6. ALGEBRAICKÉ NEROVNOSTI O JEDNÉ NEZNÁMÉ

•

Máte-li za úkol nalézt ta čísla, která vyhovují nerovnosti $2x + 3 > 0$, pak postupujete tak, že nejprve k číslům na obou stranách této nerovnosti přičtete číslo -3 a dostanete nerovnost $2x > -3$; říkáte též, že jste převedli sčítance 3 na druhou stranu nerovnosti s opačným znaménkem. Když násobíte obě strany kladným číslem $\frac{1}{2}$, dostanete nerovnost $x > -1{,}5$ a říkáte, že jste našli řešení dané nerovnosti. Na tomto jednoduchém příkladě si uvědomíte podstatu i postup při řešení nerovností. Od nerovnosti dané jste došli k nerovnosti poslední ekvivalentními úpravami podle vět T_3, T_4. To znamená, že všechna taková čísla x, která vyhovují nerovnosti první, vyhovují i nerovnosti poslední. Kdybychom však měli zjistit, zda nějaké číslo, např. -1, vyhovuje podmínce dané nerovností $2x + 3 > 0$, pak bychom o této otázce rozhodli prostým dosazením tohoto čísla do dané nerovnosti. Nebudeme v tom případě provádět ekvivalentní úpravy a pak zjišťovat, že číslo -1 vyhovuje nerovnosti $x > -1{,}5$. Ekvivalentní úpravy provádíme zpravidla tehdy, když chceme mít přehled po množině všech čísel, která dané nerovnosti vyhovují. V našem případě nám ekvivalentní úpravy pomohly ke zjištění, že dané nerovnosti vyhovují všechna reálná čísla otevřeného intervalu $(-1{,}5; +\infty)$ a žádná jiná. Při této příležitosti vás upozorňujeme na jedno úskalí při chápání našich výkladů. Názvem řešení označujeme nejen všechna čísla z množiny těch reálných čísel, která vyhovují dané nerovnosti, ale i postup, jímž z dané nerovnosti odvozujeme další ekvivalentní nerovnosti, z nichž poslední má být taková, aby nám poskytovala jasný pohled na tu číselnou množinu, jejíž prvky dané nerovnosti vyhovují.

Pro řešení nerovností mají základní význam ty věty, podle nichž provádíme jejich ekvivalentní úpravy. Jsou to především věty $\mathbf{T}_3$, $\mathbf{T}_4$, $\mathbf{T}_5$, které mají obecnou platnost pro všechny nerovnosti, a věta $\mathbf{K}_2$, která platí pro nerovnosti mezi kladnými čísly. V tomto článku vám ukážeme, že lze s výhodou používat k řešení nerovností i jiných vět z přehledu uvedeného v předcházejícím článku. Poněvadž řešení lineárních nerovností tvaru $ax + b < 0$, kde $a \neq 0$, b jsou daná čísla, x neznámá, případně s jiným znakem nerovnosti mezi lineárním dvojčlenem a číslem 0, je vám dobře známo, omezíme se tu jen na několik poznámek o soustavách lineárních nerovností o jedné neznámé a takových nelineárních nerovností, jejichž řešení se snadno převede na řešení nerovností lineárních.

Často se stává, že je dána soustava dvou nebo několika nerovností, které je třeba rozřešit a pak vybrat taková řešení, která jsou vázána jistými podmínkami mezi danými nerovnostmi. Pro jednoduchost předpokládejme, že je dána soustava dvou nerovností s neznámou x a že je dovedeme rozřešit. Pak můžeme dávat tyto otázky:

1. Která čísla x vyhovují oběma daným nerovnostem?
2. Která čísla x vyhovují první nerovnosti a nevyhovují druhé?
3. Která čísla x nevyhovují nerovnosti první a vyhovují přitom nerovnosti druhé?
4. Která čísla x vyhovují aspoň jedné z daných nerovností?
5. Která čísla x nevyhovují žádné z daných nerovností?

6. Která čísla x vyhovují nejvýš jedné z daných nerovností?
7. Která čísla x vyhovují právě jedné z daných nerovností?

Nejčastěji nás ovšem zajímá otázka, která čísla x vyhovují oběma daným nerovnostem. Odpověď najdeme, když dovedeme najít průnik množin (intervalů), z nichž každá je množinou všech řešení jedné z daných nerovností. Řešení takových úloh je příležitostí k dobrému výcviku v logickém myšlení. Přitom jistě dáte pozor na význam slov aspoň jeden, nejvýš jeden a právě jeden, což má velký význam. Přitom se upevní váš poznatek, že popřít platnost některé z nerovností $x \geqq a$, $y \leqq b$, $z > c$, $u < d$ znamená totéž jako uznat platnost nerovnosti protikladné jí odpovídající podle předcházejícího pořadí $x < a$, $y > b$, $z \leqq c$, $u \geqq d$.

Soustava nerovností bývá někdy dána tak, že je stručně zapsána postupnou nerovností. Nejčastěji to bývá trojčlenná postupná nerovnost tvaru $f(x) \leqq g(x) \leqq h(x)$ (resp. s ostrými nerovnostmi nebo s některou nerovností ostrou), kde jsme symboly $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ naznačili, že jde o početní výrazy, v nichž se vyskytuje písmeno x ve významu neznámého čísla. V tom případě můžeme přepsat tento zápis na zápis dvou nerovností $f(x) \leqq g(x)$, $g(x) \leqq h(x)$. Snadno lze dokázat, že lze provádět ekvivalentní úpravy postupných nerovností tím, že ke všem členům postupné nerovnosti stejné číslo přičteme nebo každý člen stejným kladným číslem znásobíme. Jestliže každý člen znásobíme stejným číslem záporným, musíme všechny znaky nerovnosti po znásobení nahradit znaky nerovností obrácených. Těchto vět využijeme při řešení některých nerovností.

Všechny mocniny z^{2k-1}, kde z je reálné číslo a k číslo přirozené, tj. tedy mocniny s lichým přirozeným mocnitelem, nabývají všechny současně hodnot kladných pro $z >$

> 0, hodnoty 0 pro $z = 0$ a hodnot záporných pro $z < 0$. Jsou proto všechny nerovnosti tvaru $z^{2k-1} < 0$ navzájem ekvivalentní, a tedy i ekvivalentní s nerovností $z < 0$. Vyloučíme-li případ $z = 0$, jsou všechny mocniny s lichým záporným exponentem též čísly souhlasnými, neboť jsou převrácenými čísly k mocninám s lichým kladným mocnitelem. Při vyloučení $z = 0$ jsou také všechny mocniny z^{2k} a z^{-2k} čísly souhlasnými, a proto nerovnosti $z^{2k} > 0$, $z^{-2k} > 0$ jsou všechny ekvivalentní, tedy ekvivalentní s nerovností $z^2 > 0$. Všechna tato tvrzení platí obdobně i pro nerovnosti s jinými znaky nerovností. Dosadíme-li $z = ax + b$ nebo $z = x - x_1$ do nerovností výše uvedených, ukáže se, že řešení nerovnosti $(ax + b)^n < 0$, resp. $(x - x_1)^n < 0$ lze převést na řešení jednoduchých lineárních nebo kvadratických nerovností, což ukážeme na příkladech.

Příklad 1. Řešme nerovnost $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 > 0$. Tuto algebraickou nerovnost třetího stupně snadno rozřešíme, když ji převedeme na tvar

$$(x - 1)^3 > 0,$$

která je ekvivalentní s nerovností $x - 1 > 0$. Hledané řešení je

$$x > 1.$$

Příklad 2. Řešme nerovnost

$$\frac{5}{x^2 - 6x + 9} \leqq 0.$$

Poněvadž $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, nemá zlomek na levé straně smysl pro $x = 3$. Nerovnost krátíme číslem 5 a pak přejdeme k nerovnosti $(x - 3)^2 \leqq 0$. Pro $x \neq 3$ jsou obě nerovnosti ekvivalentní. Avšak pro $x \neq 3$ nemá poslední nerovnost řešení. Tedy původní nerovnost nemá řešení.

Příklad 3. Řešte soustavu nerovností

$$-1 < \frac{2-5x}{3} \leqq 2.$$

Všechny členy této postupné nerovnosti znásobíme kladným číslem 3 a pak od nich odečteme číslo 2. Tak dostaneme postupnou nerovnost $-5 < -5x \leqq 4$. Všechny její členy znásobíme záporným číslem $-\frac{1}{5}$, přičemž znaménka mezi jednotlivými členy obrátíme a dostaneme tak nerovnost $1 > x \geqq -\frac{4}{5}$, kterou můžeme psát též ve tvaru $-\frac{4}{5} \leqq x < 1$. Každá z těchto postupných nerovností udává přehledně, která čísla x dané soustavy nerovností vyhovují. Jsou to všechna čísla x z intervalu $\langle -\frac{4}{5}; 1)$.

Příklad 4. Hledejme na číselné ose všechny body x, které mají od bodu a vzdálenost menší než $\varepsilon > 0$ (viz obr. 1c).

Matematický zápis této úlohy je $|x - a| < \varepsilon$. Podle věty $\mathbf{A}_3$ ji můžeme napsat ve tvaru $-\varepsilon < x - a < \varepsilon$. Jestliže ke všem členům této postupné nerovnosti přičteme číslo a, dostaneme již řešení naší úlohy ve tvaru $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$. Hledané body x leží zřejmě v otevřeném intervalu $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$.

Poznámka: Při studiu mat. analýzy se setkáte s nerovnostmi v tomto příkladě uvedenými tak často, že je užitečné, když se vám při pohledu na ně vybaví ihned představa okolí bodu a. Znamenají tedy např. $|x - 7| < 2$ otevřený interval $(5; 9)$ nebo $|x + 3| < 0{,}2$ otevřený interval $(-3{,}2; -2{,}8)$.

Příklad 5. Jak musíme volit číslo m, aby soustava rovnic $3x + 2y = 15$, $x + 2y = m$ měla řešení x, y, která jsou a) nezáporná, b) kladná. Která řešení soustavy mají tu vlastnost, že číslo m je při uvedených podmínkách 1) co nejmenší, 2) co největší?

Řešíme-li tuto soustavu rovnic, dostaneme pro neznámé

$$x = \frac{15 - m}{2}, \; y = \frac{3m - 15}{4}.$$

a) Mají-li být čísla x, y nezáporná, musí platit nerovnosti $\frac{15 - m}{2} \geqq 0$, $\frac{3m - 15}{4} \geqq 0$, které mají řešení $m \leqq 15$, $m \geqq 5$. To znamená, že číslo m musí být prvkem uzavřeného intervalu $\langle 5; 15 \rangle$.

b) Mají-li být čísla x, y kladná, musí platit ostré nerovnosti $\frac{15 - m}{2} > 0$, $\frac{3m - 15}{4} > 0$. Jejich řešením dostaneme, že číslo m musí být prvkem otevřeného intervalu $(5; 15)$.

1) Při řešení v oboru nezáporných čísel můžeme vybrat nejmenší hodnotu $m = 5$ z intervalu $\langle 5; 15 \rangle$. Této hodnotě m odpovídá řešení $x = 5, y = 0$. Při řešení v oboru kladných čísel nemůžeme z intervalu $(5; 15)$ vybrat nejmenší hodnotu. I když zvolíme pro m číslo hodně blízké číslu 5, jako např. 5 000 001, pak v otevřeném intervalu $(5; 15)$ najdeme snadno další číslo, které je menší než 5 000 001. Nejmenší číslo v tomto otevřeném intervalu neexistuje.

2) Při řešení v oboru nezáporných čísel můžeme vybrat největší $m = 15$, jemuž odpovídá řešení $x = 0$, $y = 7{,}5$. Při řešení v oboru kladných čísel neexistuje žádná dvojice čísel x, y, pro něž m by bylo největší.

Příklad 6. Řešme nerovnost $\sqrt{x^2 + 5} < x - 3$.

Nejprve zjistíme, že početní výrazy na levé i na pravé straně nerovnosti mají smysl pro libovolná reálná čísla x. Poněvadž druhá odmocnina z nezáporného čísla je definována jako nezáporné číslo, musí platit $x - 3 \geq 0$ čili $x \geqq 3$. S touto podmínkou můžeme nerovnost umocnit a pak řešením lineární nerovnosti dostaneme $x < \frac{2}{3}$. Tento neomezený interval nemá však žádný společný prvek s neomezeným intervalem $x \geq 3$. Daná nerovnost neplatí tedy pro žádné reálné číslo x.

Cvičení

6.1 Národní podnik musí vynakládat m Kčs na jednu výrobní jednotku ke krytí nákladů závislých na velikosti výroby (suroviny, polotovary, mzdy apod.) a mimo to s Kčs ročně na krytí stálých výdajů nezávislých na velikosti výroby. Kolik výrobků musí ročně produkovat, má-li celkový zisk podniku být z Kčs při prodejní ceně c Kčs na jednotku produkce. Proveďte diskusi řešení.

6.2 Osazenstvo dolu má vytěžit a tun uhlí denně a těží denně b tun. Tím plní plán na p procent. Když se plánovaná denní těžba i skutečná denní těžba zvýšily o d tun, změnil se tím procentový ukazatel plnění plánu na p' procent. Porovnejte rozdílem procentové ukazatele p, p' a proveďte diskusi řešení.

6.3 Řešte nerovnosti:

a) $x^2 + 10x + 25 > 0$, b) $(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)^2 \leqq 0$,

c) $(4x^2 - 4x + 1)^{-3} > 0$, d) $(4x + 3)^{-5} \leqq 0$.

6.4 Která čísla x vyhovují všem nerovnostem dané soustavy:

a) $2x + 1 < 0, \quad 2x + 5 > 0, \quad 0 < x + 2 < 3,$
b) $5x + 3 > 0, \quad |x| < 0{,}5, \quad |x - 1| < 0{,}6,$
c) $3 < 2x + 5 < 7, \quad 2x - 1 \leqq 4x + 2 \leqq 2x + 1,$
d) $\sqrt{2x - 1} < \sqrt{4x - 1}, \quad 0 < 3 - x < 0{,}5.$

6.5 Pro která čísla m má soustava rovnic $x - 2y + 4 = 0$, $4x + 3y + m = 0$ taková řešení, že x, y jsou čísla nezáporná. Zvolte pak největší možnou hodnotu čísla m a určete k němu příslušné řešení dané soustavy rovnic. Přitom si všimněte, že neexistuje žádné řešení soustavy, při němž číslo m by bylo nejmenší.

Nyní se naučíme řešit algebraické nerovnosti tvaru

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n) \geqq 0 \qquad (6.1)$$

v nichž levá strana je součinem lineárních činitelů tvaru $x - x_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$. Přitom se má rozhodnout, zda a pro která x platí mezi tímto součinem a číslem 0 ostrá nebo neostrá nerovnost. Při dalších úvahách budeme nejprve předpokládat, že čísla x_i jsou navzájem různá a že jejich označení bylo zvoleno tak, aby platilo $x_1 < x_2 < x_3 \ldots < x_{n-1} < x_n$. Součin lineárních činitelů nerovnosti (6.1) bude rovný nule právě jen pro tato čísla x_1, x_2, x_3, ..., x_n. Jejich součin bude různý od nuly jen ve vnitřních bodech intervalů, jejichž dělícími body na číselné ose jsou čísla x_i. Znaménko součinu je třeba určit jen pro body zmíněných intervalů, což vás pro větší názornost i stručnost naučíme na vhodně zvolených příkladech. Přitom budeme předpokládat, že umíte rozložit kvadratický trojčlen v součin reálných lineárních činitelů, což je vždy možné, když diskriminant kvadratického trojčlenu není záporný.

Příklad 7. Řešme nerovnost $x(x^2 - 4)(x^2 - 4x - 5) \geqq 0$.
Po rozkladu $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$, $x^2 - 4x -$

$- 5 = (x + 1)(x - 5)$, po dosazení do dané nerovnosti a po uspořádání lineárních činitelů dostaneme

$$(x + 2)(x + 1)(x - 0)(x - 2)(x - 5) \geqq 0. \qquad (6.2)$$

Platí tedy rovnost pro body $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, $x_5 = 5$. Vyznačte si tyto body na náčrtu číselné osy, abyste mohli dobře sledovat další výklad. Pět bodů $-2, -1, 0, 2, 5$ rozděluje číselnou osu na šest částí a naším úkolem nyní je zjistit znaménko součinu lineárních činitelů z nerovnosti (6.2) pro čísla x v otevřených intervalech $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 2)$, $(2; 5)$, $(5; +\infty)$. Předpokládejme nejprve, že jsme zvolili číslo x z posledního intervalu, takže platí $x + 2 > 0$, $x + 1 > 0$, $x - 0 > 0$, $x - 2 > 0$, $x - 5 > 0$. Součin všech pěti činitelů bude pro čísla x z posledního neomezeného intervalu kladný, a proto tato x patří k řešení dané nerovnosti. Zvolme nyní x z předposledního intervalu $(2; 5)$. Pro body z tohoto intervalu platí $x + 2 > 0$, $x + 1 > 0$, $x > 0$, $x - 2 > 0$, $x - 5 < 0$. Součin čtyř kladných činitelů s jedním záporným bude záporný, a proto body intervalu $(2; 5)$ nebudou dané nerovnosti vyhovovat. Zvolíme-li nyní x z intervalu $(0; 2)$, budou tři činitelé kladní, dva záporní. Součin všech pěti činitelů bude kladný a všechny body intervalu $(0; 2)$ budou patřit k řešení dané nerovnosti. Tak postupujeme dále od jednoho intervalu k druhému v témž směru, až dojdeme konečně do prvního neomezeného intervalu $(-\infty; -2)$. Při tomto zkoumání součinu lineárních činitelů v nerovnosti (6.2) se střídaly otevřené intervaly, jejichž prvky patřily k řešení, s intervaly, jejichž prvky k řešení nepatřily. Shrneme-li výsledky zkoumání dané nerovnosti v otevřených intervalech se zjištěním, že v krajních bodech intervalů platí v dané nerovnosti rovnost, dostaneme tento výsledek: Nerovnost (6.2) platí pro všechny body z intervalů $\langle -2; -1\rangle$, $\langle 0; 2\rangle$, $\langle 5; +\infty)$.

Poznámka: Vyšetřování dané nerovnosti jsme mohli provádět při libovolném pořadí intervalů. Výhodné je ovšem, když je probíráme v uspořádaném pořadí odleva doprava nebo odprava doleva.

Příklad 8. Řešme algebraickou nerovnost 6. stupně
$$(x^2 - 4x + 5)(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x - 5) \leqq 0.$$
První z kvadratických trojčlenů má záporný diskriminant a nelze jej rozložit na součin reálných lineárních činitelů. Poněvadž pro něj platí $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 > 0$ pro libovolné x, můžeme kladným číslem, které tento trojčlen představuje, nerovnost zkrátit a po rozkladu zbývajících kvadratických trojčlenů dostaneme ekvivalentní nerovnost
$$(x - 2)^2 (x + 1)(x - 5) \leqq 0.$$
Rovnost bude platit v této nerovnosti pro čísla $x = 2$, $x = -1$ a pro $x = 5$. Čtverec prvního dvojčlenu má mimo výjimečný bod $x = 2$ stále kladnou hodnotu, takže tímto čtvercem můžeme nerovnost krátit a hledat nyní jen řešení ostré nerovnosti (kvadratické)
$$(x + 1)(x - 5) < 0,$$
kterou vyšetříme podle vzoru z předcházející úlohy pro hodnoty x ve třech otevřených intervalech $(-\infty; -1)$, $(-1; 5)$, $(5; +\infty)$. Jen v prostředním z těchto intervalů jsou lineární činitelé čísly nesouhlasnými, jejichž součin je záporný. Čísla x z tohoto intervalu dané nerovnosti vyhovují. Shrneme-li výsledky našeho zkoumání, dostaneme: Daná nerovnost je splněna pro číslo $x = 2$ a pro čísla z intervalu $\langle -1; 5\rangle$. Tedy nerovnost je splněna pro čísla z intervalu $\langle -1; 5\rangle$.

Příklad 9. Řešme nerovnost
$$\frac{x-2}{x-3} - \frac{5}{x-1} \leqq 1.$$

Výrazy na levé straně nerovnosti mají smysl, jen když $x \neq 1$, $x \neq 3$. Převedeme-li všechny výrazy na zlomky o společném jmenovateli, dostaneme po sečtení a po zkrácení nerovnost

$$\frac{x - 3{,}5}{(x - 1)(x - 3)} \geq 0.$$

Výraz na levé straně poslední nerovnosti nabývá nulové hodnoty jen pro $x = 3{,}5$. Poněvadž případ, kdy nastává v této nerovnosti rovnost, jsme již vyšetřili, můžeme vyšetřovat již jen ostrou nerovnost

$$(x - 1)^{-1}(x - 3)^{-1}(x - 3{,}5) > 0,$$

která je však (za předpokladu $x \neq 1$, $x \neq 3$) ekvivalentní s nerovností

$$(x - 1)(x - 3)(x - 3{,}5) < 0.$$

Tato nerovnost je splněna pro x z intervalů $(1; 3)$, $(3{,}5; +\infty)$. Shrnutí. Daná nerovnost je splněna pro x z intervalů $(1; 3)$, $\langle 3{,}5; +\infty)$.

Příklad 10. Řešme nerovnost
$(x + 2)^3 (x + 1)^{-1} (x - 1)^{-2} (x - 3)^5 (x - 5)^4 \leq 0$.
Výraz na levé straně má smysl, jen když $x \neq -1$, $x \neq 1$. Rovnost nastane v dané nerovnosti pro $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$. Po vyšetření případů, kdy nastává rovnost, můžeme vyšetřovat ostrou nerovnost, kterou z této poslední nerovnosti dostaneme vynecháním znaménka $=$. Přitom vynecháme lineární dvojčleny se sudými exponenty, neboť představují kladná čísla v intervalech, o kterých budeme uvažovat, a všechny dvojčleny s lichými exponenty nahradíme dvojčleny s exponentem 1, takže dostaneme nerovnost

$$(x + 2)(x + 1)(x - 3) < 0.$$

Tato nerovnost má řešení, a to čísla x z intervalů $(-\infty; -2)$, $(-1; 3)$.

Shrnutí. Daná nerovnost je splněna pro číslo 5 a pro čísla z intervalů $(-\infty; -2\rangle$, $(-1; 3\rangle$.

Nerovnosti, které se dají převést na tvar $k_1|x - x_1| + k_2|x - x_2| + k_3|x - x_3| + \ldots + k_n|x - x_n| \leqq k_0x + q$ řešíme tak, že je vyšetřujeme v intervalech, jejichž krajními body jsou čísla $x_1 < x_2 < x_3 \ldots < x_n$, přesněji v intervalech $(-\infty; x_1\rangle$, $\langle x_1; x_2\rangle$, $\langle x_2; x_3\rangle, \ldots, \langle x_{n-1}; x_n\rangle$, $\langle x_n; +\infty)$.

Příklad 11. Řešme nerovnost $|x| - |x - 2| + |x - 5| \leqq 4$. Dělící body $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$ jsou krajními body intervalů $(-\infty; 0\rangle$, $\langle 0; 2\rangle$, $\langle 2; 5\rangle$, $\langle 5; +\infty)$, v nichž můžeme danou nerovnost vyšetřovat v libovolně zvoleném pořadí intervalů. Zvolme je např. odprava doleva.

a) Zkoumání v intervalu $\langle 5; +\infty)$. Když $x \geqq 5$, pak platí $|x| = x$, $|x - 2| = x - 2$, $|x - 5| = x - 5$. Po dosazení do dané nerovnosti dostaneme

$$x - (x - 2) - (x - 5) \leqq 4.$$

Po úpravě dostaneme $x \leqq 7$. Ve zkoumaném intervalu platí tedy daná nerovnost, jestliže $5 \leqq x \leqq 7$.

b) Zkoumání v intervalu $\langle 2; 5\rangle$. V tomto intervalu je již $x - 5 \leqq 0$, zatímco ostatní výrazy, a to x, $x - 2$ zůstávají ještě nezáporné. Proto platí v tomto intervalu $|x| = x$, $|x - 2| = x - 2$, $|x - 5| = -(x - 5)$. Po dosazení do dané nerovnosti a po krátké úpravě dostaneme $x \geqq 3$. Ve zkoumaném intervalu má tedy daná nerovnost řešení $3 \leqq x \leqq 5$.

c) Zkoumání v intervalu $\langle 0; 2\rangle$. V tomto intervalu platí $|x| = x$, $|x - 2| = -(x - 2)$, $|x - 5| = -(x - 5)$. Po dosazení a jednoduché úpravě dostaneme $x \leqq +1$. V tomto intervalu má tedy daná nerovnost řešení $0 \leqq x \leqq 1$.

d) Zkoumání v intervalu $(-\infty; 0\rangle$. V tomto intervalu platí $|x| = -x$, $|x-2| = -(x-2)$, $|x-5| = -(x-5)$. Po dosazení a úpravě dostaneme $x \geqq -1$. V tomto intervalu má tedy daná nerovnost řešení $-1 \leqq x \leqq 0$.

Shrnutí. Daná nerovnost platí pro všechna x z intervalů $\langle -1; 1\rangle$, $\langle 3; 7\rangle$.

Příklad 12. Řešte nerovnost $|4(x^2 + 2x)| < 3$ a rozhodněte pak, zda existuje nějaké okolí bodu 0, jehož prvky vyhovují dané nerovnosti.

Přepíšete-li danou nerovnost podle věty $\mathbf{A}_3$ na tvar $-3 < 4(x^2 + 2x) < 3$, zjistíte, že je třeba nalézt všechna čísla x, která vyhovují současně dvěma kvadratickým nerovnostem:

1. $4x^2 + 8x + 3 > 0$, 2. $4x^2 + 8x - 3 < 0$.

Násobíte-li tyto nerovnosti kladným číslem $\frac{1}{4}$ a provedete-li rozklad kvadratických trojčlenů na součin lineárních kořenových činitelů, dostanete místo nich ekvivalentní nerovnosti:

1. $(x + \frac{3}{2})(x + 1) > 0$,

2. $(x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{7})(x + 1 - \frac{1}{2}\sqrt{7}) < 0$.

Ostré kvadratické nerovnosti tohoto typu, v nichž levou stranu tvoří součin dvou lineárních činitelů $(x - x_1)(x - x_2)$, můžete podle vzoru předcházejících úvah tohoto článku rozřešit zkoumáním znamení hodnot tohoto součinu v intervalech $-(\infty; x_1)$, (x_1, x_2), $(x_3, +\infty)$. Snadno se ukáže, že kvadratický trojčlen $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$ je kladný v prvním i třetím z těchto intervalů a záporný v druhém z nich. Je účelné pamatovat si tento výsledek pro rychlé řešení kvadratických nerovností; k zapamatování vám bude jistě napomáhat poznatek, že graf funkce $y = x^2 + px + q$, která v bodech x_1, x_2 nabývá nulových hodnot, leží v neomezeném prvním i třetím intervalu nad osou x a v druhém intervalu (x_1, x_2) pod osou x (načrtněte si příslušný graf, jímž jest parabola protínající osu x v bodech x_1, x_2). Tak zjistíte, že výše uvedeným nerovnostem vyhovují čísla x v intervalech

$$1.\quad (-\infty;\ -\frac{3}{2}),\ (-\frac{1}{2};\ +\infty),\qquad 2.\quad (-1-\frac{1}{2}\sqrt{7};\ -1+\frac{1}{2}\sqrt{7}).$$

Dále zjistíte, že oběma nerovnostem vyhovují čísla x z intervalů

$$(-1-\frac{1}{2}\sqrt{7};-\frac{3}{2});\ (-\frac{1}{2};-1+\frac{1}{2}\sqrt{7}).$$

Na dodatkovou otázku dané úlohy můžeme nyní odpovědět, že okolí bodu 0, vyhovující dané podmínce, musí být částí druhého z těchto intervalů, který po jednoduchém výpočtu můžeme zapsat $(-0{,}5;\ 0{,}3)$. Jeho částmi jsou např. intervaly $(-0{,}3;\ +0{,}3)$ nebo $(-0{,}25;\ +0{,}25)$ apod.

Poznámka: Při studiu matematické analýzy se setkáte s řešením úloh typu, který byl v tomto příkladě naznačen. Zpravidla však stačí nalézt odpověď na otázku toho druhu, která byla uvedena jako dodatková otázka v naší úloze. Ukážeme, že řešení lze pak nalézt rychle užitím vět $\mathbf{K}_4$ a $\mathbf{A}_4$. Budeme-li předpokládat pro řešení naší úlohy $|x| < 1$, pak platí $|x^2| \leqq |x|$. Za tohoto předpokladu lze však danou nerovnost upravit tak, že existence řešení se snadno prokáže. Podle věty $\mathbf{A}_4$ můžete psát

$|4x^2 + 8x| \leqq |4x^2| + |8x| = 4|x^2| + 8|x| \leqq 4|x| + 8|x| = 12|x| < 3$. Odtud plyne: je-li $|x| < \frac{1}{4}$, tj. $-0{,}25 <$

$< x < 0{,}25$, potom je původní nerovnost splněna. Tento příklad ukazuje též užitečnost věty $\mathbf{A}_4$ která se často nazývá trojúhelníková nerovnost.

Cvičení

6.6 Řešte soustavy nerovností:

a) $x^2 - x - 2 \leqq 0, \quad 4x^2 - 12x + 5 \leqq 0;$
b) $x^2 + x - 2 > 0, \quad x^2 - 2x - 3 < 0;$
c) $(x^2 - 2x + 5)(x^2 - 4) < 0, \; (x^2 + 2x - 3)(x^2 -$
$- 2x + 1) > 0;$
d) $|x^2 - 3x| < 2;$
e) $|6x^2 - 5x| < 6.$

6.7 Řešte nerovnosti:

a) $\dfrac{2x - 5}{3 - 2x} \geqq 2;$ b) $\dfrac{x - 2}{2x + 3} \leqq 0;$

c) $\dfrac{x + 3}{x - 3} + \dfrac{x + 4}{x - 4} \geqq 2;$

d) $\dfrac{3x^2 - 7x + 2}{x^2 - x + 2} < 0;$

e) $\dfrac{2}{3} \leqq \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \leqq 2;$ f) $\left|\dfrac{x - 1}{x + 1}\right| \geqq 1.$