Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách

VI. část. Otočení

In: Jaroslav Šedivý (author): Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1962. pp. 68–[75].

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403453

OTOČENÍ

●

V předcházejících kapitolách jste se seznámili s podrobnými řešeními úloh pomocí zobrazení a některé z nich jste si sami rozřešili. V této kapitole nebudeme proto rozvádět úvahy o řešení úloh; ukážeme si tři typické úlohy, které řešíme pomocí otočení.

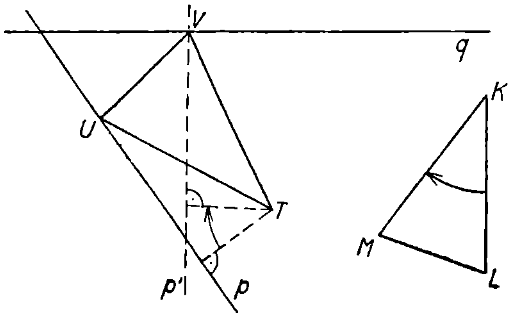
Definice otočení (rotace) vyžaduje znalost pojmu orientovaného úhlu. V této publikaci nemůžeme opakovat vlastnosti orientovaných úhlů, budeme je proto považovat za známé. Připomeňme si jen, že (neorientovaný) úhel AVB je možno „orientovat" dvěma různými způsoby. Můžeme považovat za počáteční rameno polopřímku VA a dostaneme tak orientovaný úhel $A\widehat{V}B$, nebo považujeme za počáteční rameno polopřímku VB a dostaneme orientovaný úhel $B\widehat{V}A$.

Otočení v rovině je jednoznačně určeno, je-li dán bod S a orientovaný úhel $\widehat{\omega}$. Otočení se středem S a úhlem otočení $\widehat{\omega}$ budeme značit $R\ (S, \widehat{\omega})$.

Je-li dán (neorientovaný) úhel AVB, existují dvě otočení se středem V, která zobrazují jedno rameno úhlu v druhé rameno. Jsou to otočení $R_1\ (V, A\widehat{V}B)$, $R_2\ (V, B\widehat{V}A)$.

Je vám jistě zřejmé, že uvedené dvě rotace R_1, R_2 jsou zobrazení navzájem inverzní. Zvláštním případem rotace je středová souměrnost, která je, jak víme, totožná se zobrazením k ní inverzním.

Úloha 24. *Jsou dány dvě přímky p, q, bod T a rovnoramenný trojúhelník KLM. Sestrojte trojúhelník TUV podobný trojúhelníku KLM tak, aby vrchol U ležel na přímce p a vrchol V na q.*



Obr. 44

Rozbor. Na obr. 44 je zakreslen trojúhelník TUV a dané útvary. Máme opět dva neznámé body U, V, jeden v druhý můžeme zobrazit rotací kolem středu. T. Úhel této rotace je buď shodný s orientovaným úhlem $L\widehat{K}M$ nebo s orientovaným úhlem $M\widehat{K}L$.

Neznámý bod V leží 1. *na přímce q,*
2. *na obrazu p' přímky p v otočení* $R_1\,(T, L\widehat{K}M)$ *nebo* $R_2\,(T, M\widehat{K}L)$.

Konstrukce.
K_1: *Sestrojíme obraz přímky p v otočení* $R_1\,(T, L\widehat{K}M)$.

K_2: *Sestrojíme společný bod V přímek p', q.*
K_3: *Sestrojíme obraz U bodu V v otočení* R^{-1}_1 $(T, \widehat{MKL}) = R_2$.
K_4: *Sestrojíme trojúhelník TUV.*

Zapište sami konstrukci pomocí R_2 $(T, \widehat{MKL})$ a proveďte důkaz správnosti konstrukce. V diskusi dojdete k závěru, že může existovat také nekonečně mnoho řešení. Při jaké vzájemné poloze přímek p, q nastane takový případ? Narýsujte si jej.

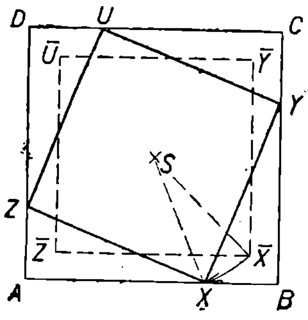
Úloha 25. *Je dán čtverec ABCD a úsečka MN. Sestrojte čtverec XYUV, jehož každý vrchol leží na jedné straně čtverce ABCD a strana* $XY = MN$.

Řešení je jednoduché, dokážete-li si, že střed čtverce $XYUZ$ je totožný se středem čtverce $ABCD$. Sestrojíme-li libovolný čtverec $\bar{X}\bar{Y}\bar{U}\bar{Z}$ se středem S (obr. 45) shodný se čtvercem $XYUZ$, existuje rotace se středem S, která zobrazí $\bar{X} \to X$, $\bar{Y} \to Y$, $\bar{U} \to U$, $\bar{Z} \to Z$. Úloha je pozoruhodná tím, že neznáme úhel otočení, pouze jeho střed. Musíme proto uvažovat, kde leží obrazy bodu X ve všech otočeních se středem S. Snadno si dokážete, že tímto útvarem je kružnice $k \equiv (S, SX)$. Konstrukce a ostatní části řešení úlohy vycházejí z tohoto závěru rozboru:

Neznámý bod X leží

1. *na úsečce AB,*
2. *na kružnici* $k = (S, S\bar{X})$.

Poloměr kružnice k můžeme sestrojit i bez pomoci bodu $\bar{X}$, protože je zřejmě $S\bar{X} = \frac{1}{2}\ MN.\sqrt{2}$.

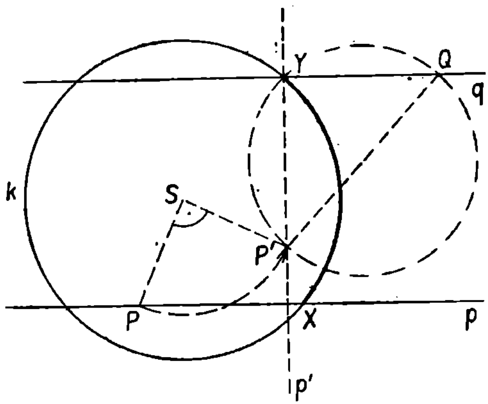


Obr. 45

V diskusi dojdete k nejvýše dvěma různým řešením.

Úloha 26. *Je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a dva různé body P, Q. Sestrojte dvě rovnoběžky p, q procházející body P, Q tak, aby protínaly kružnici k v bodech X, Y omezujících čtvrtinu kružnice.*

Řešení. I v tomto případě se nám osvědčí metoda užitá při řešení úloh 11 a 20; zobrazíme bod X v bod Y (obr. 46).



Obr. 46

Vhodným zobrazením je zřejmě otočení kolem bodu S o pravý úhel v kladném nebo záporném smyslu. Přímka p rovnoběžná s přímkou q přejde tímto otočením v přímku p' kolmou ke q. Docházíme k závěru, že

bod Y leží 1. *na dané kružnici k,*

2. *na Thaletově kružnici o průměru $P'Q$.*

Konstrukce.

K_1: *Sestrojíme obraz P' bodu P v rotaci R_1 $(S, \hat{\omega} = 90°)$.*
K_2: *Sestrojíme kružnici o průměru $P'Q$.*
K_3: *Sestrojíme společný bod Y kružnic k, k_1.*
K_4: *Sestrojíme bod X jako obraz bodu Y v otočení R^{-1}_1.*
K_5: *Sestrojíme přímky $p \equiv PX$, $q \equiv QY$.*

Popište konstrukci v případě, že použijete rotace R_2 $(S, \hat{\omega} = -90°)$. Proveďte si podrobný důkaz konstrukce a diskusi. Kdy bude mít úloha nekonečně mnoho řešení? Jaký je největší možný konečný počet řešení? Narýsujte si jednotlivé případy.

Touto úlohou končí naše společná cesta, během níž jsme poznávali, jak nám mohou shodná zobrazení pomoci při řešení konstruktivních úloh. Pokud jste jen brožuru prolistovali, projděte si ji ještě jednou a zaměřte se na sledování logického postupu řešení a jeho formulování. Poznatky a zkušenosti získané v tomto směru můžete uplatnit při stylizaci řešení soutěžních úloh Matematické olympiády.

Cvičení

29. Je dána kružnice k a bod A. Sestrojte tětivu XY kružnice k, která má danou délku a prochází bodem A. [Narýsujte si libovolnou tětivu dané délky a použijte vhodného otočení.]

30. Jsou dány dvě soustředné kružnice k_1, k_2 a bod A ležící na k_1. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC, jehož vrchol B leží na k_1 a vrchol C na k_2. [Znáte střed i úhel otočení převádějícího bod B v bod C].

31. Jsou dány dvě různé kružnice k_1, k_2 se společným bodem A. Sestrojte čtverec $ABCD$, jehož vrchol B leží na k_1 a vrchol D na k_2.

32. Je dána kružnice k, bod B a úsečka MN. Sestrojte tětivu $XY = MN$ kružnice k tak, aby byla vidět z bodu B pod úhlem 60°.

[Postupujte obdobně jako ve cvičení 22.]

Obtížnější úlohy

33. Zobecněte úlohu 26 v tom smyslu, aby hledané body X, Y omezovaly oblouk kružnice příslušející středovému úhlu α.

34. Dokažte, že složením středové souměrnosti S a posunutí T vznikne středová souměrnost s jiným středem. [Zobrazte několik bodů X roviny ve zobrazení ST ($X \to X'$) a sestrojte středy úseček XX'. Používejte vlastností střední příčky trojúhelníka.]

35. Dokažte, že složením lichého počtu středových souměrností vznikne středová souměrnost, kdežto složením sudého počtu středových souměrností vznikne posunutí nebo identita.

[Použijte věty formulované ve cvičení 34 a známé věty, že složením dvou posunutí vznikne posunutí nebo identita.]

36. Narýsujte si čtverec $S_1\,S_2\,S_3\,S_4$. Zdůvodněte pomocí věty vyslovené ve cvičení 35, že každá lomená čára $XYZUV$, jejíž úsečky XY, YZ, ZU, UV mají po řadě středy S_1, S_2, S_3, S_4, je uzavřená, tj. bod $X \equiv V$.

[Zobrazte bod X ve zobrazení, které vznikne složením souměrností S_1, S_2, S_3, S_4 se středy S_1, S_2, S_3, S_4. Porovnejte zobrazení $S_1\,S_2$, $S_3\,S_4$.]

37. V rovině je dáno pět libovolných bodů S_1, S_2, S_3, S_4, S_5. Sestrojte uzavřenou lomenou čáru $ABCDEA$, která má tu vlastnost, že dané body jsou po řadě středy úseček AB, BC, CD, DE, EA lomené čáry.

[Při rozboru úlohy sestrojte obraz bodu A a libovolného bodu X ve zobrazení $S_1\ S_2\ S_3\ S_4\ S_5$, které dostanete složením středových souměrností podle středů S_1, S_2, S_3, S_4, S_5.]

38. Je dána přímka p s bodem M, kružnice k a úhel α. Sestrojte kružnici, která se dotýká v bodě M přímky p a protíná danou kružnici tak, že tečny těchto kružnic ve společném bodě svírají úhel o velikosti α.

[V rozboru zvolte osu souměrnosti tak, abyste zobrazili průsečík obou kružnic do bodu M. Obraz kružnice k v této souměrnosti označte k'. Zamyslete se nad tím, zda je možno sestrojit kružnici k' dříve než znáte osu souměrnosti.]

39. Jsou dány tři přímky procházející bodem O a dále je dán bod $A \neq O$. Sestrojte trojúhelník ABC, pro který nastane jedna z možností:

1. jeho výšky leží na daných přímkách,
2. jeho těžnice leží na daných přímkách,
3. osy jeho vnitřních nebo vnějších úhlů leží na daných přímkách.

[První případ je snadný, v dalších užijte vhodné souměrnosti.]

40. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jsou-li dány velikosti úseček AC, AD, BC a velikosti úhlů ADB, DBC.

[Jedno z možných řešení začíná konstrukcí jistého trojúhelníka, jehož vnitřní úhel je shodný s rozdílem daných úhlů. Jako část řešení se objevuje úloha obdobná úloze 18. Můžete však najít jiné řešení.]

41. Jsou dány přímky a, b procházející po řadě danými body A, B. Dále je dán směr s. Sestrojte přímku daného směru tak, aby protínala přímku a v bodě X, přímku b v bodě Y a aby platilo $AX = BY$.

[Úsečku AX můžete zobrazit na úsečku BY vhodným otočením. Zjistěte velikost některého úhlu s vrcholem X nebo Y, jehož ramena procházejí danými body nebo středem otočení převádějícího přímku a v přímku b.]

Doporučená literatura

K. Hruša, E. Kraemer, J. Sedláček, J. Vyšín, R. Zelinka: Přehled elementární matematiky, Praha, 1957.
J. Štalmašek: Geometrické konštrukcie, Bratislava, 1959.