O funkcích

3. Řešené úlohy

In: Miroslav Šisler (author); Jiří Jarník (author): O funkcích. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1962. pp. 21–53.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403461

3. ŘEŠENÉ ÚLOHY

•

Úloha 1. Vyšetřte průběh funkce $y = |x+1| + |x-1|$ a nakreslete její graf.

Řešení. Funkce je definována pro všechna čísla x. Vidíme, že při jejím studiu jsou zvláště významné body $x = -1$ a $x = 1$. Pro $x = -1$ je totiž $|x+1| = 0$ a pro $x = 1$ je $|x-1| = 0$, takže v těchto bodech výrazy v absolutních hodnotách mění znaménko. Rozdělíme osu x na tři části, intervaly $(-\infty, -1\rangle$, $\langle -1, 1\rangle$, $\langle 1, \infty)$. Funkci budeme zkoumat v každém z těchto intervalů zvlášť, neboť v těchto intervalech lze funkci vyjádřit bez použití absolutních hodnot.

a) Nejprve si všimněme intervalu $(-\infty, -1\rangle$. Zde platí $x + 1 \leqq 0$ a $x - 1 < 0$. Je tedy $|x+1| = -x-1$, $|x - 1| = -x + 1$. Funkce y má v tomto intervalu tvar

$$y = -x - 1 - x + 1 = -2x.$$

Grafem dané funkce je tedy v intervalu $(-\infty, -1\rangle$ polopřímka (jejíž počáteční bod je $[-1, 2]$ a leží na ní např. bod $[-3, 6]$), neboť jde o lineární funkci (přímá úměrnost).

b) Dále uvažujme interval $\langle -1, 1\rangle$. Zde platí $x + 1 \geqq 0$, $x - 1 \leqq 0$, takže je $|x+1| = x+1$, $|x - 1| = -x + 1$. Funkce y má tedy v intervalu $\langle -1, 1\rangle$ tvar

$$y = x + 1 - x + 1 = 2$$

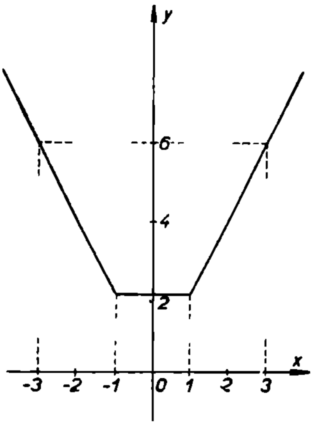
a je tedy v tomto intervalu konstantní. Jejím grafem je úsečka o krajních bodech $[-1, 2]$ a $[1, 2]$.

c) Uvažujme konečně interval $\langle 1, \infty)$. Zde je $x + 1 > 0$, $x - 1 \geq 0$ a tedy $|x + 1| = x + 1$, $|x - 1| = x - 1$. Funkce y nabývá tvaru

$$y = x + 1 + x - 1 = 2x.$$

V intervalu $\langle 1, \infty)$ je tedy grafem funkce polopřímka o počátečním bodu $[1, 2]$; leží na ní např. bod $[3, 6]$.

Tím je zkoumání průběhu funkce ukončeno. Graf je na obr. 8.



Obr. 8.

Celý vtip řešení spočíval ve správné volbě intervalů tak, aby se v nich funkce projevila jako lineární. Tohoto postupu užíváme i ve složitějších případech, kdy vyšetřovaná funkce je předepsána nějakým výrazem, obsahujícím absolutní hodnoty. Zde volíme intervaly tak, aby se v nich dala funkce vyjádřit ve tvaru bez absolutních hodnot, tzn., aby v těchto intervalech výrazy v absolutní hodnotě neměnily znaménko. Takovým případem se bude také zabývat úloha 7.

Úloha 2. Vyšetřte průběh funkce $f(x) = 8x^3 - 2x$ a nakreslete její graf.

Řešení. Oborem funkce $y = 8x^3 - 2x$ je zřejmě interval $(-\infty, \infty)$.

Sestavme si nejdříve tabulku některých funkčních hodnot dané funkce. Protože jde o lichou funkci, stačí vzít nezáporné hodnoty proměnné:

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	0	0	6	24	60

Tabulka je nápadná tím, že funkční hodnoty, které jsme vypočetli v intervalu $\langle 1, \infty)$, velmi rychle rostou. Je proto přirozené tázat se, zda funkce f je rostoucí v intervalu $\langle 1, \infty)$ podle naší definice. Dokažme to!

Použijeme metody nepřímého důkazu. Budeme předpokládat, že funkce f není rostoucí v $\langle 1, \infty)$. Existují tedy dvě čísla x_1, x_2 z tohoto intervalu taková, že $x_1 < x_2$ a přitom neplatí $f(x_1) < f(x_2)$. Platí tedy $f(x_1) \geqq f(x_2)$ čili

$$8x_1^3 - 2x_1 \geqq 8x_2^3 - 2x_2. \qquad (1)$$

Podaří-li se nám dokázat, že tento předpoklad vede k tvrzení očividně nesprávnému, ke sporu, jak říkáme, bude tím dokázáno, že f je rostoucí v $\langle 1, \infty)$.

Z nerovnosti (1) dostáváme postupně ekvivalentní nerovnosti

$$8x_1^3 - 8x_2^3 \geqq 2x_1 - 2x_2,$$
$$4(x_1^3 - x_2^3) \geqq x_1 - x_2. \qquad (2)$$

Výraz na levé straně nerovnosti (2) rozložme na součin podle známého vzorce $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Nerovnost (2) tím přejde v ekvivalentní nerovnost

$$4(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) \geqq x_1 - x_2. \qquad (3)$$

Protože je $x_1 < x_2$, je $x_1 - x_2 < 0$. Z nauky o nerovnostech víme, že dělíme-li platnou nerovnost záporným číslem, přejde znaménko $\geqq$ ve znaménko $\leqq$. Z nerovnosti (3) dostáváme tedy nerovnost

$$4(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) \leqq 1$$

čili

$$x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 \leqq \frac{1}{4}. \qquad (4)$$

Avšak zřejmě $x_1 x_2 \geqq 1$, $x_1^2 + x_2^2 \geqq 0$, takže $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 \geqq 1$, což je spor s nerovností (4). Je tedy funkce f rostoucí v intervalu $\langle 1, \infty)$.

Jak jsme již poznamenali, je f lichá funkce. Proto můžeme snadno dokázat ještě další tvrzení: Funkce f je rostoucí v intervalu $(-\infty, -1\rangle$. (To je zřejmé z názoru, uvážíme-li, že graf liché funkce je souměrný podle počátku.)

Jsou-li x_1, x_2 dvě čísla z $(-\infty, -1\rangle$, $x_1 < x_2$, jsou čísla $-x_1$, $-x_2$ zřejmě z intervalu $\langle 1, \infty)$ a platí pro ně nerovnost $-x_2 < -x_1$. Protože funkce f je v intervalu $\langle 1, \infty)$ rostoucí, platí $f(-x_2) < f(-x_1)$. Víme však, že pro lichou funkci je $f(-x) = -f(x)$, takže tuto nerovnost můžeme psát ve tvaru $-f(x_2) < -f(x_1)$. To je nerovnost ekvivalentní s nerovností $f(x_1) < f(x_2)$ a tato nerovnost podle definice znamená, že f roste v $(-\infty, -1\rangle$, neboť x_1, x_2 byla libovolně zvolená čísla z tohoto intervalu ($x_1 < x_2$).

Pojmy, které jsme zavedli v článku 2, nám tedy umožnily posoudit charakter grafu funkce i tam, kde jej už prakticky nemůžeme nakreslit. Funkce f je asi rostoucí dokonce ve větších intervalech, než jaké jsme uvažovali (např. v $(-\infty, -\frac{1}{2}\rangle$, $\langle\frac{1}{2}, \infty)$). Přesné stanovení „největších" intervalů, v nichž funkce roste či klesá, je zpravidla obtížné a elementárními prostředky často nemožné. V našem případě však můžeme tyto intervaly uhádnout poměrně snadno.

Víme, že funkce f roste v $\langle 1, \infty)$. Předpokládejme, že roste v nějakém intervalu I, který „obsahuje" interval $\langle 1, \infty)$. (Interval I bude tedy $\langle a, \infty)$, kde $a < 1$.) Pak pro každá dvě čísla x_1, x_2 z intervalu I, pro něž je $x_1 < x_2$, musí platit nerovnost

$$8x_1^3 - 2x_1 < 8x_2^3 - 2x_2, \tag{5}$$

z níž odvodíme

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 > \frac{1}{4} \tag{6}$$

obdobně jako nerovnost (4) z nerovnosti (1). Protože $x_1 < x_2$, musí platit také nerovnost

$$x_2^2 + x_2^2 + x_2^2 > \frac{1}{4}$$

čili $x_2^2 > \frac{1}{12}$. Z této nerovnosti plyne odmocněním $|x_2| > \frac{\sqrt{3}}{6}$. Tuto nerovnost splňují čísla x_2 z intervalů $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{6}, \infty\right)$. Protože rozdíl mezi čísly x_1, x_2 může být libovolně malý, dá se očekávat, že pro x_1 platí nerovnost $|x_1| \geqq \frac{\sqrt{3}}{6}$. Pokusme se tedy dokázat, že funkce f roste v intervalech $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right\rangle$, $\left\langle\frac{\sqrt{3}}{6}, \infty\right)$.

To znamená, že pro libovolná x_1, x_2 z intervalu např. $\langle \frac{\sqrt{3}}{6}, \infty)$, pro něž $x_1 < x_2$, musí platit nerovnost (6), ekvivalentní s (5). Protože $\frac{\sqrt{3}}{6} \leqq x_1 < x_2$, je

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 > 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

a platí nerovnost (6). Podobně provedeme důkaz i v intervalu $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{6}\rangle$. (V tomto intervalu jsou obě čísla x_1, x_2 záporná, takže součin x_1x_2 je opět kladný.)

Vypočtěme funkční hodnoty v bodech $-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}$. Dostaneme $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right) \doteq 0{,}38$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right) \doteq -0{,}38$. Platí tedy nerovnost $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right) > f\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$, což nás vede k domněnce, že je klesající funkce v intervalu $\langle -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6} \rangle$. Dokažme to!

Máme dokázat, že pro libovolná čísla x_1, x_2 z uvedeného intervalu, pro něž je $x_1 < x_2$, platí nerovnost

$$8x_1^3 - 2x_1 > 8x_2^3 - 2x_2, \tag{7}$$

z níž opět snadno odvodíme ekvivalentní nerovnost

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 < \frac{1}{4}. \tag{8}$$

Protože x_1, x_2 leží v intervalu $\langle -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6} \rangle$, platí nerovnosti

$$|x_1| \leqq \frac{\sqrt{3}}{6}, \; |x_2| \leqq \frac{\sqrt{3}}{6}. \tag{9}$$

Jestliže aspoň pro jedno z čísel x_1, x_2 platí tato nerovnost jako ostrá, potom

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 \leqq x_1^2 + |x_1x_2| + x_2^2 < 3 . \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

takže platí (8) a tedy i (7). Platí-li v obou nerovnostech (9) znamení rovnosti, musí být $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{6}$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}$ a pro tyto hodnoty proměnné jsme již nerovnost (7) dokázali přímým výpočtem.

O funkci f jsme dokázali, že je v intervalu $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right\rangle$ rostoucí a v intervalu $\left\langle -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right\rangle$ klesající. Podle věty na str. 14 článku 2 dostáváme, že funkce f má v bodě $x = -\frac{\sqrt{3}}{6}$ maximum v intervalu $\left(-\infty, \frac{\sqrt{3}}{6}\right\rangle$.

Protože funkce je v intervalu $\left\langle -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right\rangle$ klesající a v intervalu $\left\langle \frac{\sqrt{3}}{6}, \infty\right)$ rostoucí, dostáváme podobně, že v bodě $x = \frac{\sqrt{3}}{6}$ je minimum funkce f v intervalu $\left\langle -\frac{\sqrt{3}}{6}, \infty\right)$.

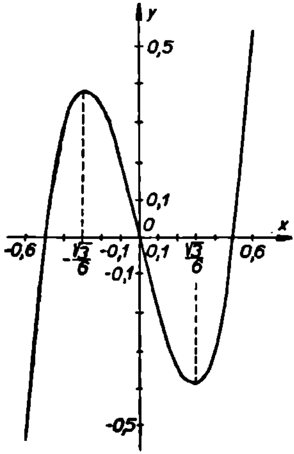
Nyní již můžeme nakreslit graf naší funkce. Protože známe polohu nulových bodů, víme, kde graf protíná osu x. Je to právě v bodech $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, což jsou všechny kořeny rovnice

$$8x^3 - 2x = 0.$$

Abychom nakreslili graf co nejpřesněji, vypočteme ještě několik dalších hodnot funkce f:

x	0	0,1	0,2	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	0,4	0,5	0,6
$f(x)$	0	−0,19	−0,34	−0,38	−0,29	0	0,53

Graf je symetrický podle počátku (viz obr. 9).



Obr. 9.

Úloha 3. Vyšetřte průběh funkce $y = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1}$ a nakreslete její graf!

Řešení. Abychom uměli vypočítat funkční hodnotu y, musí být jmenovatel různý od nuly, tj. $x \neq 1$. Dále musí být $x \geq 0$, aby existovala $\sqrt{x}$. Jsou tedy oborem funkce intervaly $\langle 0, 1)$, $(1, \infty)$.

Je zřejmé, že v intervalu $\langle 0, 1)$ nabývá daná funkce záporných hodnot, v intervalu $(1, \infty)$ hodnot kladných; nemá tedy žádné nulové body, takže její graf neprotíná osu x.

Dokážeme, že vyšetřovaná funkce není ohraničená shora ani zdola. Důkaz provedeme nepřímo.

Předpokládejme, že $y \leq K$ pro každé x z oboru funkce. Protože naše funkce nabývá také kladných hodnot, je $K > 0$.

Podobně jako v příkladu 6 pokusme se najít x_0 tak, že příslušná funkční hodnota y_0 bude větší než K. Protože

$y_0 = \dfrac{1}{\sqrt{x_0} - 1}$, musí být

$$\frac{1}{\sqrt{x_0} - 1} > K$$

čili

$$\frac{1}{K} + 1 > \sqrt{x_0}.$$

Zvolme např. $x_0 = \left(1 + \dfrac{1}{2K}\right)^2$. Potom

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{2K}\right)^2} - 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2K} - 1} = 2K > K,$$

což je spor s naším předpokladem, že konstanta K ohraničuje danou funkci shora.

Podobně ukážeme, že funkce není zdola ohraničená. Označíme-li „ohraničující“ konstantu opět K, lze předpokládat, že $K < -\frac{1}{2}$. Zvolíme-li $x = \left(1 + \frac{1}{2K}\right)^2$, je $0 < x < 1$ a

$$y = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{2K}\right)^2} - 1} = 2K < K,$$

protože K je záporné. To je opět spor s předpokladem, že K ohraničuje danou funkci zdola.

Nakonec ukážeme, že vyšetřovaná funkce klesá v intervalu $\langle 0, 1)$ i v intervalu $(1, \infty)$.

Uvažujme nejdříve interval $\langle 0, 1)$. Je-li $0 \leqq x_1 < x_2 < < 1$, je $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} < 1$ a tedy $\sqrt{x_1} - 1 < \sqrt{x_2} - 1$. Obě strany nerovnosti jsou záporná čísla. Dělíme-li tedy obě strany nerovnosti kladným číslem $(\sqrt{x_1} - 1)(\sqrt{x_2} - 1)$, dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt{x_2} - 1} < \frac{1}{\sqrt{x_1} - 1},$$

což podle definice znamená, že daná funkce je klesající v intervalu $\langle 0, 1)$.

Podobně postupujeme v intervalu $(1, \infty)$. Je-li $1 < x_1 < < x_2 < \infty$, je $0 < \sqrt{x_1} - 1 < \sqrt{x_2} - 1$; pro převrácené hodnoty obou posledních čísel platí tedy obrácená nerovnost

$$\frac{1}{\sqrt{x_2} - 1} > \frac{1}{\sqrt{x_1} - 1},$$

což opět znamená, že vyšetřovaná funkce je klesající v intervalu $(1, \infty)$.

Funkce je tedy klesající v obou intervalech, z nichž se skládá její obor. V celém svém oboru však klesající není. Stačí vzít např. za x_1, x_2 taková dvě čísla, pro která platí $0 < x_1 < 1$, $1 < x_2$. Pak je zřejmě $x_1 < x_2$. Kdyby byla daná funkce v celém svém oboru klesající, platila by nerovnost

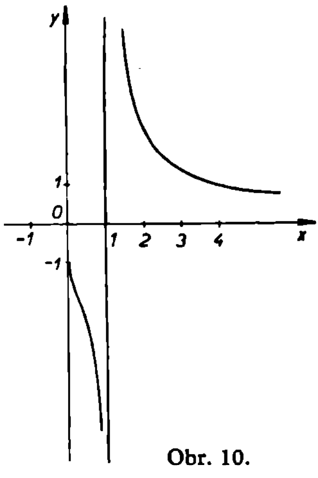
$$\frac{1}{\sqrt{x_1} - 1} > \frac{1}{\sqrt{x_2} - 1}.$$

Tato nerovnost však pro výše zvolená čísla x_1, x_2 neplatí, neboť na levé straně je zřejmě číslo záporné a na pravé straně číslo kladné.

Pro přesnější nakreslení grafu sestavíme ještě tabulku funkčních hodnot:

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{9}{4}$	4
$f(x)$	-1	-2	-3	4,6	2,5	2	1

Graf funkce je na obr. 10.



Obr. 10.

Úloha 4. Vyšetřte průběh funkce $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{(1 - x)^2}$ a nakreslete její graf!

Řešení. Oborem vyšetřované funkce je množina reálných čísel s výjimkou čísla $x = 1$, pro něž je jmenovatel zlomku roven nule.

Pro každé x z oboru funkce je $1 + x^2 > 0$, $(1 - x)^2 > 0$, a tedy také $f(x) > 0$. Je tedy vyšetřovaná funkce ohraničená zdola (např. číslem nula) v celém svém oboru. Naproti tomu není daná funkce ohraničená shora; dokázali bychom to podobně jako v předešlé úloze.

Nyní nás bude zajímat, v kterých intervalech funkce f roste a v kterých klesá. Na první pohled je těžké tyto intervaly uhádnout; budeme proto postupovat obráceně. Předpokládejme, že v nějakém intervalu I je funkce f rostoucí. Pak pro libovolná dvě čísla x_1, x_2 z tohoto intervalu, pro něž je $x_1 < x_2$, musí platit nerovnost

$$\frac{1 + x_1^2}{(1 - x_1)^2} < \frac{1 + x_2^2}{(1 - x_2)^2}.$$

Protože interval I je částí definičního oboru funkce f, nepatří do něj číslo $x = 1$. Je tedy také $x_1 \neq 1$, $x_2 \neq 1$ a naše nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$(1 + x_1^2)(1 - x_2)^2 < (1 + x_2^2)(1 - x_1)^2,$$

kterou dále upravíme na ekvivalentní nerovnosti:

$$(1 + x_1^2)(1 - 2x_2 + x_2^2) < (1 + x_2^2)(1 - 2x_1 + x_1^2),$$

$$(1 + x_1^2)(1 + x_2^2) - 2x_2(1 + x_1^2) <$$
$$< (1 + x_1^2)(1 + x_2^2) - 2x_1(1 + x_2^2),$$

$$x_2(1 + x_1^2) > x_1(1 + x_2^2),$$

$$x_2(1 - x_1x_2) > x_1(1 - x_1x_2). \qquad (1)$$

Tato nerovnost platí právě tehdy, je-li $1 - x_1x_2 > 0$, neboť pak můžeme obě strany nerovnosti dělit tímto číslem a dostaneme nerovnost (stále ekvivalentní s původní) $x_2 > x_1$, která platí podle našeho předpokladu. Je-li $1 - x_1x_2 < 0$, dostaneme z nerovnosti (1) nerovnost $x_2 < x_1$, která je ve sporu s naším předpokladem. Je-li $1 - x_1x_2 = 0$, má (1) tvar $0 > 0$, což je opět spor.

Nerovnost $1 - x_1x_2 > 0$ platí pro libovolná dvě čísla x_1, x_2 (pro něž je $x_1 < x_2$) z intervalu $\langle -1, 1)$, což snadno dokážeme. Je-li buď $-1 \leqq x_1 < x_2 \leqq 0$ nebo $0 \leqq x_1 < x_2 < 1$, je $0 \leqq x_1x_2 < 1$, takže $1 - x_1x_2 > 0$. Je-li $x_1 < 0 < x_2$, je $x_1x_2 < 0$ a platí dokonce $1 - x_1x_2 > 1$. Jiný případ už nastat nemůže.

Pro čísla x_1, x_2 z intervalu $\langle -1, 1)$ je tedy nerovnost (1) ekvivalentní s původní nerovností. Obrácením našeho postupu plyne tedy z nerovnosti $x_1 < x_2$ nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$. Dokázali jsme, že vyšetřovaná funkce je rostoucí v intervalu $\langle -1, 1)$.

Podobně dokážeme, že funkce f je klesající v intervalech $(-\infty, -1\rangle$ a $(1, \infty)$. Výchozí nerovnost bude v obou těchto případech obrácená než prve (za předpokladu, že $x_1 < x_2$):

$$\frac{1 + x_1^2}{(1 - x_1)^2} > \frac{1 + x_2^2}{(1 - x_2)^2}.$$

Zcela obdobně jako v prvním případě dostaneme pak ekvivalentní nerovnost

$$x_2(1 - x_1x_2) < x_1(1 - x_1x_2).$$

V obou zkoumaných intervalech je $x_1x_2 > 1$ čili $1 - x_1x_2 < 0$. Dělením obou stran nerovnosti tímto záporným číslem dostaneme tedy správnou nerovnost $x_1 < x_2$. Protože náš postup je možno obrátit, dokázali jsme, že funkce f je klesající v intervalu $(-\infty, -1\rangle$ i v intervalu $(1, \infty)$.

Tím jsme zároveň našli minimum vyšetřované funkce v intervalu $(-\infty, 1)$. Je jím (podle věty na str. 14 článku 2) číslo $f(-1) = \frac{1}{2}$. Protože pro $x > 1$ je

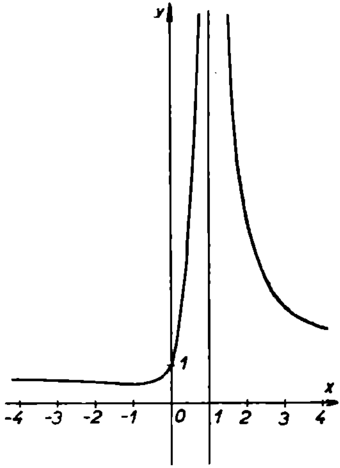
$$f(x) = \frac{1 + x^2}{(1-x)^2} > \frac{1 - 2x + x^2}{(1-x)^2} = 1 > \frac{1}{2},$$

je číslo $\frac{1}{2}$ minimum funkce f v celém jejím oboru.

K nakreslení grafu funkce f vypočteme ještě některé její hodnoty, zejména v blízkosti bodu $x = 1$.

x	-4	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	2	3	4
$f(x)$	$\frac{17}{25}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{2}$	1	5	25	41	13	5	$\frac{5}{2}$	$\frac{17}{9}$

Graf funkce je na obr. 11.



Obr. 11.

Úloha 5. Vyšetřete průběh funkce $y = \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2 x}{1 + \mathrm{tg}^2 x}$ a nakreslete její graf!

Řešení. Stanovíme nejprve obor dané funkce. Funkce není definována předně tam, kde není definována funkce $\operatorname{tg} x$, a dále tam, kde jmenovatel je roven nule.

a) Funkce $\operatorname{tg} x$ není definována pro $x = 90° + k.\,180°$, kde k je libovolné celé číslo.

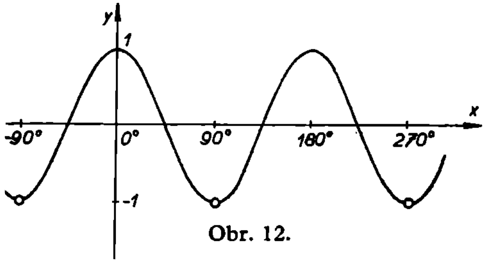
b) Je-li $x \neq 90° + k.180°$, platí $\operatorname{tg}^2 x \geqq 0$, takže $1 + \operatorname{tg}^2 x > 0$ a jmenovatel vyšetřované funkce je různý od nuly (kladný).

Funkce $y = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ není tedy definována pouze pro $x = 90° + k.180°$, kde k je celé číslo. Je-li $x \neq 90° + k.180°$, platí

$$y = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1 - \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \cos 2x.$$

Grafem dané funkce je tedy graf funkce $y = \cos 2x$ s výjimkou bodů, jejichž první souřadnice je $x = 90° + k.180°$ (k celé číslo). Nulové body funkce jsou body, pro něž $\cos 2x = 0$, tj. $x = 45° + k.90°$.

Grafem funkce $\cos 2x$ je kosinusoida, jejíž nulové body jsou proti „obyčejné" kosinusoidě dvojnásobně „zhuštěny". Graf původně dané funkce je na obr. 12. Body v kroužcích do grafu nepatří.



Obr. 12.

Při zkoumání funkcí se často setkáváme s případy, kdy se ve vyjádření dané funkce vyskytnou čísla označená písmeny, která mohou nabývat různých hodnot. Volba těchto čísel (tzv. parametrů) má často značný vliv na průběh dané funkce. Vyšetřování tohoto vlivu se říká, jak víte, diskuse.

Úloha 6. Buď dána tzv. kvadratická funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Jaké podmínky musí splňovat čísla a, b, c, aby funkce f nabývala pro všechna x jen kladných (nebo jen záporných) hodnot?

Řešení. Je-li $b = 0$, umíme již něco říci o chování funkce $f_1(x) = ax^2 + c$. Například, je-li $a > 0, c > 0$, pak funkce f_1 nabývá jen kladných hodnot. Pokusme se tedy napsat funkci f také ve tvaru součtu konstanty a součinu čísla a s druhou mocninou nějakého výrazu, obsahujícího proměnnou x. Platí:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = ax^2 + \frac{b}{a} x) + c =$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right). \qquad (1)$$

Zkoumejme nyní, jak závisí znaménko hodnoty $f(x)$ na znaménku čísel a a $c - \frac{b^2}{4a}$. Budou nás přitom zajímat ty případy, kdy znaménko $f(x)$ je pro všechna x stále kladné, nebo stále záporné.

Snadno zjistíme, že je vyloučen případ, kdy $a > 0$ a $c - \frac{b^2}{4a} \leqq 0$. To je patrné z následující úvahy: Kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ má diskriminant rovný číslu

$$D = b^2 - 4ac = -4a\left(c - \frac{b^2}{4a}\right) \qquad (2)$$

a je tedy v našem případě zřejmě $D \geq 0$. Kvadratická rovnice má tedy aspoň jeden reálný kořen x_0, pro nějž platí $f(x_0) = 0$. Funkce f tedy v tomto případě nenabývá stále kladných nebo stále záporných hodnot.

Stejnou úvahou se čtenář přesvědčí, že je vyloučen i případ, kdy $a < 0$ a $c - \dfrac{b^2}{4a} \geq 0$. Také v tomto případě existuje bod x_0, pro který je $f(x_0) = 0$.

Zbývají tedy již jen dva případy:

1. $a > 0$, $c - \dfrac{b^2}{4a} > 0$, 2. $a < 0$, $c - \dfrac{b^2}{4a} < 0$.

V prvním případě plyne z (1), že funkce f nabývá pro všechna x jen kladných hodnot, neboť $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqq 0$ a součet nezáporného a kladného čísla je číslo kladné.

Stejně v druhém případě plyne z (1), že funkce f nabývá pro všechna x jen záporných hodnot.

Protože pro diskriminant D kvadratické rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0$$

platí vztah (2), je v obou těchto případech $D < 0$.

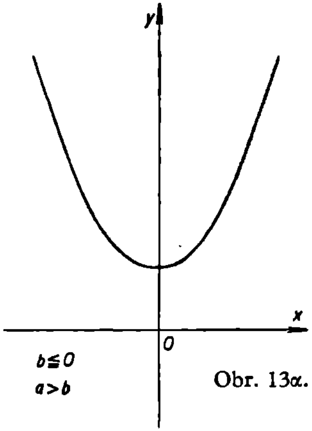
Všechny výsledky můžeme tedy shrnout do závěru:

Kvadratická funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ nabývá pro všechna x hodnot se stejným znaménkem (tj. buď jen kladných nebo jen záporných) právě tehdy, je-li diskriminant kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ záporný. Je-li přitom $a > 0$, jsou také všechny funkční hodnoty kladné. Je-li $a < 0$, jsou také všechny funkční hodnoty záporné.

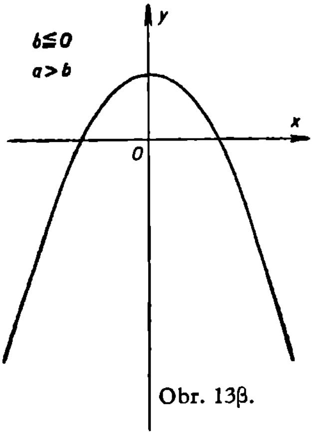
Úloha 7. Vyšetřte průběh funkce $f(x) = ax^2 + |bx^2 - 1|$. Proveďte diskusi vzhledem k různým hodnotám parametrů a, b.

Řešení. Podobně jako v úloze 1 se budeme snažit odstranit absolutní hodnoty ve vyjádření funkce. Body, v nichž dvojčlen v absolutní hodnotě mění znaménko, dostaneme řešením rovnice $bx^2 - 1 = 0$. Odtud plyne, že $x^2 = \frac{1}{b}$. Tato rovnice má reálné kořeny právě tehdy, je-li $b > 0$. Budeme proto rozeznávat dva případy: 1. $b \leqq 0$, 2. $b > 0$.

1. Je-li $b \leqq 0$, je $bx^2 - 1 < 0$ pro každé číslo x. Je tedy $|bx^2 - 1| = 1 - bx^2$, $f(x) = (a - b)x^2 + 1$ pro všechna x. Nyní musíme vyšetřovat ještě tři různé případy podle hodnoty parametru a. Je-li $a \neq b$, je grafem funkce f parabola, symetrická podle osy y, s vrcholem v bodě $[0, 1]$. Je-li $a > b$, je parabola „otevřena“ směrem kladné poloosy y (obr. 13 α), je-li $a < b$, je parabola „otevřena“ směrem

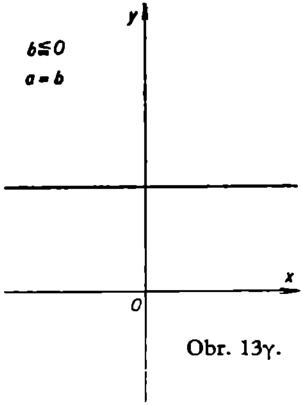


Obr. 13α.



Obr. 13β.

záporné poloosy y (obr. 13β). Je-li $a = b$, je $f(x) = 1$ pro všechna x a grafem je rovnoběžka s osou x, procházející např. bodem $[0, 1]$ (obr. 13γ).



Obr. 13γ.

2. Budiž nyní $b > 0$. Výraz v absolutní hodnotě je nekladný, tj. $bx^2 - 1 \leqq 0$, jestliže $x^2 \leqq \frac{1}{b}$ čili $|x| \leqq \frac{\sqrt{b}}{b}$. Je-li $x^2 \geqq \frac{1}{b}$, je $bx^2 - 1 \geqq 0$. Z toho plyne závěr:

$f(x) = (a + b)x^2 - 1$ pro x z intervalů

$$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{b}}\right\rangle, \left\langle \frac{1}{\sqrt{b}}, \infty\right);$$

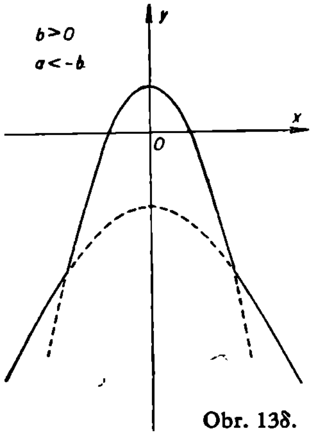
$f(x) = (a - b)x^2 + 1$ pro x z intervalu

$$\left\langle -\frac{1}{\sqrt{b}}, \frac{1}{\sqrt{b}}\right\rangle.$$

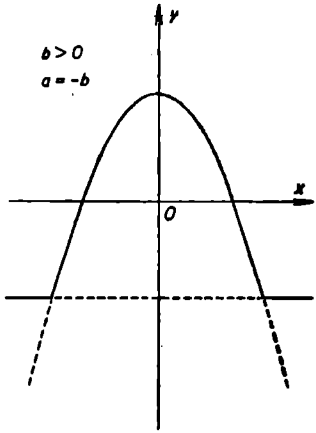
Je jasné, že graf bude záviset na znaménku výrazů $a + b$, $a - b$. Protože b je kladné, je $a - b < a + b$. Musíme tedy rozeznávat následující případy:

$a + b < 0$	$a + b = 0$	$a + b > 0$	$a + b > 0$	$a + b > 0$
$a - b < 0$	$a - b < 0$	$a - b < 0$	$a - b = 0$	$a - b > 0$

Vzhledem k tomu, že platí $-b < b$, můžeme tyto podmínky zapsat jednodušeji:
$a < -b$; $a = -b$; $-b < a < b$; $a = b$; $a > b$ (obr. 13δ—ϑ).



Obr. 13δ.



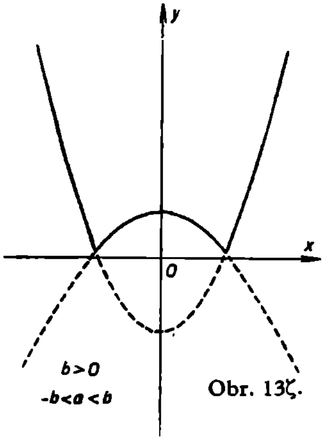
Obr. 13ε.

Podle různých hodnot parametrů a, b máme tedy celkem osm podstatně různých případů.*) Grafy všech těchto funkcí jsou na obr. 13.

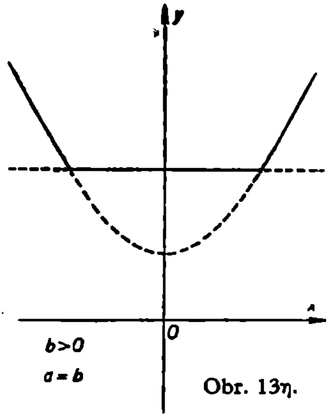
Úloha 8. Dokažte, že funkce $y = \frac{b}{x-a} + \frac{a}{x-b}$, kde $0 < a < b$, je klesající v intervalech $(-\infty, a)$, (a, b), (b, ∞).

---

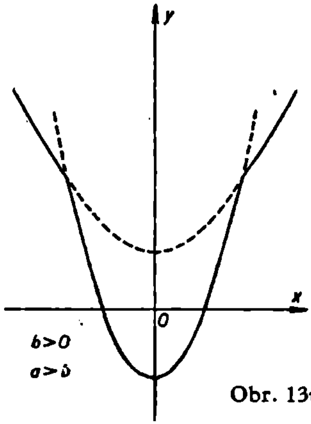
*) Mohli bychom ještě rozeznávat jisté podskupiny v případě $b > 0$, $-b < a < b$ podle toho, zda $a > 0$, $a = 0$ nebo $a < 0$. Pak průsečíky parabol leží nad osou x, na ní nebo pod ní.



Obr. 13ζ.



Obr. 13η.



Obr. 13ϑ.

Řešení. Uvažujme nejprve interval $(-\infty, a)$. Máme dokázat, že pro libovolná x_1, x_2, pro něž je $x_1 < x_2 < a$, platí

$$\frac{b}{x_1 - a} + \frac{a}{x_1 - b} > \frac{b}{x_2 - a} + \frac{a}{x_2 - b}. \qquad (1)$$

Z nerovnosti (1) dostáváme ekvivalentní nerovnosti

$$\frac{b}{x_1 - a} - \frac{b}{x_2 - a} > \frac{a}{x_2 - b} - \frac{a}{x_1 - b},$$

$$\frac{b(x_2 - x_1)}{(x_1 - a)(x_2 - a)} > \frac{-a(x_2 - x_1)}{(x_1 - b)(x_2 - b)}. \qquad (2)$$

Protože je $x_1 < x_2$, je $x_2 - x_1 > 0$ a nerovnost (2) můžeme dělit číslem $x_2 - x_1$. Dostaneme

$$\frac{b}{(x_1 - a)(x_2 - a)} > \frac{-a}{(x_1 - b)(x_2 - b)}. \qquad (3)$$

Protože platí $x_1 < x_2 < a < b$, jsou oba jmenovatele kladná čísla, takže na levé straně nerovnosti (3) je kladné číslo a na pravé straně záporné číslo. Nerovnost (3) tedy platí. Protože nerovnosti (1), (2), (3) jsou ekvivalentní, platí i nerovnost (1), což jsme měli dokázat.

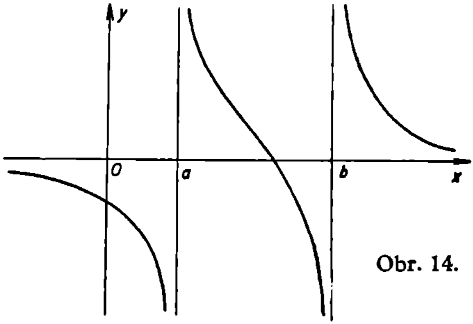
Uvažujme nyní interval (a, b). Máme dokázat, že pro x_1, x_2, pro něž $a < x_1 < x_2 < b$, platí nerovnost (1).

Zjistili jsme však, že nerovnost (1) je ekvivalentní s nerovností (3). Protože $x_1 > a$, $x_2 > a$, $x_1 < b$, $x_2 < b$, jsou oba jmenovatele kladná čísla, takže nerovnost (3) a tedy i nerovnost (1) platí stejně jako v prvním případě.

Uvažujme konečně interval (b, ∞). Máme opět dokázat, že platí (1), tj. že platí (3) pro $b < x_1 < x_2$. Protože je $b < x_1$, $b < x_2$ a tím spíše $a < x_1$, $a < x_2$, jsou opět oba jmenovatele kladná čísla, takže nerovnost (3) a tedy i (1) platí.

Funkce je tedy klesající v každém z intervalů $(-\infty, a)$, (a, b), (b, ∞). (Viz obr. 14.)

Úloha 9. Dokažte, že funkce $f(x) = \dfrac{12(x + 2)}{x^2}$ je



Obr. 14.

ohraničená zdola, ale není ohraničená shora. Stanovte její minimum!

Řešení. Daná funkce je definována pro všechna reálná čísla s výjimkou nuly. Jsou tedy jejím oborem intervaly $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

Dokážeme, že funkce f je ohraničená zdola. Jmenovatel zlomku $\frac{12(x+2)}{x^2}$ je pro $x \neq 0$ vždy kladný. Je-li $x > -2$, je i čitatel kladný, takže $f(x) > 0$. Jestliže platí $x \leqq -2$, platí také

$$f(x) = \frac{12(x+2)}{x^2} = \frac{12}{x} + \frac{24}{x^2} > \frac{12}{x} \geqq \frac{12}{-2} = -6.$$

Pro $x > -2$ (a ovšem $x \neq 0$) je funkce f ohraničena zdola nulou, pro $x \leqq -2$ číslem -6. Pro každé x z oboru funkce platí tedy $f(x) \geqq -6$ (platí dokonce ostrá nerovnost). Podle definice je tedy funkce f ohraničená zdola.

Důkaz tvrzení, že funkce f není ohraničená shora, provedeme nepřímo. Předpokládejme, že pro libovolné číslo x z oboru funkce platí $f(x) \leqq K$, kde K je dané číslo. Nechť K je kladné číslo, což můžeme předpokládat, aniž náš důkaz ztratí na obecnosti.

Pro libovolnou hodnotu proměnné x z oboru funkce f platí

$$f(x) = \frac{12}{x} + \frac{24}{x^2} > \frac{12}{x},$$

neboť pro $x \neq 0$ je $x^2 > 0$. Z této nerovnosti však plyne, že $f(\frac{1}{K}) > 12K$, neboť číslo $\frac{1}{K}$ patří zajisté do oboru funkce f. To je však ve sporu s předpokladem, že funkce f je shora ohraničená číslem K.

Nyní zbývá hlavní úkol: Najít minimum funkce f. Předpokládejme, že minimum existuje a označme je m. Protože pro $x < -2$ je $f(x) < 0$, je zřejmě také $m < 0$. Protože m je minimem, platí

$$\frac{12(x+2)}{x_2} \geq m \tag{1}$$

pro všechna čísla $x \neq 0$. Protože $x \neq 0$, můžeme nerovnost (1) zapsat ve tvaru

$$12(x+2) \geq mx^2$$

čili

$$-mx^2 + 12x + 24 \geqq 0. \tag{2}$$

Všimněme si kvadratické rovnice

$$-mx^2 + 12x + 24 = 0. \tag{3}$$

Má-li platit nerovnost (2), nesmí mít tato rovnice dva různé reálné kořeny. Kdyby totiž měla reálné kořeny x_1, x_2 a platilo by např. $x_1 < x_2$, platila by v intervalu (x_1, x_2) opačná nerovnost

$$-mx^2 + 12x + 24 < 0. \tag{4}$$

O tom se snadno přesvědčíme, uvážíme-li, že mnohočlen na levé straně rovnice lze psát ve tvaru součinu

$$-m(x - x_1)(x - x_2).$$

Je-li x číslo z intervalu (x_1, x_2), je $x - x_1 > 0$, $x - x_2 < 0$. Protože $-m > 0$, platí nerovnost (4).

Kdyby rovnice (3) neměla reálné kořeny, pak by platila nerovnost (2) dokonce jako ostrá (srov. úlohu 6). Potom by však číslo m nebylo minimem funkce f, neboť pro žádnou hodnotu proměnné x by nebylo $f(x) = m$. Tato rovnost nastane totiž právě tehdy, platí-li pro x rovnost (3).

Zbývá nám tedy případ, kdy rovnice (3) má jediný reálný kořen x_0 (který bude zřejmě různý od nuly). Pak skutečně bude platit nerovnost (2) pro všechna $x \neq 0$, neboť levou stranu této nerovnosti můžeme napsat ve tvaru $-m(x - x_0)^2$. Pro kořen x_0 (a jen pro něj) bude platit rovnost, a tedy $f(x_0) = m$. Protože nerovnost (1) platí (pro $x \neq 0$) právě tehdy, platí-li nerovnost (2), bude m minimum funkce f.

Diskriminant rovnice (3) je $D = 144 + 96m$. Má-li rovnice (3) jediný kořen, je $D = 0$ a tedy $m = -\frac{3}{2}$. Kořen rovnice (3) je potom $x_0 = -4$. Dokázali jsme tedy, že minimum funkce f je $m = -\frac{3}{2}$. Funkce je nabývá v bodě $x = -4$.

Úloha 10. Stanovte maximum a minimum funkce $f(x) = 1 + 2(\cos 2x + \cos x + 2\cos^2 \frac{x}{2})$ v intervalu $\langle 0°, 360° \rangle$! Jaké je minimum a maximum této funkce v celém jejím oboru a v kterých bodech jich nabývá?

Řešení. Upravme nejprve funkci f (definovanou zřejmě pro všechna x) podle známých vzorců pro kosinus dvojnásobného a polovičního úhlu. Pro každé x platí

$$f(x) = 1 + 2\left(\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x + 2\frac{1 + \cos x}{2}\right) =$$
$$= 1 + 2(\cos^2 x - 1 + \cos^2 x + \cos x + 1 + \cos x) =$$
$$= 4\cos^2 x + 4\cos x + 1.$$

Protože $|\cos x| \leqq 1$ pro libovolné x, je $f(x) \leqq 9$; přitom je $f(0) = 9$, takže číslo $M = 9$ je maximem funkce f v intervalu $\langle 0°, 360° \rangle$.

Stanovme nyní minimum funkce f v intervalu $\langle 0°, 360° \rangle$. Snadno vypočteme, že kvadratická rovnice

$$4y^2 + 4y + 1 = 0$$

má jediný kořen $y_0 = -\frac{1}{2}$. Platí tedy pro každé číslo y

$$4y^2 + 4y + 1 = 4(y + \tfrac{1}{2})^2.$$

Položíme-li $y = \cos x$, platí tedy také (pro libovolné x)

$$4\cos^2 x + 4\cos x + 1 = 4(\cos x + \tfrac{1}{2})^2$$

čili

$$f(x) = 4(\cos x + \tfrac{1}{2})^2.$$

Vyjádříme-li funkci f takto, je jasné, že nenabývá záporných hodnot. Je tedy vždy $f(x) \geqq 0$. Rovnost nastane např. pro $x = 120°$ a také pro $x = 240°$. Číslo $m = 0$ je minimem funkce f v intervalu $\langle 0°, 360° \rangle$.

Víme konečně, že funkce $\cos x$ je periodická s periodou $360°$; to znamená, že $\cos(x + k.360°) = \cos x$ pro libovolné celé číslo k. Snadno si ověříme, že také funkce f je periodická s periodou $360°$. Jinými slovy, funkce f nabývá jen takových hodnot, kterých nabývá v intervalu $\langle 0°, 360° \rangle$. Platí-li tedy nerovnosti $f(x) \geqq 0$, $f(x) \leqq 9$ v intervalu $\langle 0°, 360° \rangle$, platí pro každé x. Minimální hodnoty nabývá f právě pro všechny úhly x tvaru $120° + k.360°$ nebo $240° + k.360°$. Maximální hodnoty nabývá pro úhly $k.360°$; k je zde všude libovolné celé číslo.

Maximem (minimem) funkce f v celém jejím oboru je tedy číslo $M = 9$ ($m = 0$).

Úloha 11. Dokažte, že ze všech pravoúhelníků o stejném obvodu má největší obsah čtverec!

Řešení. Vezměme nějaký pravoúhelník o stranách a, b

a předpokládejme pro určitost, že $0 < a < b$. Jeho obvod je roven číslu $o = 2(a + b)$. Strany libovolného pravoúhelníka se stejným obvodem můžeme vyjádřit ve tvaru $a + x$, $b - x$, kde $0 < a + x$, $0 < b - x$, neboť

$$2(a + x + b - x) = 2(a + b) = o.$$

Aby byly splněny podmínky $0 < a + x$, $0 < b - x$, musí platit $-a < x < b$, což znamená, že x leží v intervalu $(-a, b)$.

Vezměme nyní x z intervalu $(-a, b)$ a příslušný pravoúhelník o stranách $a + x$, $b - x$. Jeho obsah

$$P(x) = (a + x)(b - x) = ab + x(b - a) - x^2$$

je tedy funkcí proměnné x. Máme dokázat, že funkce $P(x)$ nabývá v intervalu $(-a, b)$ maxima tehdy, je-li příslušný pravoúhelník čtverec. Potom je $a + x_0 = b - x_0$ čili

$$x_0 = \frac{b - a}{2}.$$

Protože $P(x_0) = ab + \frac{(b - a)^2}{2} - \frac{(b - a)^2}{4}$, máme dokázat, že pro všechna x z intervalu $(-a, b)$ platí nerovnost $P(x) \leqq P(x_0)$ čili nerovnost

$$ab + x(b - a) - x^2 \leqq ab + \frac{(b - a)^2}{2} - \frac{(b - a)^2}{4}. \qquad (1)$$

Jednoduchými úpravami dostaneme postupně ekvivalentní nerovnosti

$$x(b - a) - x^2 \leqq \left(\frac{b - a}{2}\right)^2,$$

$$0 \leqq \left(\frac{b - a}{2}\right)^2 - x(b - a) + x^2,$$

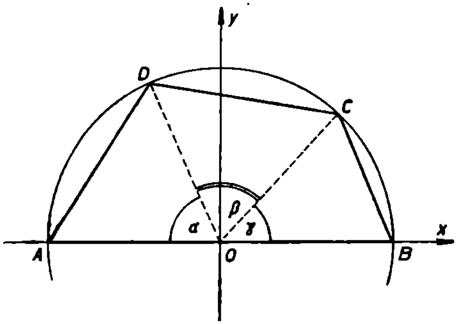
$$0 \leqq \left(x - \frac{b - a}{2}\right)^2.$$

Tato nerovnost je správná, neboť druhá mocnina reálného čísla je vždy nezáporná. Rovnost zřejmě nastane pouze pro

$x = \frac{b - a}{2}$, tj. pro $x = x_0$.

Protože všechny nerovnosti byly ekvivalentní, dokázali jsme, že platí nerovnost (1). Rovnost nastává pro $x = x_0$, tj. pro čtverec.

Úloha 12. Sestrojte jednotkovou kružnici k se středem v počátku. Buď ABCD čtyřúhelník vepsaný kružnici k o vrcholech A, B na ose x a o straně $CD = d < 2$, ležící nad osou x (viz obr. 15). Dokažte, že ze všech takových



Obr. 15.

čtyřúhelníků (při pevně zvoleném d) má největší obsah ten, jenž je symetrický podle osy y.

Řešení. Čtyřúhelník ABCD rozdělíme poloměry OD a OC na tři rovnoramenné trojúhelníky a vypočteme jejich obsah. Nechť β je středový úhel, příslušný k tětivě délky d.

Označme P_1 obsah trojúhelníka OCD. Platí zřejmě $P_1 = \frac{1}{2} \sin \beta$. Podobně obsah trojúhelníka OAD je $P_2 = \frac{1}{2} \sin \alpha$. Obsah trojúhelníka OBC označme P_3. Platí zřejmě $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$, $P_3 = \frac{1}{2} \sin \gamma$ čili $P_3 = \frac{1}{2} \sin [180° - (\alpha + \beta)] = \frac{1}{2} \sin (\alpha + \beta)$.

Obsah $P(\alpha)$ čtyřúhelníka ABCD je pak funkcí proměnné α a platí
$P(\alpha) = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{2}\sin\beta + \frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)$.
Úhel α splňuje nerovnost $0° \leqq \alpha \leqq 180° - \beta$ pro všechny polohy tětivy CD.

Naším úkolem je dokázat, že funkce $P(\alpha)$ nabývá maxima pro to α, pro které je čtyřúhelník ABCD souměrný podle osy y, tj. pro $\alpha = \gamma$ čili pro $\alpha = 90° - \frac{\beta}{2}$. Platí

$$P\left(90° - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin\beta + \frac{1}{2}\sin\left(90° - \frac{\beta}{2}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(90° + \frac{\beta}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sin\beta + \sin\left(90° - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin\beta + \cos\frac{\beta}{2}.$$

Máme dokázat, že platí nerovnost

$$P(\alpha) \leqq P\left(90° - \frac{\beta}{2}\right) \tag{1}$$

pro $0° \leqq \alpha \leqq 180° - \beta$, tj. nerovnost

$$\frac{1}{2}\sin\beta + \frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) \leqq \frac{1}{2}\sin\beta + \cos\frac{\beta}{2}. \tag{2}$$

Úpravami dospíváme postupně k těmto ekvivalentním nerovnostem:

$$\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) \leqq 2\cos\frac{\beta}{2},$$

$$2\sin\frac{\alpha + (\alpha+\beta)}{2}\cos\frac{\alpha - (\alpha+\beta)}{2} \leqq 2\cos\frac{\beta}{2},$$

$$2\sin\frac{2\alpha+\beta}{2}\cos\left(-\frac{\beta}{2}\right) \leqq 2\cos\frac{\beta}{2},$$

$$2\sin\frac{2\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} \leqq 2\cos\frac{\beta}{2}.$$

Protože $0° < \beta < 180°$, je $\cos\frac{\beta}{2} > 0$ a dělením obou stran nerovnosti tímto číslem dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$\sin\frac{2\alpha+\beta}{2}\leqq 1. \tag{3}$$

To je správná nerovnost. Protože nerovnosti (1) a (3) jsou ekvivalentní, platí nerovnost (1). Protože $0°\leqq\alpha\leqq 180°-\beta$, platí $0° < \frac{2\alpha+\beta}{2}\leqq 180°-\frac{\beta}{2} < 180°$. Rovnost tedy nastane jen pro $\frac{2\alpha+\beta}{2}=90°$ čili pro $\alpha = 90°-\frac{\beta}{2}$. Tvrzení úlohy je dokázáno.

Úloha 13. Zvolte parametr k tak, aby funkce $f(x) = -2x^2+2kx+1$ nabývala v bodě $x = 1$ maxima!

Řešení. Ať je k jakékoliv číslo, je funkce f definována pro všechna x. Aby funkce nabývala pro $x = 1$ maxima, musí pro libovolné x platit nerovnost $f(x)\leqq f(1)$. Pro $x = 1$ tato nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy v dalším, že $x\neq 1$.

Protože je $f(1) = -2+2k+1 = 2k-1$, musí platit

$$-2x^2+2kx+1\leqq 2k-1.$$

Odtud dostáváme postupně další ekvivalentní nerovnosti:

$$2kx-2k\leqq 2x^2-2,$$
$$k(x-1)\leqq x^2-1,$$
$$k(x-1)\leqq (x-1)(x+1). \tag{1}$$

Rozeznávejme nyní dva případy.

a) Je-li $x>1$, potom $x-1>0$. Dělíme-li nerovnost (1) číslem $x-1$, dostaneme

$$k\leqq x+1. \tag{2}$$

Protože pro $x>1$ je stále $x+1>2$, plyne z této nerovnosti a z nerovnosti (2) nerovnost $k\leqq 2$. Kdyby bylo totiž $k>2$, mohli bychom zvolit číslo $x_0>1$ tak, že

$$2 < x_0+1 < k. \tag{3}$$

Protože však nerovnost (2) má být splněna pro všechna $x > 1$, je

$$k \leqq x_0 + 1. \qquad (4)$$

Nerovnosti (3) a (4) si však navzájem odporují. Je tedy skutečně $k \leqq 2$.

b) Je-li $x < 1$, potom $x - 1 < 0$. Dělíme-li nerovnost (1) číslem $x - 1$, dostaneme

$$k \geqq x + 1. \qquad (5)$$

Protože pro $x < 1$ je stále $x + 1 < 2$, je $k \geqq 2$. Kdyby totiž bylo $k < 2$, mohli bychom zvolit $x_0 < 1$ tak, že

$$k < x_0 + 1 < 2. \qquad (6)$$

Protože však nerovnost (5) má platit pro všechna $x < 1$, platí

$$k \geqq x_0 + 1. \qquad (7)$$

Nerovnosti (6) a (7) si však navzájem odporují. Je tedy skutečně $k \geqq 2$.

Shrneme-li případy a), b), má platit současně $k \leqq 2$ i $k \geqq 2$, takže musí nutně být $k = 2$.

Závěr. Funkce $f(x) = -2x^2 + 2kx + 1$ nabývá maxima v bodě $x = 1$ právě tehdy, je-li $k = 2$. Potom je

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 1.$$

Úloha 14. Jaké podmínky pro čísla p a q musí platit, aby funkce

$$f(x) = \frac{2px^2 + 2qx + 3q}{4x^2 + 6x + 5} - p$$

nabývala v celém svém oboru jen kladných hodnot?

Řešení. Nejprve musíme stanovit obor funkce f. Funkce není definována jen pro ta x, pro která je jmenovatel roven nule, tj. pro která platí

$$4x^2 + 6x + 5 = 0. \qquad (1)$$

Diskriminant této rovnice je však $D = 36 - 80 = -44$, tedy $D < 0$ a rovnice (1) nemá reálné kořeny. Funkce f je definována pro všechna x.

Máme určit podmínku pro p a q tak, aby pro všechna x platila nerovnost $f(x) > 0$, tj. nerovnost

$$\frac{2px^2 + 2qx + 3q}{4x^2 + 6x + 5} - p > 0 \tag{2}$$

čili

$$\frac{2px^2 + 2qx + 3q}{4x^2 + 6x + 5} > p. \tag{3}$$

Protože kvadratická rovnice (1) nemá reálný kořen, znamená to podle úlohy 6, že čísla $y = 4x^2 + 6x + 5$ mají pro všechna x kladné znaménko.

Obě strany nerovnosti (3) můžeme tedy násobit výrazem $4x^2 + 6x + 5$ a dostaneme tak nerovnost

$$2px^2 + 2qx + 3q > 4px^2 + 6px + 5p. \tag{4}$$

Ekvivalentními úpravami dostáváme z nerovnosti (4) nerovnost

$$-2px^2 + (2q - 6p)\,x + 3q - 5p > 0. \tag{5}$$

Je-li $p \neq 0$, je nerovnost (5) kvadratická nerovnost. Podle úlohy 6 k tomu, aby tato nerovnost platila pro všechna čísla x, je nutné a stačí, aby diskriminant rovnice

$$-2px^2 + (2q - 6p)\,x + 3q - 5p = 0$$

byl záporný, a aby $-2p > 0$. Diskriminant $D =$

$$= (2q - 6p)^2 + 8p\,(3q - 5p),$$ takže musí platit

$$(2q - 6p)^2 + 8p\,(3q - 5p) < 0. \tag{7}$$

Z nerovnosti (7) dostáváme postupně ekvivalentní nerovnosti

$$4q^2 - 24pq + 36p^2 + 24pq - 40p^2 < 0,$$

$$4q^2 - 4p^2 < 0,$$

$$q^2 < p^2.$$

Je-li tedy $|q| < |p|$, platí nerovnost $q^2 < p^2$ a obráceným postupem dospějeme k nerovnosti (7).

Je-li $p = 0$, zjednoduší se nerovnost (5) na tvar

$$q\,(2x + 3) > 0.$$

Avšak ať je q jakékoliv, neplatí tato nerovnost pro $x = -\frac{3}{2}$, kdy jeden z činitelů na levé straně je roven nule. Při $p = 0$ nelze tedy vyhovět požadavkům úlohy žádnou volbou čísla q.

Závěr. Aby funkce f byla kladná pro všechna x, musí být p záporné a $|q| < |p|$. Tyto dvě podmínky můžeme stručně zapsat jedinou nerovností $|q| < -p$ (přesvědčte se!).