4. MNOŽINY BODŮ V PŘÍMCE INTERVALY

•

Názvem číselná množina budeme v této knížce označovat stále jen takové množiny, jejichž prvky jsou reálná čísla. Z těchto číselných množin užíváme v matematice zejména často takových, jimž na číselné ose odpovídají úsečky nebo polopřímky a celá číselná osa. Nazývají se intervaly a v tomto článku pojednáme o nich podle druhů, na které se rozdělují.

Nechť jsou dána dvě čísla a, b, pro něž platí $a \leqq b$. Pak množina všech reálných čísel, pro která platí dvě nerovnosti $x \geqq a$, $x \leqq b$, což zapisujeme stručněji $a \leqq x \leqq b$, se nazývá uzavřený interval. Pro takovou množinu budeme užívat též zápisu $\langle a, b \rangle$. Obrazem této množiny bodů na číselné ose je úsečka s krajními body, které odpovídají číslům a, b. Číselnou množinu, pro kterou platí $a < x < b$, nazýváme otevřený interval a užíváme pro něj zápisu (a, b). Obrazem této množiny na číselné ose jsou vnitřní body úsečky s krajními body a, b. Liší se tedy $\langle a, b \rangle$ a (a, b) tím, že krajní body intervalu v prvním případě k intervalu patří a v druhém případě nepatří. Symboly $\langle a, b)$ a $(a, b\rangle$ znamenají ovšem intervaly (polouzavřené), k nimž jeden krajní bod intervalu patří a druhý nepatří.

Při řešení úloh na operace s intervaly si pomáháme někdy tím, že je znázorňujeme buď na číselné ose s vyznačením krajních bodů úhlovými nebo okrouhlými závorkami nebo při vyznačování většího počtu intervalů pomocnými úsečkami, které rýsujeme rovnoběžně s číselnou osou a blízko ní. Příklady jsou narýsovány v obr. 1a, kde jsou vyznačeny tyto intervaly: $I_1 = \langle -2; 1 \rangle$, $I_2 = (2; 4)$, $I_3 = \langle -1; 3)$, $I_4 = (4; 6\rangle$. Na obr. 1c je vyznačen též otevřený interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, který je množinou všech bodů z okolí bodu a takových, že jejich vzdálenost od bodu a je menší než dané kladné číslo ε. Matematikové nazývají takový interval epsilonovým okolím bodu a.

Obr. 1.

V matematice užíváme též intervalů neomezených. Jsou to číselné množiny popsané jednou z nerovností tvaru $x \leqq c$, $x \geqq c$, $x < c$, $x > c$, v nichž c je dané číslo. Jim na číselné ose odpovídají polopřímky s krajním bodem c, který k intervalu patří nebo nepatří podle toho, je-li příslušná množina popsána nerovností neostrou nebo ostrou. Chceme-li pro označování neomezených intervalů užít obdobného způsobu jako při intervalech omezených, užijeme symbolů $-\infty$, $+\infty$, které čteme „minus nekonečno" a „plus nekonečno", a které používáme k vyznačení, že interval není zleva nebo zprava omezen. Výše uvedené intervaly označujeme takto: $(-\infty, c\rangle$, $\langle c, +\infty)$, $(-\infty, c)$,

$(c, +\infty)$. Celou číselnou osu označujeme někdy jako interval $(-\infty, +\infty)$. Pomocné značky $-\infty$, $+\infty$ jsme tu zavedli jen k úspornému označování neomezených intervalů. Na obr. 1b jsou vyznačeny tyto neomezené intervaly: $I_5 = (-\infty; -1\rangle$, $I_6 = \langle -1; +\infty)$, $I_7 = (-\infty; 3)$, $I_8 = (0; +\infty)$.

Poněvadž intervaly jsou množiny, můžeme tvořit jejich sjednocení nebo průniky, jak to bylo vysvětleno v předchozím článku. Ukážeme to na několika příkladech s výše uvedenými intervaly.

Příklad 1. Sjednocením intervalů I_1 a I_3 je interval $\langle -2; 3)$, jejich průnikem $\langle -1; 1\rangle$. Sjednocením intervalů I_3 a I_2 je interval $\langle -1; 4)$, jejich průnikem $(2; 3)$. Sjednocením intervalů I_5 a I_7 je interval I_7, jejich průnikem je I_5. Sjednocením intervalů I_7 a I_8 je interval $(-\infty, +\infty)$, jejich průnikem je $(0; 3)$. Sjednocením intervalů I_1 a I_6 je interval $\langle -2; +\infty)$, jejich průnikem je $\langle -1; 1\rangle$.

Příklad 2. Sjednocením intervalů I_1 a I_2 je množina všech prvků z I_1 a I_2, avšak nelze ji zapsat jako jeden interval, jejich průnikem je prázdná množina, neboť tyto intervaly nemají žádný společný prvek. Sjednocením intervalů I_5 a I_6 je interval $(-\infty, +\infty)$, jejich průnikem je množina mající jen jeden prvek, totiž číslo 1. Sjednocením tří intervalů I_1, I_2, I_3 je interval $\langle -2; 4)$, jejich průnikem je $\emptyset$.

V závěru tohoto článku vás upozorníme na některé zajímavé vlastnosti intervalů a jim odpovídajících geometrických útvarů na číselné ose, tj. přímky, polopřímky a úsečky.

1. Geometrický útvar se nazývá konvexní, jestliže pro každé dva jeho libovolně zvolené body X, Y platí, že

všechny body úsečky XY jsou body tohoto útvaru. Je zřejmé, že přímka, polopřímka i úsečka jsou konvexní útvary. Pro konvexní útvary platí věta, že jejich průnik je opět konvexní útvar. Můžete si to ověřit na úsečce, která je průnikem dvou polopřímek.

2. Jestliže k intervalu patří levý krajní bod, existuje v něm číslo nejmenší, a jestliže k němu patří pravý krajní bod, existuje v něm číslo největší. V uzavřeném intervalu existuje nejmenší i největší číslo, v otevřeném intervalu neexistuje ani nejmenší ani největší číslo.

Cvičení

4.1 Určete sjednocení a průniky dvojic neomezených intervalů v těchto případech: a) $(-\infty; 2)$, $(-\infty; 4)$, b) $\langle 1; +\infty)$, $\langle 5; +\infty)$, c) $(-\infty; 3)$, $\langle -3; +\infty)$, d) $(-\infty; 2{,}4\rangle$, $\langle 2{,}4; +\infty)$, e) $(-\infty; 1)$, $\langle 1; +\infty)$.

4.2 Určete sjednocení a průniky dvojic omezených intervalů a) $\langle -2; 1\rangle$, $\langle -1; 3\rangle$, b) $(-2; 1)$, $(-1; 3)$, c) $\langle -2; 1\rangle$, $\langle 1; 2\rangle$, d) $(-2; 1)$, $(1; 2)$, e) $\langle -2; 1)$, $(1; 4)$.

4.3 Určete sjednocení a průniky intervalů v těchto případech: a) $(-\infty; 1)$, $(-1; 3)$, b) $(-2; 1)$, $\langle -1; 1\rangle$, c) $\langle -3; +\infty)$, $(3; 5\rangle$.

4.4 Určete sjednocení a průniky tří daných intervalů: a) $(-\infty; 2)$, $(-2; +\infty)$, $\langle -1; 1\rangle$, b) $\langle -2; 4\rangle$, $\langle 0; 5\rangle$, $\langle 1; 3\rangle$.