Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách

IV. část. Osová souměrnost

In: Jaroslav Šedivý (author): Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1962. pp. 38–51.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403451

OSOVÁ SOUMĚRNOST

•

Konstruktivní využití osové souměrnosti je mnohostranné. Jistě znáte úlohy o odrazu a některé úlohy o nejkratším spojení dvou bodů lomenou čarou. Teoretickým základem řešení těchto úloh je následující věta.

Svírá-li přímka p s osou o osové souměrnosti ostrý úhel α, zobrazuje se v této osové souměrnosti v přímku $p' \neq p$, která protíná osu o v témže bodě jako p a svírá s ní úhel shodný s úhlem α.

Uveďme si ještě dvě věty o určenosti osové souměrnosti.

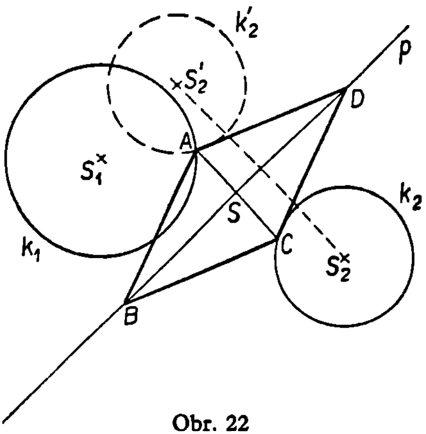
Je-li dána přímka o, existuje právě jedna osová souměrnost v rovině, která má osu o.

Jsou-li dány dva různé body A, B, existuje právě jedna osová souměrnost v rovině, která zobrazuje $A \to B$, $B \to A$.

Středová souměrnost umožňovala „vzpříčit" mezi útvary úsečku půlenou daným bodem, osová souměrnost umožňuje sestrojit takovou „příčku" mezi útvary, která je kolmá na danou přímku a přitom je jí půlena.

Úloha 12. *Je dána přímka p, úsečka u a dvě kružnice oddělené přímkou p. Sestrojte kosočtverec $ABCD$, jehož úhlopříčka $BD = u$ leží na dané přímce a každý ze zbývajících vrcholů leží na jedné z daných kružnic.*

Rozbor. Předpokládané řešení je zobrazeno na obr. 22. Všechny čtyři vrcholy kosočtverce jsou neznámé body, ale B, D sestrojíme snadno, budeme-li znát bod S. K sestro-



Obr. 22

jení bodu S potřebujeme úsečku AC. Osová souměrnost s osou p zobrazuje $A \to C$, $C \to A$, bod A leží proto na obrazu $k_2' \equiv (S'_2, r_2)$ kružnice k_2 obsahující bod C. Výsledek rozboru:

Body B, D leží 1. *na přímce p,*
2. *na kružnici $k \equiv (S, \frac{1}{2} u)$.*

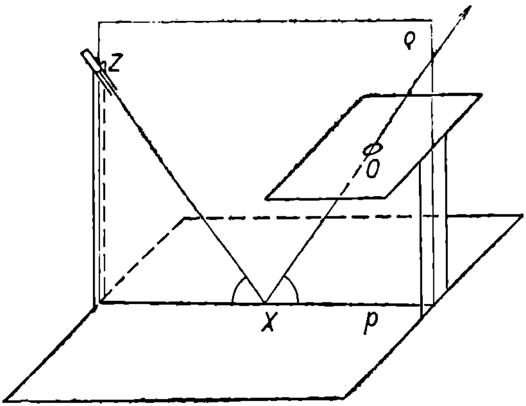
Bod S leží 1. *na přímce p,*
2. *na přímce AC.*

Bod A leží 1. *na kružnici $k_1 \equiv (S_1, r_1)$,*
2. *na obraze $k'_2 \equiv (S'_2, r_2)$ kružnice $k_2 \equiv (S_2, r_2)$ v osové souměrnosti s osou o.*

Na základě podrobného rozboru můžete snadno dokončit řešení úlohy. V konstrukci sestrojujte postupně útvary a body uvedené ve shrnutí rozboru, postupujte od útvarů umožňujících konstrukci bodu A ke kružnici k sloužící ke konstrukci bodů B, D.

Vezměme si nyní praktickou úlohu o odrazu.

Úloha 13 (obr. 23a). *Je dána nepohyblivá zrcadlící stěna, nepohyblivá clona s otvorem O a otáčivý světelný zdroj Z, který vysílá úzký svazek paprsků. Máme natočit zdroj Z tak, aby světelný paprsek procházel po odrazu od zrcadlící stěny otvorem O.*

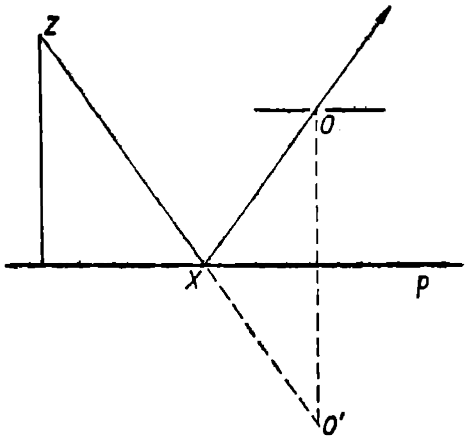


Obr. 23 a

Řešení. Světelný paprsek ze zdroje Z a paprsek odražený leží v jedné rovině kolmé k zrcadlící stěně. Tato rovina je jednoznačně určena body Z, O, její průsečnice se stěnou je označena p (obr. 23b). Tím dostáváme planimetrickou úlohu:

Jsou dány dva různé body Z, O ležící uvnitř téže poloroviny vyťaté přímkou p. Sestrojte bod X přímky p tak, aby přímky ZX, XO svíraly s přímkou p shodné úhly.

Řešení této úlohy znáte. Bod X leží na přímce ZO', kde O' je obrazem bodu O v osové souměrnosti podle přímky p. Napište si podróbné řešení této úlohy.

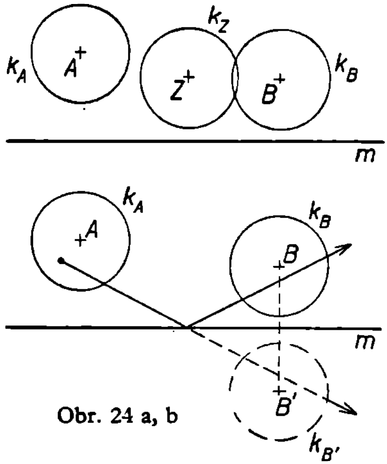


Obr. 23 b

Úlohy o odrazu se vyskytují i ve sportu. Tam se ovšem nezamýšlíme dlouze nad řešením, protože hra vyžaduje rychlé reakce. Teprve po zápase je čas na rekapitulaci hry. *Jak byste objektivně rozhodli, zda při postavení podle obr. 24a mohl hráč A přihrát spoluhráči B odrazem od mantinelu? Při zápase se o to sice hráč A pokusil, ale jeho přihrávku zachytil protivník Z.*

Hráč A na touši nestojí, musíme proto počítat s tím, že touš leží uvnitř jistého kruhu $\mathbf{k}_A$ o středu A. Hráči B, Z mohou touš zachytit jen v tom případě, že jeho dráha prochází kruhy $\mathbf{k}_B$, $\mathbf{k}_Z$ o středech B, Z.

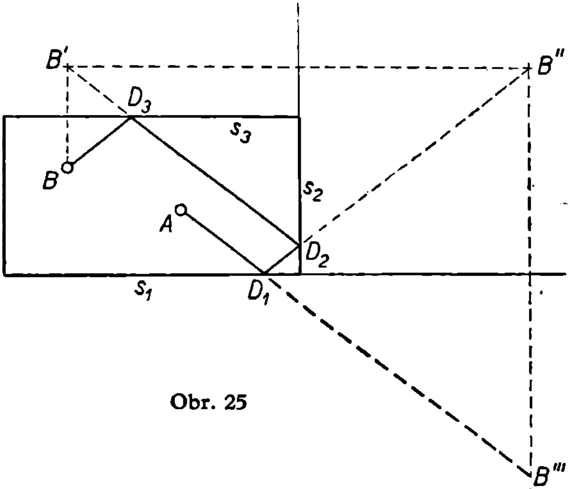
Zobrazme kruh $\mathbf{k}_B$ v souměrnosti podle m (obr. 24b). Touš vystřelený z kruhu $\mathbf{k}_A$ se odrazí od mantinelu do kruhu $\mathbf{k}_B$ právě tehdy, když prodloužení jeho původní dráhy prochází kruhem $\mathbf{k}_B'$. Vyjádřete si obdobně podmínku, kdy se touš odrazí do kruhu $\mathbf{k}_Z$. Danou otázku můžeme zodpovědět kladně jen v tom případě, existuje-li společná sečna kruhů $\mathbf{k}_A$, $\mathbf{k}_{B}'$, která je současně nesečnou kruhů $\mathbf{k}_Z, \mathbf{k}_{Z'}$. Proveďte si řešení úlohy při různých postaveních hráčů A, B, Z.



Obr. 24 a, b

Obdobnou geometrickou problematiku řešíme i při kulečníku. *Nechť body A, B na obr. 25 představují polohu dvou kulečníkových koulí. Máme zakreslit dráhu koule A, která se odráží po řadě od stran s_1, s_2, s_3 kulečníku a nakonec zasáhne kouli B.*

Chceme-li postupovat obdobně jako při řešení předešlých úloh, musíme zobrazit cíl — bod B — nejprve do bodu B' v souměrnosti podle přímky s_3, bod B' do bodu B'' v souměrnosti podle s_2 a konečně bod B'' v souměrnosti podle s_1 do bodu B'''. První část dráhy koule A pak leží na polopřímce AB''', v bodě D_1 se koule odráží a směřuje do bodu B''. Při tomto pohybu se odrazí v bodě D_2 od strany s_2 a směřuje do bodu B'. V bodě D_3 se odrazí do bodu B. Řešte si samostatně podobné úlohy o kulečníkových koulích. Porovnejte délku lomené čáry $AD_1D_2D_3B$ s délkou úsečky AB'''.

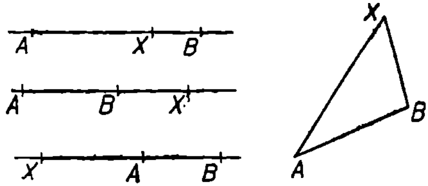


Obr. 25

Osová souměrnost je vhodná i k řešení úloh o nejkratším spojení dvou bodů lomenou čarou, jejíž vrchol leží na dané přímce. Řešení těchto úloh se opírá o následující větu:

Jsou-li A, B, X tři různé body, platí $AX + XB = AB$ právě tehdy, když bod X leží mezi A, B. Vztah $AX - BX = AB$ platí právě tehdy, když B leží mezi A, X. Vždy platí $AX + BX \geqq AB$, $AX - BX \leqq AB$ (pro $AX > BX$).

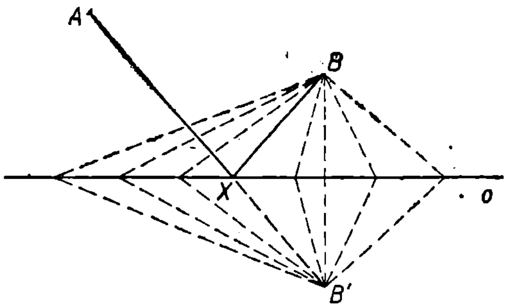
Věty dokážete snadno sami. Vyjádřete si závislost mezi součtem resp. rozdílem úseček AX, XB ve všech případech zakreslených na obr. 26.



Obr. 26

Úloha 14. *Jsou dány dva různé body A, B neležící na dané přímce p. Sestrojte bod X přímky p, pro který je součet $AX + BX$ nejmenší.*

Rozbor této úlohy vede k nutnosti řešit úlohu zvlášť pro případ, kdy body leží v téže polorovině vyťaté přímkou p. Je-li bod X řešením úlohy, je $AX + BX$ minimální. Podle výše uvedené věty je vždy $AX + BX \geqq AB$.



Obr. 27

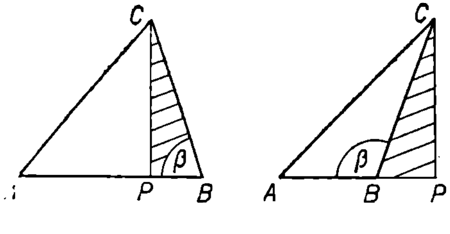
Je-li součet $AX + BX = AB$, leží bod X mezi A, B. Je-li součet $AX + BX$ sice minimální možný (pro body X přímky p), ale přesto větší než AB, nemůže ležet mezi A, B žádný bod přímky p, oba body leží v tom případě uvnitř téže poloroviny vyťaté přímkou p. Řešení úlohy provádíme pak tím způsobem, že místo bodu B vezmeme ten bod roviny, který má od každého bodu přímky p stejnou vzdálenost jako bod B. Tímto bodem je bod B' souměrně sdružený s bodem B v osové souměrnosti s osou p (obr. 27). Závěr rozboru musíme formulovat pro dva různé případy:

Leží-li body A, B uvnitř téže poloroviny vyťaté přímkou p a je-li $AX + XB$ nejmenší, pak leží bod X na úsečce AB', kde B' je obrazem bodu B v souměrnosti podle p.

Leží-li body A, B uvnitř různých polorovin vyťatých přímkou p, je hledaný bod X bodem úsečky AB.

Na základě tohoto rozboru snadno napíšete pro každý případ postup konstrukce. Důkaz správnosti konstrukce je pak snadný, v diskusi dojdete k jedinému řešení.

Podrobný rozbor minulé úlohy se vám možná zdál příliš mnohomluvný, když dávno znáte konstrukci bodu X. Viděli jste však příklad úlohy, v níž dojdeme k nutnosti rozštěpit rozbor. Kdybychom si v úloze 14 nakreslili hned na začátku rozboru obr. 27 a provedli rozbor podle něj, došli bychom ke konstrukci pomocí souměrného bodu B'. Taková konstrukce by nám v případě, že body A, B leží uvnitř opačných polorovin, nedala žádné řešení. Mohli bychom tím být svedeni k ukvapenému závěru, že v tomto



Obr. 28 a, b

případě nemá úloha řešení. Buďte proto pozorní při provádění rozboru a nenechte se ovlivnit při vyslovení konečného úsudku obrázkem. Z obvyklých úloh o trojúhelnících jsou v tomto směru „nebezpečné" zejména úlohy, v jejichž rozboru se pracuje s patou některé výšky. Tak např. rozbor úlohy: *sestrojit trojúhelník ABC, je-li dáno* β, v_C, *b* se často provádí na základě obr. 28a. Může nás to svést k závěru, že nejprve sestrojíme pomocný pravoúhlý trojúhelník *CPB* s úhlem $PBC = \beta$. Protože nelze sestrojit trojúhelník *PBC* v případě, že úhel β je tupý, mohli bychom prohlásit, že v tom případě úloha nemá řešení. To je však hrubý omyl, protože trojúhelník *PBC* může obsahovat také úhel $\pi - \beta$ (výplňkový k úhlu β). Je-li úhel β pravý, trojúhelník *PBC* neexistuje. Při rozboru úlohy uvedené v této poznámce musíte uvažovat zvlášť o ostroúhlém, pravoúhlém a tupoúhlém trojúhelníku *ABC*.

Podle vzoru úlohy 14 si rozřešte, nejlépe ihned, následující úlohu:

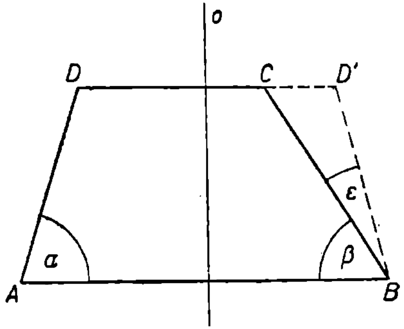
Úloha 15. *Je dána přímka p a body A, B neležící na p, z nichž B je blíže přímky p. Sestrojte bod X přímky p, pro který je rozdíl úseček* $AX - BX$ *největší.*

Sledujte především formulaci rozboru úlohy 14, zapište si podle ní rozbor úlohy 15.

Pomocí osové souměrnosti v rovině můžeme řešit i ty úlohy, ve kterých je dán součet nebo rozdíl úhlů některého útvaru.

Úloha 16. *Jsou dány úsečky b, c, d a úhel* ε. *Sestrojte lichoběžník ABCD tak, aby bylo* $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $\sphericalangle DAB - \sphericalangle ABC = \alpha - \beta = \varepsilon$.

Řešení. Podíváte-li se na obr. 29, kde jsou vyznačeny dané úsečky, vidíte, že máme dán rozdíl úhlů přiléhajících k úsečce AB. Musíme si zřejmě v obr. 29 sestrojit úhel $\alpha - \beta = \varepsilon$. Řekli jsme si, že bývá vhodné zobrazit osovou souměrností jeden vrchol v druhý. Použijme osové souměrnosti $O\ (A \to B,\ B \to A)$, v ní přejde $D \to D'$, $\sphericalangle BAD \to \sphericalangle ABD'$. Protože je $\alpha > \beta$, leží D' na přímce CD tak, že C odděluje D, D'. Úhel $\sphericalangle CBD' = \varepsilon = \alpha - \beta$.



Obr. 29

Má-li lichoběžník $ABCD$ žádané vlastnosti, má trojúhelník BCD' stranu $BC = b$, $BD' = d$, $\sphericalangle CBD' = \varepsilon$. Trojúhelník BCD' snadno sestrojíme, známe úhel trojúhelníka a strany ležící na jeho ramenech. V tomto směru už v rozboru pokračovat nemusíme. Ptejme se spíše, zda budeme moci sestrojit body A, D, až budeme mít sestrojen trojúhelník BCD'. Co víme o vztahu těchto bodů k trojúhelníku BCD'?

Bod D leží 1. *na polopřímce* $D'C$,
2. *na kružnici* $k \equiv (C, c)$.

Bod A je obrazem bodu B v souměrnosti $O\ (D' \to D)$.

Konstrukce.

K_1: *Sestrojíme trojúhelník BCD' s úhlem $\sphericalangle\, BCD' = \varepsilon$, $BC = b$, $BD' = d$.*

K_2: *Sestrojíme polopřímku $D'C$.*

K_3: *Sestrojíme kružnici $k \equiv (C, c)$.*

K_4: *Sestrojíme D jako společný bod polopřímky $D'C$ a kružnice k.*

K_5: *Sestrojíme osu souměrnosti $O\ (D' \to D)$.*

K_6: *Sestrojíme obraz A bodu B v souměrnosti O.*

K_7: *Sestrojíme lichoběžník $ABCD$.*

Důkaz. Z konstrukcí K_3, K_4 plyne, že je $CD = c$ a bod C leží mezi D, D'. Použitá osová souměrnost $O\ (D' \to D, B \to A, A \to B)$ zobrazuje úsečku $BD' = d$ v úsečku $DA = d$ a úhel $D'BA$ v úhel $\sphericalangle\, BAD = \alpha$, je proto $\sphericalangle\, D'BA = \alpha$. Protože polopřímka BC leží uvnitř úhlu ABD, je úhel $CBD' = \alpha - \beta$. V K_1 jsme však sestrojili úhel $\sphericalangle\, CBD' = \varepsilon$, je tedy $\alpha - \beta = \varepsilon$. Tím jsme dokázali, že v sestrojeném čtyřúhelníku $ABCD$ je $AD = d$, $BC = b$, $CD = c$, $\alpha - \beta = \varepsilon$. Nemůžeme však tvrdit, že čtyřúhelník je lichoběžníkem s hlavní základnou AB. Sestrojený čtyřúhelník má rovnoběžné strany AB, CD, může však být rovnoběžníkem (při $b = d$) nebo lichoběžníkem s $AB > CD$ nebo lichoběžníkem s $AB < CD$.

Diskuse. Každý krok konstrukce je jednoznačný, proto i úloha má jediné řešení. Vyšetřování podmínek, kdy vyjde lichoběžník s $AB > CD$, nebudeme provádět.

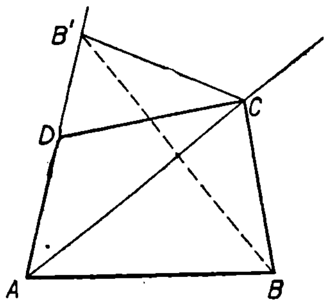
Řešení úlohy bylo dost pracné, přestože jsme konstrukci trojúhelníka BCD' zapsali jako jeden krok konstrukce. Tohoto obratu se užívá i v jiných případech, můžete ho také použít při řešení úloh Matematické olympiády. Buďte si však vědomi toho, že nesmíte dopustit, aby se vám tím skrylo v řešení nějaké nedopatření. Každou takovou dílčí úlohu si musíte vyřešit samostatně a připojit k řešení celé úlohy. Zvláště nezapomínejte na diskusi počtu řešení dílčí úlohy.

V popisu konstrukce úlohy 16 není uveden krok K_0. Je vynechán proto, že konstrukce K_1 je nepolohová a je v ní „skryto" umístění útvarů.

Uveďme si ještě jednu úlohu o čtyřúhelníku, kterou lze výhodně řešit pomocí osové souměrnosti. Už z jejího textu byste jistě usuzovali, že bude vhodné užít osové souměrnosti.

Úloha 17. *Jsou dány úsečky, a, b, c, d, při čemž je $a > d$. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jehož strany AB, BC, CD, DA jsou po řadě shodné s úsečkami a, b, c, d, je-li dále známo, že úhlopříčka AC je osou úhlu α.*

Rozbor. Na obr. 30 je zobrazen čtyřúhelník $ABCD$, který má požadované vlastnosti. Zobrazme v osové souměrnosti s osou AC bod B do bodu B'; tato souměrnost zobrazí zřejmě polopřímku AB na polopřímku AD. Protože je $AD < AB$, leží bod D mezi body A, B'.



Obr. 30

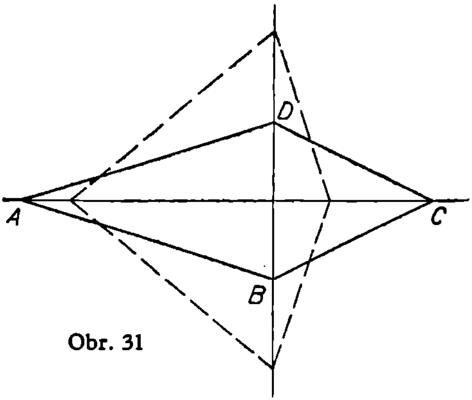
Má-li čtyřúhelník $ABCD$ žádané vlastnosti, existuje trojúhelník $B'CD$, který má stranu $B'C = b$, $CD = c$, $B'D = = a - d$.

Podobně jako v úloze 16 nebudeme provádět rozbor úlohy na sestrojení trojúhelníka $B'CD$ na základě uvedených jeho vlastností. Jde o konstrukci trojúhelníka ze tří stran, o té víte, že má právě jedno řešení, vyhovují-li strany trojúhelníka trojúhelníkovým nerovnostem.

Bod A leží 1. *na polopřímce opačné k polopřímce DB'*,
2. *na kružnici k* $\equiv$ *(D, d)*.

Bod B je obrazem bodu B' v osové souměrnosti s osou AC.

Na základě podrobného rozboru můžete snadno popsat konstrukci čtyřúhelníka. Při důkazu konstrukce ani v diskusi nedojdete k žádným potížím.



Obr. 31

Úloha 17 je ovšem jen částí obecnější úlohy, ve které se nepředpokládá platnost nějakého vztahu mezi úsečkami a, d. Při rozboru této obecnější úlohy docházíme opět k nutnosti štěpení rozboru. V případě, že je $a < d$, neliší se další postup mnoho od řešení úlohy 17. Je-li $a = d$, je čtyřúhelník souměrný podle přímky AC, je proto deltoidem (obr. 31). V témž obrázku je zakreslen druhý deltoid, který má také strany a, b, c, d. Někdy existuje nekonečně mnoho deltoidů, které jsou řešením zobecněné úlohy. Jak sestrojíte některý z nich?

Cvičení

15. Je dána přímka p, kružnice k, bod T a směr s. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC s těžištěm T, jehož základna AB náleží směru s, vrchol A leží na přímce p, vrchol B na kružnici k.

[Sestrojte nejprve osu souměrnosti trojúhelníka.]

16. Pozměňte text úlohy 10 tak, aby požadovala sestrojení tečny kružnice bez pomoci Thaletovy věty. Tuto úlohu lze řešit pomocí množiny bodů souměrně sdružených se středem kružnice podle tečen kružnice. Proveďte si takové řešení úlohy a zamyslete se nad její souvislostí se známými konstrukcemi tečen elipsy pomocí řídící kružnice.

17. Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 a jejich společná vnitřní tečna t. Sestrojte bod X přímky t tak, aby přímka t byla osou dvojice vrcholových úhlů sevřených druhými tečnami z bodu X ke kružnicím k_1, k_2.

18. Je dán ostrý úhel MNP a jeho vnitřní bod A. Sestrojte ten trojúhelník ABC s vrcholy B, C na ramenech úhlu, který má nejmenší obvod.

19. Při stejném zadání jako ve cvičení 18 sestrojte dráhu bodu A představujícího kouli, která se po odrazu od ramen úhlu vrátí na své místo. Porovnejte řešení cvičení 18, 19 s řešením úloh 13, 14.

20. Postavte kulečníkové koule na úhlopříčku stolu tak, aby jejich vzájemná vzdálenost byla rovna vzdálenosti každé z nich od rohu stolu. Stanovte dráhu jedné koule tak, aby se odrazila postupně od tří stran stolu a zasáhla druhou kouli. Má úloha řešení při libovolně předepsaném pořadí stran, od kterých se má koule postupně odrazit? Lze najít její dráhu v případě, že požadujeme čtyřnásobný odraz?

[Kombinujte skládání souměrností, jejichž osy obsahují strany obdélníka. Pro existenci požadované dráhy je rozhodující, abychom body odrazu dostali uvnitř příslušných stran.]

21. Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány velikosti jeho stran a, c a úhlu $\alpha - \beta$. [Úloha je zjednodušením řešené úlohy 16.]