

O nerovnostech

5. Základní věty o nerovnostech

In: František Veselý (author): O nerovnostech. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1963. pp. 22–28.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/403474>

Terms of use:

© František Veselý, 1963

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

5. ZÁKLADNÍ VĚTY O NEROVNOSTECH



V matematice užíváme velmi často vztahů, označovaných značkami $=$, \neq , $<$, $>$, \leq , \geq . Je užitečné přehledně připomenout vlastnosti těchto vztahů a jejich vzájemnou souvislost. Písmena budou označovat reálná čísla. Vztah rovnosti ($=$) má tyto vlastnosti: Platí vždy $a=a$. Současně platí $a=b$, $b=a$. Z platnosti $a=b$, $b=c$ plyne $a=c$. Vztah nerovnosti (\neq) čili různosti má tyto vlastnosti: Nikdy neplatí $a \neq a$. Současně platí $a \neq b$, $b \neq a$. Z platnosti $a \neq b$, $b \neq c$ nelze soudit o vztahu a , c . Ze vztahů $=$ a \neq mezi dvěma čísly platí právě jeden. Jestliže tedy jeden z těchto vztahů popíráme, musíme uzнат platnost druhého. Vztah $a \neq b$ souvisí s následujícími vztahy tak, že při jeho platnosti musí platit jeden ze vztahů $a < b$ nebo $b > a$.

Společným názvem nerovnosti (v užším smyslu tohoto názvu) označujeme ty vztahy, které v matematice zapisujeme značkami $<$, $>$, \leq , \geq . Vztahy zapsané znaky $<$, $>$ se často nazývají nerovnosti ostré, vztahy zapsané znaky \leq , \geq nerovnosti neostré. Vztahy $a < b$, $b > a$, o nichž říkáme, že jsou navzájem obrácené (konverzní), současně platí nebo současně neplatí. Také nerovnosti $a \leq b$, $b \geq a$ jsou navzájem obrácené. Dvojice nerovností $a < b$, $a \geq b$ a také dvojice $a > b$, $a \leq b$ mají tu vlastnost, že z každé dvojice platí právě jedna nerovnost. Z popření (negace) platnosti kterékoli z těchto nerovností vyplývá platnost druhé nerovnosti v téže dvojici. Říkáme též, že nerovnosti v těchto dvojicích jsou navzájem protikladné (kontradiktorické).

Nyní uvedeme několik definic:

1. Platí-li $a > 0$, říkáme, že číslo a je kladné, platí-li $a < 0$, říkáme, že číslo a je záporné. 2. Jsou-li dvě čísla obě kladná nebo obě záporná, říkáme, že jsou souhlasná. Je-li ze dvou čísel jedno kladné a jedno záporné, říkáme, že jsou nesouhlasná. 3. Souhlasné nerovnosti jsou takové, v jejichž zápisu je stejná značka nerovnosti. 4. Zápis soustavy nerovností $a < b$, $b < c$ provádíme stručněji $a < b < c$ a takto zapsanou soustavu nerovností nazýváme postupná nerovnost a čísla a , b , c její členy.

Ostré a neostré nerovnosti mají tyto vlastnosti:

- N Nikdy neplatí $a < a$ ani $a > a$.
P Vždy platí $a \leq a$ a také $a \geq a$.
R Ze současné platnosti $a \leq b$, $a \geq b$ plyne $a = b$.
S₁ Platí-li $a < b$, pak platí též $a \leq b$.
S₂ Platí-li $a > b$, pak platí též $a \geq b$.

Nyní uvedeme nejdůležitější věty o nerovnostech mezi reálnými čísly a , b , c .

- T₁ Platí právě jeden ze vztahů $a < b$ nebo $a = b$ nebo $a > b$.
T₂ a) Je-li $a < b$, $b < c$, pak platí $a < c$.
b) Je-li $a > b$, $b > c$, pak platí $a > c$.
Platí obdobně též pro nerovnosti neostré.
T₃ Nerovnost mezi čísly zůstane v platnosti, jestliže na obou jejích stranách totéž číslo přičteme.
T₄ Nerovnost mezi čísly zůstane v platnosti, jestliže čísla na obou jejích stranách týmž kladným číslem znásobíme.
T₅ Znásobíme-li čísla na obou stranách nerovnosti týmž číslem záporným, pak platí mezi nimi nerovnost obrácená.
T₆ Součin dvou čísel souhlasných je kladný, nesouhlasných záporný.

- T₇** Vždy platí $a^2 \geq 0$; je-li $a \neq 0$, pak $a^2 > 0$.
T₈ Každé číslo $a \neq 0$ je souhlasné s číslem k němu převráceným.
T₉ Souhlasné nerovnosti je dovoleno sčítat.

Pro nerovnosti mezi kladnými čísly platí ještě tyto další věty:

- K₁** Souhlasné nerovnosti mezi kladnými čísly je dovoleno spolu znásobit.
K₂ Nerovnost mezi kladnými čísly je dovoleno umocnit nebo odmocnit.
K₃ Platí-li mezi dvěma kladnými čísly nerovnost, pak mezi čísly k nim převrácenými platí nerovnost obrácená.
K₄ Pro kladné číslo a a pro přirozená čísla $m < n$ platí:
 a) je-li $a < 1$, pak $a^m > a^n$;
 b) je-li $a = 1$, pak $a^m = a^n = 1$;
 c) je-li $a > 1$, pak $a^m < a^n$.

Pro absolutní hodnoty reálných čísel platí:

- A₁** $|a| = a$, je-li $a \geq 0$; $|a| = -a$, je-li $a \leq 0$.
A₂ $-|a| \leq a \leq |a|$.
A₃ $|a| < \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$ znamená totéž jako $-\varepsilon < a < \varepsilon$.
A₄ $||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$.

Všechny věty uvedené v tomto přehledu nejsou na sobě nezávislé. Dá se dokonce ukázat, že užitím vět **T₁**, **T₂**, **T₃**, **T₄** bylo by možno dokázat všechny další věty v tomto přehledu za nimi uvedené. Z toho je zřejmá velká důležitost vět **T₁** – **T₄**, které byste si měli především dobře zapamatovat. Budete-li však znát i věty za nimi následující, urychlíte tím svou práci při řešení mnohých úloh.

Příklad 1. Na ukázkou toho, jak se dokazují věty výše uvedené, dokážeme větu **T₅** za předpokladu správnosti vět

T_1 až T_4 . Větu T_5 dokážeme nejprve pro nerovnost $a < b$. Záporné číslo, jímž chceme nerovnost znásobit, označíme c ; platí tedy $c < 0$. Jestliže k číslům na obou stranách této nerovnosti přičteme $-c$ podle věty T_3 , dostaneme $0 < -c$ čili přechodem k obrácené nerovnosti $-c > 0$, což znamená, že číslo $-c$ je číslo kladné. Jestliže tímto číslem znásobíme nerovnost $a < b$, což je dovoleno podle věty T_4 , dostaneme $-ca < -cb$. Jestliže na obou stranách této nerovnosti přičteme číslo $ca + cb$, dostaneme $bc < ac$. Přechodem k zápisu s obrácenou nerovností dostaneme $ac > bc$. Tím je dokázána již podstatná část naší poučky T_5 . Je nyní potřebí dokázat větu o násobení nerovnosti $a > b$ číslem $c < 0$. To je snadné, a to třeba tak, že užijeme obdobného postupu jako v případě předcházejícím. Je však možno také nerovnost $a > b$ přepsat na tvar $b < a$ a provést násobení této nerovnosti kladným číslem $-c > 0$ a postupovat dále stejně jako v případě předchozím. Zjistíme přitom, že poslední krok nebude nutné provádět již tak jako v případě předchozím. Tím je již věta dokázána pro obě ostré nerovnosti. Poněvadž však rovnost $a = b$ smíme násobit číslem c , ať je jakékoli, vede nás toto zjištění k tomu, že věta T_5 platí i pro nerovnosti neostré.

Příklad 2. Máme dokázat, že pro kladná čísla a, b platí nerovnost $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Jestliže danou nerovnost znásobíme číslem $ab > 0$, dostaneme $a^2 + b^2 \geq 2ab$. (5.1)
 Po převedení čísla $2ab$ na levou stranu a po jednoduché úpravě dostaneme $(a - b)^2 \geq 0$. Nerovnost platí tehdy a jen tehdy, platí-li $(a - b)^2 \geq 0$. Tento vztah však platí podle T_7 . Důkaz je proveden.

Jestliže z dané nerovnosti dostaneme úpravou druhou

nerovnost takovou, že obě nerovnosti současně platí nebo současně neplatí při jakémkoli dosazení určitých čísel do početních výrazů, z nichž se nerovnosti skládají, pak takové nerovnosti nazýváme ekvivalentní a příslušnou úpravu ekvivalentní úpravou. Důkaz platnosti dané nerovnosti můžeme proto provádět tak, že ji ekvivalentními úpravami převedeme na nerovnost, jejíž platnost je již dokázána.

Příklad 3. Máme dokázat, že pro libovolná reálná čísla a, b, c platí nerovnost $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$.

1) Znásobíme-li danou nerovnost číslem 2 a všechny členy převedeme na levou stranu, pak výraz na levé straně upravíme tak, že dostaneme $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$. Tento vztah však platí, neboť podle T_7 je čtverec každého dvojčlenu na levé straně nezáporný a proto je nezáporný i jejich součet. Poněvadž jsme od původní nerovnosti k nerovnosti $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$ dospěli ekvivalentními úpravami, je důkaz proveden.

2) Má-li někdo v paměti vztah (5.1), pak ho snad napadne, aby k němu připsal další nerovnosti z něho plynoucí záměnou písmen, tj. $b^2 + c^2 \geq 2bc$, $c^2 + a^2 \geq 2ac$; všechny platí pro libovolná reálná čísla. Sečteme-li tyto nerovnosti podle věty T_9 , pak po zkrácení číslem 2 dostaneme hned nerovnost, kterou jsme měli dokázat.

Příklad 4. Pro libovolná reálná čísla a, b, c platí nerovnost $a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$. Dokažte.

Podle znění dané úlohy může být na levé straně dané nerovnosti i číslo záporné a danou nerovnost nelze umocnit, neboť umocňování je podle věty K_2 ekvivalentní úpravou jen pro nerovnosti mezi kladnými čísly. Rozpomene-li se však na větu A_2 , pak podle nerovnosti, kterou představuje druhý a třetí člen postupné nerovnosti A_2 , můžeme psát $a + b \leq |a + b|$. Kdybychom k ní připsali další

nerovnost $|a + b| \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$, pak by z této dvojice nerovností plynula podle věty T_2 nerovnost, kterou máme dokázat, ovšem za předpokladu, že nerovnost $|a + b| \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$ platí. Důkaz její platnosti je však nyní snadný, když ji jako nerovnost mezi nezápornými čísly můžeme umocnit a dalšími ekvivalentními úpravami uvést na tvar $(a - b)^2 \geq 0$. Proveďte podrobně sami.

Cvičení

5.1 Jsou-li a, b libovolná kladná čísla taková, že $a > b$, platí tato tvrzení: a) zlomek $\frac{a}{b}$ se zmenší, když jeho čitatele i jmenovatele zvětšíme o stejné kladné číslo; b) zlomek $\frac{b}{a}$ se zvětší, když jeho čitatele i jmenovatele zvětšíme o stejné kladné číslo. Dokažte.

5.2 Do třídy, do níž chodí chlapci i děvčata, přistoupil stejný počet chlapců i děvčat. Co lze usoudit o vztahu mezi původním počtem chlapců i děvčat, ví-li se, že po přistoupení nových žáků a žákyň původní počet % chlapců a) se zvýšil, b) se nezměnil, c) klesl,

5.3 Dokažte, že geometrický průměr dvou nezáporných čísel se nejvýš rovná jejich aritmetickému průměru. Kdy nastane rovnost?

5.4 Dokažte, že pro kladná čísla a, b platí:

a) $a + \frac{1}{a} \geq 2$,

b) $(a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$.

5.5 Dokažte, že pro reálná čísla a taková, že $|a| < 1$, platí:

$$\text{a) } \frac{1}{1-a} \geq 1+a,$$

$$\text{b) } \frac{1}{1+a} \geq 1-a.$$

Kdy nastane rovnost?

5.6 Jsou-li a, b velikosti odvěsen a c velikost přepony pravoúhlého trojúhelníka, pak o nich platí: a) $a + b \leq c \sqrt{2}$, b) $c > \frac{2}{3}(a + b)$. Dokažte tato tvrzení.

5.7 Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a platí nerovnost

$$\frac{a^2}{a^4 + 1} \leq \frac{1}{2}.$$

5.8 Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c platí nerovnosti

$$\text{a) } (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9,$$

$$\text{b) } \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Rozhodněte též, kdy platí rovnost.