O nerovnostech

2. Některé poznatky z analytické geometrie (analytický popis polorovin)

In: František Veselý (author): O nerovnostech. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1963. pp. 8–14.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403471

2. NĚKTERÉ POZNATKY Z ANALYTICKÉ GEOMETRIE (analytický popis polorovin)

●

Ze školy je vám známo, jak lze v rovině, v níž byla zvolena pravoúhlá souřadnicová soustava, přiřadit všem bodům $[x, y]$ dané přímky p lineární rovnici, která má obecný tvar $ax + by + c = 0$. V tomto článku vám chceme ukázat, jak lze v takové rovině přiřadit všem bodům $[x, y]$ poloroviny vyťaté přímkou p lineární nerovnost $ax + by + c \geq 0$ nebo nerovnost obrácenou, tj. $ax + by + c \leq 0$, a všem vnitřním bodům těchto polorovin nerovnost $ax + by + c > 0$ nebo nerovnost obrácenou, tj. $ax + by + c < 0$. Dříve než tak učiníme, připomeneme vám některé základní pojmy z geometrie a pak se umluvíme na užívání některých názvů a značek, jímž se umožní stručnost v našich pozdějších výkladech.

Je-li dána přímka p a mimo ni ležící bod A, jest jimi určena rovina pA. Přímka p rozděluje body této roviny na tři části:

I. Všechny takové body X roviny pA, pro které platí, že úsečka AX nemá žádný bod společný s přímkou p; nevylučujeme $X \equiv A$.

II. Všechny body přímky p.

III. Všechny takové body X roviny pA, pro které platí, že úsečka AX má vnitřní bod společný s přímkou p.

Souhrn všech bodů, které leží v části I. a II., nazveme polorovinou, určenou přímkou p a bodem A, a označíme ji $\varrho\,(p, A)$. Souhrn všech bodů, které leží v části II. nebo III. nazveme polorovinou opačnou k $\varrho\,(p, A)$. Polorovina $\varrho\,(p, A)$ a polorovina k ní opačná mají společné body přímky p, kterou nazýváme hraniční přímkou obou polorovin. Body části I. nazveme vnitřními body $\varrho\ (p, A)$ a body části III. vnitřními body poloroviny opačné k $\varrho\ (p, A)$.

V rovině, v níž byla zvolena kartézská pravoúhlá souřadnicová soustava, můžeme si označování obou polorovin vyťatých přímkou p ještě více zjednodušit. Za předpokladu, že souřadnicová soustava s počátkem O a jednotkovými body J_1 na první souřadnicové ose[4]) a J_2 na druhé byla zvolena tak, že osa x je vodorovná, osa y svislá, bod J_1 leží vpravo od bodu O a bod J_2 nad bodem O, můžeme rozlišení polorovin vyťatých přímkou p charakterizovat zhruba takto: a) Je-li přímka p různoběžná s osou y, pak dolní polorovinu označíme $\varrho\ (p)$ a horní $\bar{\varrho}\ (p)$. b) Je-li přímka p rovnoběžná s osou y, označíme levou polorovinu $\varrho\ (p)$ a pravou $\bar{\varrho}\ (p)$. Pro praktickou potřebu řešení úloh v této knížce by snad stačila tato úmluva, která se odvolává na smyslový názor při volbě zvláštní souřadnicové soustavy. Ukážeme však, že můžeme zavést označení $\varrho\ (p)$ a $\bar{\varrho}\ (p)$ bez odvolání na názor takto:

1. Prochází-li přímka p_0 počátkem a je různá od osy y, pak označíme $\bar{\varrho}\ (p_0)$ polorovinu $\varrho\ (p_0, J_2)$ a $\varrho\ (p_0)$ polorovinu opačnou. Jestliže posuneme přímku p_0 tak, aby se dostala do polohy $p \parallel p_0$ a protínala osu y v bodě Q, pak označíme $\varrho\ (p)$ a $\bar{\varrho}\ (p)$ ty poloroviny, které dostaneme posunutím $\varrho\ (p_0)$ a $\bar{\varrho}\ (p_0)$, při němž počátek O přejde do bodu Q.

2. Jestliže p_0 splývá s osou y, pak označíme $\bar{\varrho}\ (p_0)$ polorovinu $\varrho\ (p_0, J_1)$ a $\varrho\ (p_0)$ polorovinu opačnou. Jestliže posuneme přímku p_0 tak, aby se dostala do polohy $p \parallel p_0$ a protínala osu x v bodě P, pak označíme $\varrho\ (p)$ a $\bar{\varrho}\ (p)$

[4]) $J_1 \equiv [1;0]$ $J_2 \equiv [0;1]$

ty poloroviny, které dostaneme posunutím $\varrho(p_0)$ a $\bar{\varrho}(p_0)$, při němž počátek O přejde do bodu P.

Nechť je dána přímka p různoběžná s osou y rovnicí ve směrnicovém tvaru $y = kx + q$. Zvolme nyní libovolně mimo přímku p ležící bod $M \equiv [x, y]$, tj. vnitřní bod z $\varrho(p)$ nebo $\bar{\varrho}(p)$. (Udělejte si náčrtek.) Bod P přímky p, který má s bodem M stejnou souřadnici x, je bod $[x, kx + q]$. Pro souřadnici y bodu M však platí:
$y > kx + q$, je-li M vnitřním bodem poloroviny $\bar{\varrho}(p)$ 0
$y < kx + q$, je-li M vnitřním bodem poloroviny $\varrho(p)$ 0.
Poněvadž k polorovinám $\bar{\varrho}(p)$ i $\varrho(p)$ počítáme též body hraniční přímky $y = kx + q$, dostáváme pro body obou polorovin tyto nerovnosti:

$$y \geqq kx + q \text{ pro body z poloroviny } \bar{\varrho}(p),$$
$$y \leqq kx + q \text{ pro body z poloroviny } \varrho(p).$$

Znásobíme-li druhou z těchto nerovností číslem -1 a v obou nerovnostech převedeme všechny členy na levou stranu nerovnosti, dostaneme

$$-kx + y - q \geqq 0 \text{ pro body z poloroviny } \bar{\varrho}(p),$$
$$kx - y + q \geqq 0 \text{ pro body z poloroviny } \varrho(p).$$

Jsou to nerovnosti souhlasného druhu ($\geqq$) a jejich platnost pro obě poloroviny se snadno mnemotechnicky zapamatuje: je-li koeficient při y rovný číslu $+1$, jde o polorovinu $\bar{\varrho}(p)$ (horní), je-li -1, jde o polorovinu $\varrho(p)$ (dolní). Na tento tvar však převedeme každou nerovnost tvaru

$$ax + by + c \geqq 0, \tag{2.1}$$

jestliže celou nerovnost dělíme kladným číslem $|b|$. Podíl $\frac{b}{|b|} = \pm 1$ podle toho, je-li $b > 0$ nebo $b < 0$. Dělení však není nutno provádět, neboť stačí, když určíme znamení čísla b.

Je-li p přímka jdoucí bodem $[r; 0]$ rovnoběžná s osou y, snadno zjistíme, že platí $x \geqq r$ pro body z $\bar{\varrho}(p)$

a $x \leqq r$ čili $-x \geqq -r$ pro body z $\varrho(p)$. Na tento tvar můžeme však snadno převést nerovnost $ax + c \geqq 0$, jestliže absolutní člen c převedeme na pravou stranu a pak celou nerovnost dělíme kladným číslem $|a|$.

Shrnutím těchto výsledků můžeme stanovit pravidlo pro určení polorovin popsaných nerovností tvaru (2.1) takto:

1. Je-li $b \neq 0$, pak při $b < 0$ platí nerovnost pro body z $\varrho(p)$ a při $b > 0$ pro body z $\bar{\varrho}(p)$.

2. Je-li $b = 0$, pak při $a < 0$ platí nerovnost pro body z $\varrho(p)$ a při $a > 0$ pro body z $\bar{\varrho}(p)$.

Bylo by ovšem možné odvodit i jiná pravidla pro rozhodování o tom, pro kterou polorovinu nerovnost (2.1) platí. Nebudeme je ovšem odvozovat, poněvadž pro řešení úloh v dalších článcích této knížky obsažených vystačíme s tímto pravidlem. Dobře si však zapamatujeme, že hraniční přímkou poloroviny, pro kterou platí nerovnost (2.1), je přímka o rovnici $ax + by + c = 0$, a že pro vnitřní body příslušných polorovin dostaneme platnou nerovnost, když neostrou nerovnost např. se znaménkem $\geqq$ změníme na ostrou nerovnost se znaménkem $>$.

Příklad 1. Rozhodněte, pro které body platí nerovnost $3x + 2y - 15 < 0$ a také o tom, zda platí pro body $A \equiv [0; 0]$, $B \equiv [4; 1]$, $C \equiv [2; 6]$, $D \equiv [-1; 9]$.

Tato nerovnost platí pro vnitřní body poloroviny vyťaté přímkou r, která má rovnici $3x + 2y - 15 = 0$. Abychom danou nerovnost převedli na nerovnost se znaménkem $>$, znásobíme ji číslem -1 a podle záporného koeficientu při y v nerovnosti $-3x - 2y + 15 > 0$ rozhodneme, že jde o dolní polorovinu $\varrho(r)$. Dosadíme-li třebas do původní nerovnosti souřadnice bodu A, obdržíme $-15 < 0$; je tedy bod A vnitřním bodem poloroviny $\varrho(r)$. Podobně to zjistíme i o bodu B. Při dosazení souřadnic bodu C do původní nerovnosti dostaneme

$3 < 0$, což neplatí; bod C leží v $\bar{\varrho}(r)$. Dosadíme-li do původní nerovnosti souřadnice bodu D, dostaneme $0 < 0$, což neplatí. Bod D není vnitřním bodem $\varrho(r)$, leží však zřejmě na hraniční přímce r, jejíž rovnici vyhovuje.

Příklad 2. Rozhodněte, zda přímka s daná rovnicí $x - 2y + 4 = 0$ protíná strany trojúhelníka o vrcholech $A \equiv [-3; 1]$, $B \equiv [4; -1]$, $C \equiv [2; 3]$. Po dosazení souřadnic vrcholů A, B, C daného trojúhelníka ABC do levé strany rovnice přímky s dostaneme výsledky -1, 10, 0. Bod C leží tedy na přímce s, která protíná stranu AB daného trojúhelníka ABC, poněvadž body A, B leží v opačných polorovinách vyťatých přímkou s.

Příklad 3. Najděte nerovnost, která platí pro polorovinu $\varrho(p, M)$, je-li hraniční přímka p určena body $[0; 1]$, $[5; 5]$, a bod $M \equiv [9; 8]$. Ze známého vzorce $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ najdeme $k = \dfrac{5 - 1}{5 - 0} = \dfrac{4}{5}$ a dosazením souřadnic bodu M do rovnice $y = \dfrac{4}{5}x + q$ vypočteme q. Po úpravě má rovnice přímky p tvar $4x - 5y + 5 = 0$. Dosadíme-li do levé strany této rovnice souřadnice bodu M, dostaneme jako hodnotu výrazu $4x - 5y + 5$ číslo 1. Pro bod M platí tedy nerovnost $4x - 5y + 5 > 0$. Podle známého pravidla můžeme určit $\varrho(p) \equiv \varrho(p, M)$. Leží tedy bod M pod přímkou p.

Uvědomte si, že jsme zjišťovali některé vztahy mezi geometrickými prvky jen početními metodami. Při studiu těchto příkladů i při řešení úloh v následujících cvičeních rýsujte příslušné obrazce, abyste se přesvědčili o významu početních metod pro geometrii, která jindy vydatně pomáhá výpočtářské technice. Poloroviny, pro které platí dané nebo nalezené nerovnosti, si vyznačte nějakou značkou nebo šrafováním.

Tento článek zakončíme tím, že bez důkazu uvedeme vzorec pro výpočet vzdálenosti v daného bodu $[x_0, y_0]$ od přímky dané rovnicí $ax + by + c = 0$. Platí pro ni

$$v = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Příklad 4. Vypočtěte vzdálenosti v_1, v_2 bodů $M_1 \equiv [1; 0]$, $M_2 \equiv [-5; -4]$ od přímky p dané rovnicí

$$12x - 5y + 14 = 0.$$

Snadno provedeme výpočet

$$v_1 = \frac{|12.1 - 5.0 + 14|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{|26|}{13} = 2,$$

$$v_2 = \frac{|12(-5) - 5(-4) + 14|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{|-26|}{13} = 2.$$

Oba body M_1, M_2 mají od přímky p stejnou vzdálenost $v_1 = v_2 = 2$. Přitom snadno též zjistíme, že body M_1, M_2 leží v opačných polorovinách vyťatých přímkou p.

Cvičení

2.1 Rozhodněte, zda body $A \equiv [2; 4]$, $B \equiv [6; 2]$, $C \equiv [8; 3]$ leží v polorovině dané nerovností

a) $x - 2y - 2 \geqq 0$,

b) $3x + 2y - 21 \geqq 0$,

c) $x \geqq 7$.

2.2 Rozhodněte početně, zda trojúhelník o vrcholech $A \equiv [-2; -1]$, $B \equiv [4; 2]$, $C \equiv [2; 3]$ má společné body s přímkou, která je dána rovnicí a) $3x - 4y + 4 = 0$, b) $x + y = 0$, c) $2x - y - 6 = 0$.

2.3 Narýsujte hraniční přímky polorovin, které jsou dány nerovnostmi $3x + y \geqq 0$, $x - y \leqq 0$, $y \geqq 3$ a šrafováním vyznačte část roviny, v níž leží body společné všem daným polorovinám.

2.4 S použitím náčrtu charakterizujte body, které vyhovují současně třem daným ostrým nerovnostem $x + y > 0$, $x - y < 0$, $x - 3y + 8 > 0$.