležící uvnitř úsečky AB je $\lambda < 0$, pro body X ležící vně úsečky AB je $\lambda > 0$. Pro žádný bod přímky není $\lambda = 1$. Popsanou geometrickou představou jsme vystihli základní vlastnosti pojmu dělicího poměru bodu X přímky AB vzhledem k bodům A, B.*)

Dělicím poměrem bodu X vzhledem k bodům A, B nazýváme číslo, jehož absolutní hodnota je rovna $\frac{AX}{BX}$ a které je kladné pro body X ležící vně úsečky AB a záporné pro body X ležící uvnitř úsečky AB.



Obr. 4

Je zřejmé, že dělicí poměr (ABX) je roven souřadnici λ, o které jsme hovořili. Obrázek 4 ukazuje, jak lze sestrojit bod X, který má vzhledem k bodům A, B daný dělicí poměr. Hledaný bod X je průsečíkem přímky AB s přímkou KL, bod L je tím bodem přímky m, který má souřadnici $\lambda = (ABX)$.

10. Zvolte body A, B, K a přímku m jako na obr. 4 a sestrojte body X, Y, Z tak, aby bylo $(ABX) = \frac{2}{3}$, $(ABY) = -\frac{5}{2}$, $(ABZ) = 4$.

*) Úplný název definovaného pojmu zní takto: dělicí poměr bodu $X \neq A, B$ přímky AB vzhledem k bodům A, B. Používáme však raději stručnějšího označení nebo značky (ABX).

11. Určete podle definice dělicí poměr (ABS), je-li bod S středem úsečky AB. Čemu je roven (C_1CT), je-li T těžištěm trojúhelníka ABC a bod C_1 středem strany AB?
12. Určete $\lambda_1 = (ABD)$, $\lambda_2 = (ACF)$ a $\lambda_3 = (CEB)$ na obr. 1. [$\lambda_1 = -\operatorname{cotg}^2\alpha$]
13. Určete (ABD), (ABD') na obr. 3. Užijte výsledku cvičení 9.
14.* Platí-li pro čtyři body A, B, X, Y jedné přímky vztah $(ABX) = -(ABY)$, nazýváme uspořádanou čtveřinu $ABXY$ harmonickou čtveřinou bodů. Dokažte, že
a) je-li $ABXY$ harmonická čtveřina, je také $ABYX$ harmonická čtveřina.
b) spojíme-li průsečík U úhlopříček AC, BD lichoběžníka $ABCD$ s průsečíkem V jeho prodloužených ramen, protne tato přímka základny v bodech X, Y tak, že $UVXY$ je harmonickou čtveřinou.

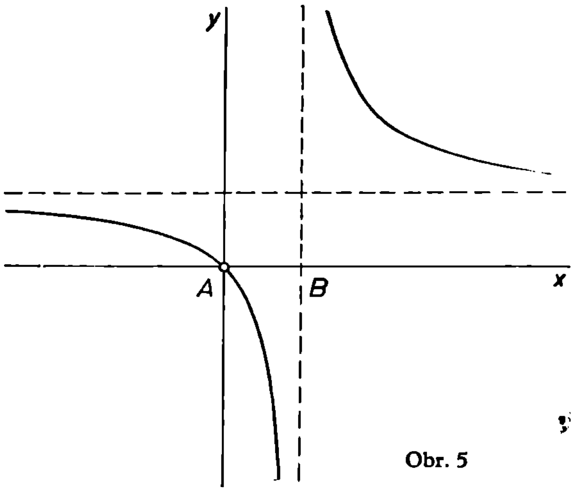
4. Dělicí poměr $\lambda = (ABX)$ můžeme vyjádřit jako funkci proměnné souřadnice x bodu X přímky AB. Zvolíme bod A za počátek a bod B za jednotkový bod číselné osy AB (je tedy $AB = 1$). Pro bod X úsečky AB je $AX = x$, $BX = 1 - x$, $\lambda = (ABX) = -\dfrac{AX}{BX} = \dfrac{x}{x-1}$. Má-li bod X souřadnici $x < 0$, je $AX = |x| = -x$, $BX = 1 + |x| = 1 - x$, $(ABX) = \dfrac{AX}{BX} = \dfrac{x}{x-1}$. Je-li $x > 1$, je $AX = x$, $BX = x - 1$, $(ABX) = \dfrac{x}{x-1}$. Ve všech případech je tedy $\lambda = \dfrac{x}{x-1}$*). Graf této funkce vidíte na obr. 5, je jím rovnoosá hyperbola. Asymptoty hyperboly jsou vytaženy čárkovaně.

*) Uvedená funkce je definována pro všechna $x \neq 1$, dělicí poměr se nedefinuje pro $X \equiv A$, tj. $x = 0$. Graf funkce můžeme sestrojovat podle obr. 4, hodnoty proměnné x odměřujeme na přímce AB a hodnoty proměnné $y = \lambda$ na přímce m.

15. Co můžete na základě grafu říci o hodnotách (ABX) pro body X ležící na polopřímce opačné k polopřímce AB nebo BA?

16. Ze vztahu $\lambda = \dfrac{x}{x-1}$ lze výpočtem potvrdit, že každé hodnotě $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$ můžeme přiřadit právě jeden bod přímky AB, pro který je $(ABX) = \lambda$.

17. Dokažte, že na přímce AB existují právě dva body X, pro které $\dfrac{AX}{BX} =$ $= k \neq 1$. Zvolte některé kladné $k \neq 1$ a sestrojte tyto body. [Podle definice dělicího poměru je $|\lambda| = k$.]



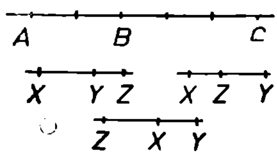
Obr. 5

5. Dělicí poměr přiřazujeme uspořádané trojici různých bodů téže přímky, nemusí proto být $(ABC) = (CAB)$ nebo (BCA) apod. Vypočítáte-li podle definice všech šest možných dělicích poměrů příslušných bodům A, B, C na obr. 6, dostanete $(ABC) = \dfrac{5}{3}$, $(BAC) = \dfrac{3}{5}$,

$(BCA) = \frac{2}{5}$, $(CBA) = \frac{5}{2}$, $(CAB) = -\frac{3}{2}$, $(ACB) =$ $= -\frac{2}{3}$.

Je nápadné, že vždy součin nebo součet dvou po sobě následujících dělicích poměrů je roven jedné. Nejde zde o náhodu, protože platí tyto věty o uspořádaných trojicích bodů utvořených ze tří daných bodů:

Liší-li se dvě uspořádané trojice bodů jen v pořadí prvního a druhého bodu, je součin jejich dělicích poměrů roven jedné. Liší-li se dvě uspořádané trojice bodů jen v pořadí druhého a třetího bodu, je součet jejich dělicích poměrů roven jedné.



Obr. 6

Při důkazu těchto vět je třeba prodiskutovat trojí možnou polohu bodů X, Y, Z na přímce (obr. 6). Ve všech třech případech leží bod Z buď současně uvnitř úseček XY, YX nebo současně vně těchto úseček. Proto mají dělicí poměry (XYZ), (YXZ) stejná znamení a z rovnosti $(XYZ) \, . \, (YXZ) = \frac{XZ}{YZ} \, . \, \frac{YZ}{XZ} = 1$ plyne $(XYZ) \, . \, (YXZ) = 1$. Při poloze a) na obr. 6 je $(XYZ) = \frac{XZ}{YZ}$, $(XZY) = -\frac{XY}{YZ} = -\frac{YX}{ZY}$, $(XYZ) + (XZY) =$

$= \dfrac{XZ - YX}{YZ} = 1$. Dokončete důkaz v obou zbývajících případech.

18. Je-li $(XYZ) = \lambda$, je $(XZY) = 1 - \lambda$, $(YZX) = 1 - \dfrac{1}{\lambda}$, $(ZYX) = \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}$, $(ZXY) = \dfrac{1}{1 - \lambda}$. Užijte těch výměn bodů, o kterých se hovoří v dokázaných větách.

19. Pro které hodnoty λ jsou si rovny některé dvojice dělicích poměrů uvedených ve cvičení 18? Např. pro které λ je $(XYZ) = (ZYX)$?

20. Dokažte, že koeficient $\varkappa$ stejnolehlosti se středem S, která zobrazuje bod X do bodu X', lze vyjádřit jako dělicí poměr $(X'XS)$.*)

21. Stejnolehlost s koeficientem $\varkappa = -\dfrac{3}{4}$ a středem P zobrazuje bod M do bodu N. Jaký koeficient má stejnolehlost se středem M, která zobrazí bod N do bodu P?

22.* Je-li čtveřina $XYZU$ harmonická, jsou harmonické i čtveřiny $XYUZ$, $ZUXY$, $UZYX$ a ještě čtyři další. Určete tyto čtveřiny.

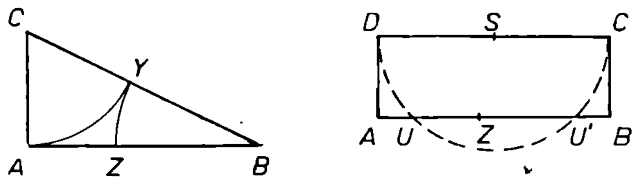
6. Zlatý řez. Zlatým řezem úsečky rozumíme její rozdělení na dvě úsečky, z nichž menší je ku větší v témž poměru jako větší k celé úsečce.

Dělí-li bod Z jednotkovou úsečku AB v poměru zlatého řezu a označíme-li velikost menší úsečky AZ písmenem z, je zřejmě $0 < z < 1$, $AB = 1$, $ZB = 1 - z$. Platí proto $z : (1 - z) = (1 - z) : 1$, $z^2 - 3z + 1 = 0$. Podmínkám vyhovuje jeden kořen této rovnice, a to $z = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Bod Z úsečky AB získáme, provedeme-li konstrukci algebraického výrazu $z = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$. Jednu z možných

*) Koeficient stejnolehlosti budeme značit řeckým písmenem $\varkappa$ (kappa), protože písmene k jsme již použili a i nadále budeme používat k označení poměru podobnosti, tj. kladného čísla.

konstrukcí vidíte na obr. 7a, kde má pravoúhlý trojúhelník ABC odvěsnu $AC = \frac{1}{2} AB$. Bod A je otočen kolem C do bodu Y úsečky BC, otočením bodu Y kolem B získáme bod Z úsečky AB. Dokažte správnost konstrukce. V poměru zlatého řezu dělí úsečku AB také bod Z' souměrný s bodem Z podle středu úsečky AB, pro něj je však úsečka AZ' větší úsečkou řezu.



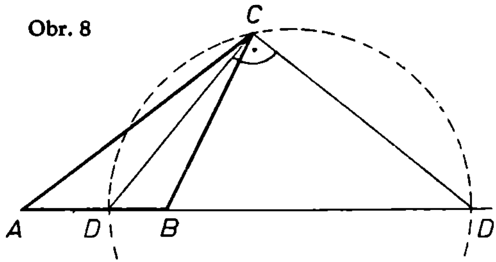
Obr. 7 a, b

23. Vypočítejte hodnotu dělicího poměru (ABZ) v případě, kdy Z dělí úsečku AB zlatým řezem. Sestrojte bod Z podle cvičení 10.
24. Zvolte úsečku AZ a sestrojte bod B tak, aby bod Z dělil AB v poměru zlatého řezu. [Využijte vztahu mezi (ABZ) a (AZB)].
25. Dokažte, že úsečku AB lze rozdělit zlatým řezem pomocí obdélníka $ABCD$ na obr. 7b, kde je $AD = \frac{1}{3} AB$. Bod S je středem úsečky CD, kružnice o průměru CD protíná AB v bodech U, U', $AZ = 3.AU$.
26. Sestrojte obdélník, který má strany shodné s úsečkami AZ, BZ na obr. 7. Oddělte od obdélníka čtverec o straně shodné s AZ. Jaký je poměr stran zbývajícího obdélníka?
27. Sestrojte k bodu Z na obr. 7 bod T souměrný s ním podle středu B. Dokažte, že bod B dělí úsečku AT v poměru zlatého řezu.
28.* Sestrojte body $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ tak, aby bod Z_n dělil úsečku $Z_{n-1} Z_{n+1}$ v poměru zlatého řezu a úsečka $Z_{n-1} Z_n$ byla větší úsečkou tohoto řezu. Stanovte délku nejkratší úsečky, která obsahuje všechny body Z_n.

7. Důležitá množina bodů. Představme si tenké gumové vlákno, které je upevněno v bodech A, B na obr. 8.

Uchopíme-li je v bodě D, můžeme je protáhnout tak, že bod D přejde do bodu C. Původní úsečky AD, BD se protáhnou na úměrné úsečky AC, CB.*) Po jaké dráze by se pohyboval bod D z původní polohy na přímce AB do bodu C v případě, že by se i během pohybu protahovaly úsečky AD, BD v témž poměru?

Obr. 8



Otázku zodpovíme, použijeme-li geometrických vlastností napínaného vlákna. Označíme-li libovolnou polohu bodu D písmenem X, jde nám o *určení množiny bodů* X, *pro které je* $AX = k.BX$ (k je kladná konstanta). Je-li $k = 1$, je množinou bodů X zřejmě osa úsečky AB.

Je-li $k \neq 1$, mají podle cvičení 17 požadovanou vlastnost právě dva body D, D' přímky AB, pro které platí $(ABD) = -k$, $(ABD') = k$. Každý bod X neležící na AB, pro který platí $AX = k.BX$, je vrcholem pravého úhlu nad úsečkou DD' (osy vedlejších úhlů jsou navzájem kolmé). Dospíváme k závěru, že každý bod X, pro který platí $AX = k.BX$, leží na kružnici o průměru DD'.

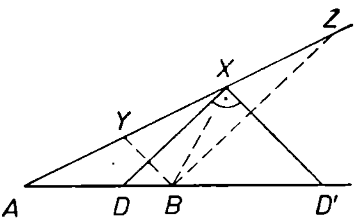
Dokažme ještě, že pro každý bod X, který leží na kružnici s průměrem DD', platí $AX = k.BX$. Je-li

*) Na obr. 8 je stejně jako na obr. 3 přímka CD osou úhlu γ trojúhelníka ABC. Je proto $AD : BD = AC : BC$.

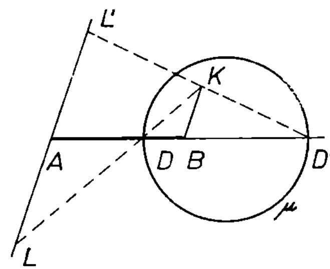
$X \not\equiv D, D'$, je $XD \perp XD'$ (obr. 9). Veďme bodem B rovnoběžky s XD, XD' a sestrojme jejich průsečíky Z, Y s přímkou AX. Protože platí $AD = k.BD$, je též $AX = k.XZ$, obdobně plyne z rovnosti $AD' = k.BD'$ vztah $AX = k.XY$. Je tedy $XY = XZ$ a pro bod B jako vrchol pravého úhlu nad ZY platí $BX = XZ = XY$. Dosazením do některé rovnosti pro AX dostaneme $AX = k.BX$.

Dokázali jsme tak důležitou větu:

Jsou-li dány dva různé body A, B a číslo $k > 0$, $k \neq 1$, je množinou bodů X, pro které platí $AX = k.BX$, jistá kružnice se středem na přímce AB. Tuto kružnici nazýváme Apolloniovou kružnicí.



Obr. 9



Obr. 10

Abychom si ušetřili psaní, budeme označovat Apolloniovu kružnici příslušnou dvojici A, B a koeficientu k značkou $\mu\,(A, B, k)$. Množinu bodů, ze kterých je vidět úsečku AB pod úhlem α budeme označovat $\mu\,(A, B, \alpha)$, záměna s Apolloniovou kružnicí je však vyloučena. Průměr DD' kružnice $\mu\,(A, B, k)$ sestrojujeme na základě dělicích poměrů $(ABD) = -k$ a $(ABD') = k$ (obr. 10).

29. Sestrojte $\mu_1\left(A, B, \frac{2}{3}\right)$, $\mu_2(A, B, 3)$ a $\mu_3(A, B, \sqrt{2})$.

30. Jaký je vztah mezi $\mu_1(A, B, k)$ a $\mu_2\left(A, B, \frac{1}{k}\right)$?

31. Je dán trojúhelník ABC, sestrojte $\mu_1(A, B, k_1)$, $\mu_2(B, C, k_2)$ a $\mu_3(A, C, k_1k_2)$. Jakou vlastnost mají kružnice μ_1, μ_2, μ_3?

32. Dokažte, že množinou bodů, z nichž jsou dvě nesoustředné kružnice s různými poloměry vidět pod shodnými úhly, je jistá část nebo celá Apolloniova kružnice $\mu(S_1, S_2, ?)$.

33. Využijte ke konstrukci průměru DD' kružnice $\mu(A, B, k)$ vztahů rovnoběžnosti na obr. 9. Zvolte $AX = k$, $XY = XZ = 1$, BX libovolně (bod X pak nebude ležet na μ). Popište konstrukci a dokažte její správnost.

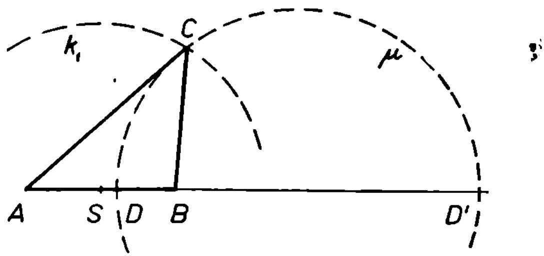
34.* Vyšetřete analyticky množinu bodů X, pro které je $AX = k.BX$.

8. Konstruktivní využití Apolloniovy kružnice.

Pomocí Apolloniovy kružnice se řeší úlohy, ve kterých lze využít poměru vzdáleností neznámého bodu od bodů známých.

Příklad 1. *Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno c, t_c, $v_a : v_b = 3 : 2$.*

Rozbor. Má-li trojúhelník ABC na obr. 11 požadované vlastnosti, je $AC : BC = v_a : v_b = 3 : 2$. Bod C tedy náleží



Obr. 11

Apolloniově kružnici $\mu\left(A,\ B,\ \frac{3}{2}\right)$ a kružnici $k_1\ (S,\ t_c)$.

Konstrukce: K_0. *Umístíme úsečku* $AB = c$.
K_1. *Sestrojíme střed* S *úsečky* AB *a kružnici* $k_1 \equiv (S,\ t_c)$.
K_2. *Sestrojíme* $\mu\left(A, B, \frac{3}{2}\right)$.
K_3. *Sestrojíme společný bod* C *kružnic* μ, k_1.
K_4. *Sestrojíme trojúhelník* ABC.

Důkaz. Sestrojený trojúhelník ABC má zřejmě stranu $AB = c$ a těžnici $CS = t_c$. Je $AC = \frac{3}{2}\ BC$, $CA : CB = 3 : 2$, $v_a : v_b = 3 : 2$.

Diskuse. Konstrukce K_1, K_2 mají jediné řešení. Konstrukcí K_3 získáme dva, jeden nebo žádný bod C. Je-li bod C jediný, leží na přímce AB a není vrcholem trojúhelníka ABC. Sestrojíme-li dva různé body C, jsou souměrné podle přímky AB a sestrojené trojúhelníky jsou shodné.

35. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno

a) $c, \gamma, b : a = 2 : 1$,
b) $c, a : b, t_c : a$,
c) $a, v_b : v_c, v_a$,
d) $b, t_b, t_a : t_c$.

36. Jsou dány body A, B ležící uvnitř téhož průměru kružnice $k \equiv (S, r)$. Sestrojte dvě shodné tětivy kružnice, které mají společný jeden krajní bod a každá z nich prochází jedním z bodů A, B. [Určete osu úhlu sevřeného tětivami ve společném bodě.]

37. Sestrojte bod, z něhož jsou vidět pod shodnými úhly tři úsečky AB, BC, CD ležící na téže přímce (bod B leží mezi A, D a bod C mezi B, D). [Využijte os úhlů.]

38. Sestrojte bod, z něhož jsou vidět tři dané kružnice pod shodnými úhly. [Využijte výsledku cvičení 32.]

39.* Jsou dány body A, B, C, D ležící v tomto pořadí na přímce, je $AB = 2 . BC = 3 . CD$. Sestrojte bod X roviny, pro který je $\sphericalangle\ AXC = \sphericalangle\ BXD$. [Porovnejte obsahy trojúhelníků, které mají u vrcholu X shodné úhly a vypočítejte tak poměry $AX : DX$, $BX : CX$.]

9.* Doplněk pro náročné čtenáře, kteří se cítí „ošizeni" tím, že jsme při diskusi v příkladě 1 nestanovili, při jakém vztahu mezi c, t_c úloha má nebo nemá řešení. Při podrobné diskusi musíme umět stanovit střed a poloměr Apolloniovy kružnice μ (A, B, k).

Zvolme na přímce AB souřadnicový systém tak, aby bod A byl jeho počátkem a bod B měl souřadnici $c > 0$ Souřadnici x bodu D ležícího mezi A, B vypočítáme z podmínky $x = k(c - x)$, $x = \dfrac{kc}{k+1}$. Souřadnici x' bodu D' zjistíme obdobně, $x' = \dfrac{kc}{k-1}$. Střed Q kružnice μ má souřadnici $q = \dfrac{x + x'}{2} = \dfrac{k^2c}{k^2 - 1}$. Poloměrem kružnice μ je číslo $r = |q - x| = \left|\dfrac{kc}{k^2 - 1}\right|$.

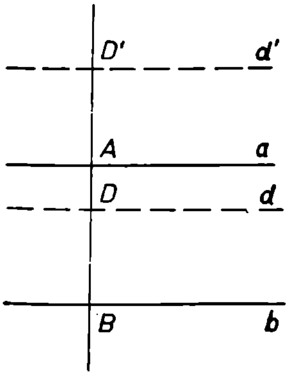
Apolloniova kružnice použitá v příkladě 1 má střed Q o souřadnici $q = \dfrac{9}{5}c$, středná QS kružnic μ, k_1 má délku $s = \dfrac{13}{10}c$. Poloměr kružnice μ je $r = \dfrac{6}{5}c$. Výpočtem zjistíme, že se kružnice μ, k_1 protínají právě tehdy, když platí $12c - 10\,t_c < 13\,c < 12\,c + 10\,t_c$ neboli $c < 10\,t_c$.

40.* Sestrojte si větší počet Apolloniových kružnic při pevných bodech A, B a různých hodnotách k. Dokažte, že každá kružnice μ (A, B, k) je kolmá na kružnici o průměru AB. [Vyjádřete podmínku kolmosti pomocí vztahu mezi poloměry a střednou kružnic.]

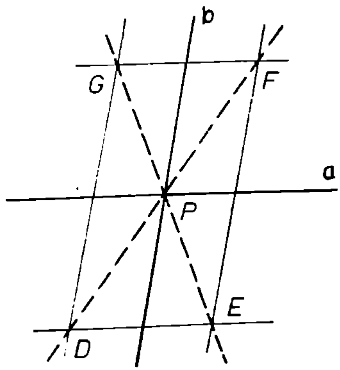
10.* Několik dalších množin bodů. Doplňme si ještě další množiny bodů charakterizované konstantním poměrem vzdáleností od daných útvarů.

a) Zvolme dvě rovnoběžky a, b (obr. 12). Označme vzdálenosti libovolného bodu X roviny od přímek a, b písmeny x_a a x_b. *Hledejme množinu bodů X, pro které je $x_a = k.x_b$, ($k > 0$).*

Je-li $k = 1$, je hledanou množinou nepochybně osa o pásu (a, b). Je-li $k \neq 1$, můžeme vyhledat body množiny na libovolné přímce p kolmé k a, b. Jde zřejmě o body D, D' přímky p, pro které je $(ABD) = -k$, $(ABD') = k$. Dokažte, že hledanou množinou je dvojice přímek d, d' rovnoběžných s a, b a procházejících body D, D'.



Obr. 12



Obr. 13

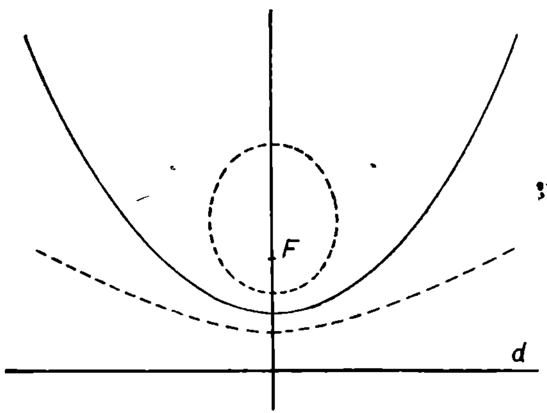
b) Nechť jsou dány dvě různoběžky a, b (obr. 13) s průsečíkem P. Sestrojíme-li pomocí rovnoběžek ve vzdálenosti $x_b = 1$, $x_a = k$ body D, E, F, G, náležejí tyto body množině bodů X, pro které platí $x_a = k.x_b$. *Dokažte, že množinou bodů X, pro které je $x_a = k.x_b$, je dvojice přímek PD, PE.* Při důkazu použijete podobnosti trojúhelníků. Nezapomeňte na důkaz toho, že každý bod X, pro který je $x_a = k.x_b$, leží na jedné z přímek PD, PE.

c) *Zvolíme-li číslo $k > 0$, bod F a přímku d, která jím neprochází, je množinou bodů X, pro které je $FX = k . x_d$ kuželosečka* (obr. 14).

Při $k = 1$ jde samozřejmě o parabolu. Pata D kolmice z bodu F na přímku d je průsečíkem tečen paraboly v těch jejích bodech T, U, které leží na kolmici vedené ohniskem k její ose.

Při $k < 1$ je množinou bodů X elipsa s jedním ohniskem v bodě F a osou kolmou k d. Tato elipsa má za vrcholovou kružnici (tj. kružnici, jejímž průměrem je hlavní osa elipsy) Apolloniovu kružnici μ (F, D, k). Bod D je opět průsečíkem tečen elipsy v bodech T, U ležících na kolmici vedené ohniskem F k hlavní ose. Při $k > 1$ je množinou bodů X hyperbola s týmiž vlastnostmi jako elipsa.

Důkaz věty o elipse a hyperbole je snadný, užijeme-li řezů rotační kuželové plochy rovinou. Ovládáte-li základy analytické geometrie kuželoseček, můžete provést důkaz



Obr. 14

vět analyticky. Zvolte přímku d za osu x kartézského souřadnicového systému a bod $F \equiv (0; p)$ na ose y. Z analytického vyjádření podmínky $FX = k . x_d$ získáte po úpravě rovnici hledané množiny ve tvaru $x^2 + y^2 (1 - k^2) - 2py + p^2 = 0$. Diskusí rovnice pro $k < 1$, $k = 1$, $k > 1$ dokážete vyslovená tvrzení.