

O funkcích

4. Neřešené úlohy

In: Miroslav Šisler (author); Jiří Jarník (author): O funkcích. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1962. pp. 54–55.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/403462>

Terms of use:

© ÚV Matematické olympiády

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

4. NEŘEŠENÉ ÚLOHY



1. Znázorněte graficky průběh funkcí: a) $y = \frac{x-1}{|x-1|}$;

b) $y = x^2 - |x^2 - 1|$.

2. Vyšetřte průběh funkce $f(x) = |x^2 - 25| - |x^2 - 2x|$.

3. Vyšetřte podrobně průběh funkce $y = x^3 - 12x$.
(Návod: postupujte jako v úloze 2.)

4. Dokažte, že funkce z úlohy 5 není shora ohraničená.

5. Dokažte, že funkce z příkladu 4 má minimum $-\frac{3}{2}$.

6. Dokažte, že funkce $y = \cos x + \sin x$ má maximum $M = \sqrt{2}$ a minimum $m = -\sqrt{2}$. (Návod: zkoumejte funkci $(\cos x + \sin x)^2$.)

7. Nakreslete graf funkce $y = \frac{2x-3}{4x+2}$ (tzv. lineární lomené funkce).

8. Dokažte, že funkce $y = \frac{x+1}{-x^2}$ je shora ohraničená, určete její maximum a nakreslete graf. (Návod: postupujte obdobně jako v úloze 9.)

9. Dokažte, že funkce z úlohy 8 je shora ohraničená v intervalu $(-\infty, a)$, zdola ohraničená v intervalu (b, ∞) a není zdola ani shora ohraničená v intervalu (a, b) .

10. Dokažte, že funkce $y = \frac{b}{x-a} - \frac{a}{x-b}$, kde $0 < a < b$, má tyto vlastnosti:

- a) Není definována pro $x = a, x = b$;
- b) je klesající v intervalu $(-\infty, a)$;
- c) je klesající v intervalu $(a, a + b - \sqrt{ab})$;
- d) je rostoucí v intervalu $(a + b - \sqrt{ab}, b)$;
- e) je rostoucí v intervalu $(b, a + b + \sqrt{ab})$;
- f) je klesající v intervalu $(a + b + \sqrt{ab}, \infty)$.

Dále stanovte minimum funkce v intervalu (a, b) a maximum v intervalu (b, ∞) . Zvolte za a, b nějaká kladná čísla a načrtněte graf dané funkce. (Návod: nejprve dokažte, že $a < a + b - \sqrt{ab} < b < a + b + \sqrt{ab}$.)