# Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách

III. část. Středová souměrnost

In: Jaroslav Šedivý (author): Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1962. pp. 25–37.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403450

*III. část*

# STŘEDOVÁ SOUMĚRNOST

●

V této kapitole si ukážeme některé typy úloh, které lze řešit výhodně pomocí středové souměrnosti. Jistě víte, jak přiřazujeme obraz danému bodu nebo útvaru (přímce, kružnici). Připomeňme si ještě dvě věty o středové souměrnosti v rovině. Jsou to věty, které říkají, že za jistých předpokladů existuje právě jedna středová souměrnost mající dané vlastnosti.

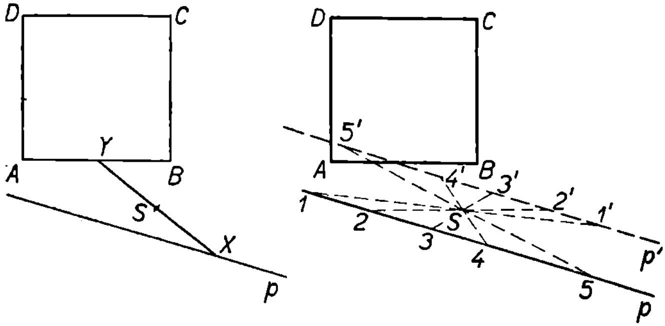
*Je-li dán v rovině bod $S$, existuje právě jedna středová souměrnost se středem $S$.*

*Je-li dána v rovině dvojice různých bodů $A$, $B$, existuje právě jedna středová souměrnost, která zobrazuje $A$ v $B$, $B$ v $A$. Jejím středem je střed úsečky $AB$.*

Zabývejme se nejprve problémem „vzpříčení" úsečky mezi dvěma útvary tak, aby byla půlena daným bodem $S$.

**Úloha 6.** *Je dán čtverec $ABCD$, přímka $p$ a bod $S$. Sestrojte úsečku $XY$ tak, aby jejím středem byl bod $S$ a aby bod $X$ ležel na $p$, bod $Y$ na obvodu čtverce.*

*Rozbor.* Úloha má dva neznámé body $X$, $Y$, které jsou však závislé. Kdybychom znali bod $X$, přiřadili bychom mu snadno bod $Y$ jako obraz v souměrnosti podle středu $S$. Bodem $X$ je však některý bod přímky $p$, „vyzkoušíme" tedy několik bodů přímky $p$ podobně jako jsme experimentovali při řešení úlohy 4. Na obr. 16b jsou pokusy číslovány, nepodařilo se však najít zkusmo hledanou úsečku $XY$. Je zřejmé, že hledaný bod $Y$ je bodem přímky $p'$, která je obrazem přímky $p$ v souměrnosti podle středu $S$. Zapišme si výsledek rozboru:




Obr. 16 a, b

*Je-li úsečka $XY$ řešením úlohy, pak*
*bod $X$ je obrazem bodu $Y$ v souměrnosti podle středu $S$,*
*bod $Y$ leží* 1. *na obvodu čtverce $ABCD$,*
2. *na obrazu $p'$ přímky $p$ v souměrnosti podle středu $S$.*

*Konstrukce:* $K_1$: *Sestrojíme obraz $p'$ přímky $p$ v souměrnosti podle středu $S$.*
$K_2$: *Sestrojíme společný bod $Y$ přímky $p'$ a obvodu čtverce.*
$K_3$: *Sestrojíme obraz $X$ bodu $Y$ v souměrnosti podle středu $S$.*
$K_4$: *Sestrojíme úsečku $XY$.*

*Důkaz správnosti konstrukce.* Z konstrukce $K_2$ plyne, že bod $Y$ leží na obvodu čtverce. Z konstrukce $K_3$ plyne, že bod $S$ je středem úsečky $XY$. Protože podle $K_1$ zobrazuje souměrnost $S$ ($p \to p'$), zobrazuje také $p' \to p$, proto bod $X$ (obraz bodu $Y$ přímky $p'$) leží na přímce $p$. Dokázali jsme, že sestrojená úsečka má žádané vlastnosti.

*Diskuse.* Konstrukce $K_1$ má právě jedno řešení. Počet řešení konstrukce $K_2$ závisí na vzájemné poloze přímky $p'$ a obvodu čtverce; tyto útvary mohou mít společnou úsečku, dva různé body, jediný bod nebo žádný bod. Konstrukce $K_3$ má jediné řešení. Konstrukce $K_4$ má řešení, pokud je $X \not\equiv Y$.

Není-li bod $S$ společným bodem obvodu čtverce a přímky $p$, má úloha právě tolik řešení, kolik jich má konstrukce $K_2$. Je-li bod $S$ společným bodem obvodu čtverce a přímky $p$, má úloha vždy o jedno řešení méně než konstrukce $K_2$.

Všimněte si řešení úlohy 6 pozorně, zvláště jejího zápisu. Nejste asi zvyklí psát *shrnutí rozboru*. Je však užitečné zapsat si, co jsme zjistili o neznámých bodech. Musí to být takové jejich vlastnosti, na základě kterých je možno tyto body sestrojit. Zpravidla udáváme, na kterých daných nebo z daných údajů sestrojitelných základních křivkách*) leží každý neznámý bod. Užíváme-li metody zobrazení, můžeme neznámý bod sestrojit jako obraz jiného bodu v některém zobrazení.

Je vám jistě zřejmé, že jsme mohli při řešení úlohy 6 přiřazovat obrazy bodům obvodu čtverce. Dostali bychom obraz čtverce v souměrnosti podle středu $S$. Proveďte si řešení tímto způsobem a zapište si je podrobně podle vzoru řešení úlohy 6.

Zvolíme-li místo přímky a čtverce jiné útvary, zůstane princip řešení zřejmě stejný. Podívejte se na obr. 16a, kde je silně vyznačena úsečka $XY$. Dovedli byste sestrojit

*) Při konstrukcích kružítkem a pravítkem jsou základními křivkami kružnice a přímky. Neznámé body sestrojujeme jako společné body základních křivek.

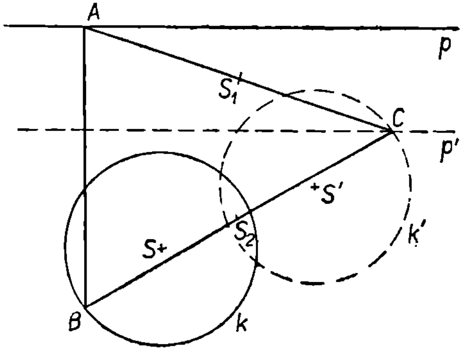
čtverec, jehož úhlopříčkou je úsečka $XY$? Jistěže ano; pak také vyřešíte i následující úlohu.

**Úloha 7.** *Jsou dány přímky, $a$, $b$ a bod $S$. Sestrojte čtverec $XYZU$ o středu $S$, jehož vrchol $X$ leží na $a$, vrchol $Z$ na $b$.*

*Řešení.* Sestrojíte-li úsečku $XZ$ o středu $S$, proveďte navíc konstrukci čtverce o úhlopříčce $XZ$. Zapište si podrobné řešení.

Uveďme si nyní úlohu, ve které se použije dvou středových souměrností.

**Úloha 8.** *Je dána přímka $p$, kružnice $k \equiv (S, r)$ a body $S_1$, $S_2$ navzájem různé. Sestrojte trojúhelník $ABC$ tak, aby jeho vrchol $A$ ležel na $p$, vrchol $B$ na $k$ a body $S_1$, $S_2$ byly po řadě středy stran $AC$, $BC$.*




Obr. 17

*Rozbor* (obr. 17). Všechny vrcholy trojúhelníka jsou neznámé, bod $C$ je však obrazem bodu $A$ v souměrnosti $S_1$ o středu $S_1$ a bodu $B$ v souměrnosti $S_2$ o středu $S_2$. Bod $A$ leží na přímce $p$, jeho obraz $A' \equiv C$ leží na obrazu $p'$

přímky $p$ v souměrnosti $S_1$. Bod $B$ leží na $k$, jeho obraz $B' \equiv C$ leží na obrazu $k'$ kružnice $k$ v souměrnosti $S_2$. Shrňme výsledek rozboru:

*Má-li úloha řešení, leží bod C*

1. *na obraze $p'$ přímky $p$ v $S_1$,*
2. *na obraze $k'$ kružnice $k$ v $S_2$.*

*Konstrukce.* Jednotlivé kroky konstrukce popíšete snadno sami. Pamatujte však na to, že poslední konstrukce musí sestrojit hledaný útvar.

Důkaz konstrukce a diskusi proveďte podle vzoru úloh 6 a 7. Úloha může mít nejvýše dvě různá řešení.*)

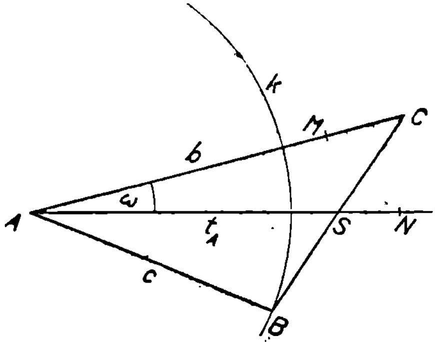
Úlohy 6, 7, 8 jsou *polohové konstruktivní úlohy*, protože požadují sestrojení útvaru, jehož význačné prvky mají mít předepsanou polohu. Pomocí středové souměrnosti lze však řešit i *nepolohové konstruktivní úlohy*, tj. úlohy nepožadující od žádného prvku hledaného útvaru, kde má ležet. Sestrojování neznámých bodů však provádíme na základě polohových vlastností (hledáme společné body dvou základních křivek). Chceme-li řešit nepolohovou úlohu, musíme z ní nejprve učinit úlohu polohovou, a to tak, že *umístíme* některý z daných prvků útvaru (úhel, úsečku apod.). Umístění tohoto prvku předchází vlastnímu řešení úlohy, napíšeme je proto jako konstrukci $K_0$.

**Úloha 9.** *Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li jeho stranu c, těžnici $t_A$ a dutý úhel $\omega$ sevřený těžnicí $t_A$ a stranou b.*

*Rozbor.* Předpokládáme, že úloha má řešení a narýsujeme obr. 18. Považujme za umístěný útvar úhel $\sphericalangle MAN = \omega$ s vyznačenou úsečkou $AS$ na rameni $AN$. Neznámé body

*) Úlohu můžete řešit také pomocí jediného zobrazení. Určete je jako složení středových souměrností se středy $S_1$, $S_2$. Který bod je obrazem bodu $A$ ve výsledném zobrazení?

$B$, $C$ jsou souměrné podle středu $S$. Bod $C$ leží na polopřímce $AM$, bod $B$ na kružnici $k \equiv (A, c)$. Hledáme-li polohové vlastnosti bodů $B$, $C$, provádíme vlastně rozbor této polohové úlohy:




Obr. 18

*Je dána polopřímka $AM$, kružnice $k \equiv (A, c)$ a bod $S$. Sestrojte úsečku $BC$ tak, aby bod $B$ ležel na $k_1$, bod $C$ na polopřímce $AM$ a aby bod $S$ byl středem úsečky $BC$.*

Tuto úlohu vyřešíme snadno podle vzoru úlohy 6. Výsledek rozboru lze formulovat takto:

*Má-li úloha řešení,*
*leží bod $C$* 1. *uvnitř polopřímky $AM$,*
2. *na kružnici $k' \equiv (A', c)$, která je obrazem kružnice $k \equiv (A, c)$ v souměrnosti podle středu $S$.*

*Konstrukce* (původní úlohy):

$K_0$: *Umístíme úhel $\sphericalangle MAS = \omega$, $AS = t_A$.*

$K_1$: *Sestrojíme $k \equiv (A, c)$.*

$K_2$: *Sestrojíme $k' \equiv (A', c)$ jako obraz kružnice $k$ v souměrnosti podle $S$.*

$K_3$: *Sestrojíme bod C jako společný bod vnitřku polopřímky AM a kružnice k'.*

$K_4$: *Sestrojíme bod B jako obraz bodu C v souměrnosti dle středu S.*

$K_5$: *Sestrojíme trojúhelník ABC.*

*Důkaz konstrukce.* Již konstrukcí $K_0$ jsme dosáhli toho, že je $AS = t_A$, z $K_4$ plyne, že bod $S$ je středem úsečky $BC$, proto úsečka $AS = t_A$ je těžnicí $t_A$ trojúhelníka $ABC$. Z $K_0$ a $K_3$ plyne dále, že $\sphericalangle CAS = \omega$ je úhlem sevřeným těžnicí a stranou $AC$. Z konstrukce $K_4$ plyne, že bod $B$ leží na $k \equiv (A, c)$, je proto $AB = c$.

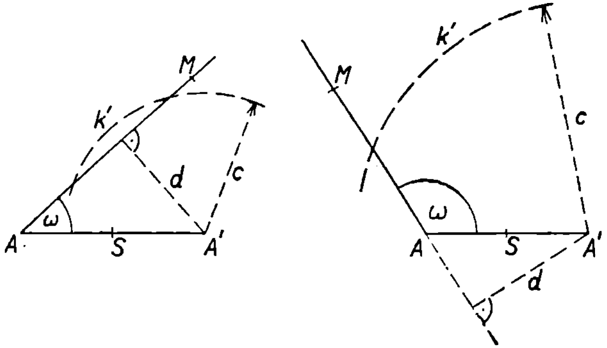
*Diskuse.* Konstrukci $K_0$ nediskutujeme, konstrukce $K_1$, $K_2$ mají jediné řešení. Konstrukcí $K_3$ můžeme dostat dva, jeden nebo žádný bod $C$. Konstrukce $K_4$ má jediné řešení, konstrukce $K_5$ také, pokud neleží body $A$, $B$, $C$ na jedné přímce. Kdyby však body $A$, $B$, $C$ ležely na přímce $AM$, ležel by i bod $S$ na $AM$ a úhel $\omega$ by byl nulový nebo přímý. Protože tomu tak není, má $K_5$ právě jedno řešení.

Počet řešení celé úlohy záleží tedy na vzájemné poloze polopřímky $AM$ a kružnice $k' = (A', c)$.*)

U nepolohových úloh provádíme obvykle diskusi i podle daných údajů, v našem případě úhlu $\omega$ a úseček $t_A$, $c$. Tato diskuse vyžaduje znalost trigonometrie, speciálně trigonometrického řešení pravoúhlého trojúhelníka. Na obr. 19a je zobrazen případ, kdy je úhel $\omega$ ostrý. Kružnice $k' \equiv (A', c)$ má s vnitřkem polopřímky $AM$ společné dva různé body právě tehdy, když je $d < c$ a současně $A'A = 2\,t_A > c$. Protože $d = AA' \sin\omega = 2t_A \sin\omega$, dostáváme podmínku $2t_A \sin\omega < c < 2t_A$. Je-li $c \geqq 2t_A$, má kružnice $k'$ s vnitřkem polopřímky $AM$ jediný společný

*) Také tuto úlohu můžete řešit tak, že ve středové souměrnosti se středem $S$ zobrazíte polopřímku $AM$ a vyhledáte společné body jejího obrazu a kružnice $k$.

bod. Na obr. 19b je úhel $\omega$ tupý, kružnice $k'$ může mít s vnitřkem polopřímky $AM$ nejvýše jeden společný bod, to nastane právě tehdy, když je $c > 2t_A$.




Obr. 19 a, b

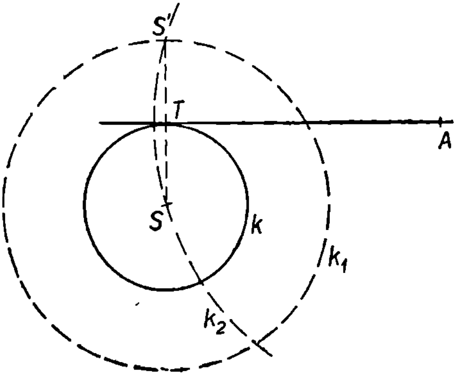
V úlohách 6 až 9 byl vždy středem středové souměrnosti daný bod. V řadě úloh lze však využít i toho, že za střed souměrnosti zvolíme hledaný bod.

**Úloha 10.** *Je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a její vnější bod $A$. Sestrojte bod dotyku kružnice $k$ s její tečnou procházející bodem $A$, nepoužívejte však Thaletovy kružnice.**)

*Rozbor* (obr. 20). Protože hledaným bodem $T$ je některý bod kružnice $k$, musíme provést rozbor tak, jako by každý bod kružnice byl středem souměrnosti. Snadno si dokážete, že obrazy bodu $S$ v množině všech souměrností, které mají střed na kružnici $k$, leží na kružnici $k_1 \equiv (S, 2r)$.

*) Takovou konstrukci potřebujeme např. v Lobačevského geometrii, kde neplatí věta Thaletova.

Obraz $S'$ bodu $S$ v souměrnosti podle hledaného bodu $T$ leží pak ještě na kružnici $k_2 \equiv (A, AS)$, protože je $AS' = AS$. Rozbor můžeme shrnout takto:




Obr. 20

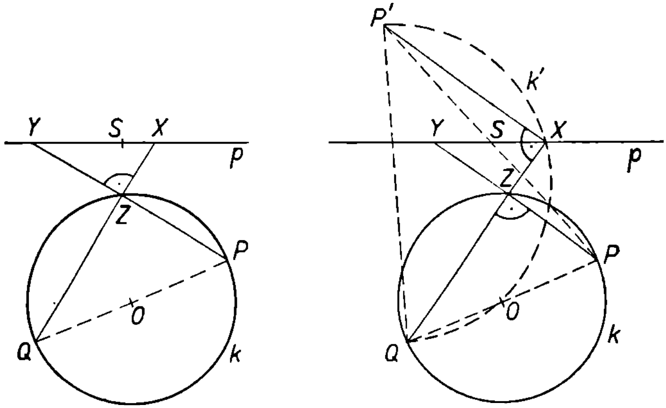
*Bod $T$ je středem souměrnosti zobrazující bod $S$ v bod $S'$.*
*Bod $S'$ leží* 1. *na* $k_1 \equiv (S, 2r)$,
2. *na* $k_2 \equiv (A, AS)$.

*Konstrukce.* $K_1$: *Sestrojíme kružnici* $k_1 \equiv (S, 2r)$.
$K_2$: *Sestrojíme kružnici* $k_2 \equiv (A, AS)$.
$K_3$: *Sestrojíme společný bod $S'$ kružnic* $k_1$, $k_2$.
$K_4$: *Sestrojíme střed $T$ souměrnosti* $S\ (S \to S')$.

Další fáze řešení můžete provést snadno sami. Všimli jste si, že v rozboru této úlohy se objevil pomocný neznámý bod $S'$. Doplnili jsme jím určení bodu $T$. V konstrukci jej sestrojujeme dříve než bod $T$.

Dosud uvedené úlohy byly celkem jednoduché, ukažme si řešení jedné obtížnější úlohy. Jistě oceníte pomoc, jakou nám k jejímu zvládnutí poskytne středová souměrnost.

**Úloha 11.** *Je dána kružnice $k \equiv (O, r)$ s vyznačeným průměrem $PQ$ a nesečna $p$ kružnice $k$, na $p$ je dán bod $S$. Sestrojte bod $Z$ kružnice $k$, který má tu vlastnost, že průsečíky $X$, $Y$ přímek $PZ$, $QZ$*) s přímkou $p$ jsou souměrně sdruženy podle středu $S$.*




Obr. 21 a, b

*Řešení.* Na obr. 21a jsou narýsovány dané útvary a dále průsečíky $X$, $Y$ přímek $QZ$, $PZ$ s přímkou $p$. Bod $Z$ je zvolen libovolně, není řešením úlohy. Zkoušejte si na podobném obrázku další body $Z$, s body $X$, $Y$ nebudete

*) V této úloze a úlohách jí podobných je třeba považovat tečnu kružnice v bodě $P$ za přímku $PZ$ v případě, kdy je $Z \equiv P$. Obdobný význam má přímka $QZ$ v případě, kdy je $Z \equiv Q$.

mít asi úspěch, zato si jistě uvědomíte, že přímky $PZ$, $QZ$ jsou navzájem kolmé při každém $Z$.

*Rozbor*. Na obr. 21b je sestrojen bod $Z$, který je řešením úlohy. Průsečíky přímek $ZQ$, $ZP$ s přímkou $p$ jsou označeny písmeny $X$, $Y$. Souměrnost se středem $S$ zobrazuje navzájem $X$ a $Y$, zobrazme v ní „na zkoušku" i bod $P$ a přímku $PY$, $S$ ($S \to S$, $Y \to X$, $P \to P'$, $PY \to P'X$).

Protože je přímka $PY$ rovnoběžná s přímkou $P'X$ a současně kolmá na přímku $QX$, je také přímka $P'X$ kolmá na přímku $QX$. Vidíte, že bod $X$ je vrcholem pravého úhlu nad úsečkou $P'Q$. Napišme si shrnutí rozboru:

*Je-li bod $Z$ řešením úlohy, náleží kružnici $k$ a přímkám $QX$, $PY$.*

*Bod $X$ leží* 1. *na přímce $p$,*
2. *na kružnici o průměru $P'Q$.*

*Bod $P'$ je obrazem bodu $P$ v souměrnosti o středu $S$.*

*Konstrukce.*

$K_1$: *Sestrojíme obraz $P'$ bodu $P$ v souměrnosti o středu $S$.*
$K_2$: *Sestrojíme kružnici $k'$ o průměru $P'Q$.*
$K_3$: *Sestrojíme bod $X$ jako společný bod přímky $p$ a kružnice $k'$.*
$K_4$: *Sestrojíme přímku $QX$.*
$K_5$: *Sestrojíme bod $Z$ jako společný bod kružnice $k$ a přímky $QX$.*

*Důkaz správnosti konstrukce*. Z konstrukce $K_3$ plyne, že je $P'X$ kolmá na $QX$. Z konstrukcí $K_5$, $K_4$ plyne podle Thaletovy věty, že je $PZ$ kolmá na $QZ \equiv QX$. Přímky $PZ$, $P'X$ jsou kolmé k téže přímce, proto navzájem rovnoběžné. Protože $P'X$ protíná $p$, protíná ji i přímka $PZ$, označme průsečík jako bod $Y$. Souměrnost $S$ se středem $S$ zobrazuje $P \to P'$, $P' \to P$, $p \to p$, přímku $P'X$ v rovnoběžku procházející bodem $P$. Touto rovnoběžkou je však přímka $PZ \equiv PY$. Průsečík přímek $P'X$, $p$ přejde v průsečík obrazů těchto přímek, tj. bod $X$ přejde v bod $Y$. V důsledku toho je bod $S$ středem úsečky $XY$.

*Diskuse.* Konstrukce $K_1$, $K_2$ mají právě jedno řešení, přitom bod $P'$ leží uvnitř opačné poloroviny vyťaté přímkou $p$ než bod $Q$. Přímka $p$ obsahuje vnitřní bod úsečky $P'Q$, proto i vnitřní bod kružnice $k'$, konstrukce $K_3$ má právě dvě řešení. Konstrukce $K_4$, $K_5$ mají jediné řešení. Celkově má tedy úloha právě dvě řešení.*)

Umělý obrat, kterého jsme užili, lze snad nejlépe charakterisovat takto: v souměrnosti, která převádí jeden neznámý bod v druhý, jsme zobrazili jeden z daných bodů, nikoliv všechny dané body. V dalším textu poznáte, že pro užití zobrazení je v mnoha případech typické to, že v něm zobrazujeme jen některé dané útvary a hledáme pak jejich vztahy k nezobrazeným bodům.

V kapitole III jsme si ukázali úlohy, v nichž byl středem souměrnosti daný bod (úlohy 6, 7, 9, 11), dva dané body (úloha 8) nebo hledaný bod (úloha 10).

## Cvičení

**11.** Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1$, $k_2$ a bod $S$ na menší z nich. Sestrojte rovnoběžník se středem $S$, jehož vrcholy leží na daných kružnicích.

**12.** Jsou dány čtyři kružnice a bod $S$. Sestrojte rovnoběžník $XYUV$ se středem $S$, jehož každý vrchol leží na jedné z daných kružnic.

**13.** Sestrojte trojúhelník $ABC$, je-li dáno:

*) V případě, že je přímka $p$ rovnoběžná s průměrem $PQ$, lze úlohu snadno řešit pomocí stejnolehlosti.

1. $t_A, t_B, t_C$,
2. $t_A, t_B, \gamma$,
3. $t_A, v_B, v_C$,
4. $t_A, v_B, v_A$,
5. $t_A, v_C, \gamma$,
6. $t_A, \beta, \gamma$.

[Umístěte těžnici $t_A = AS$ a stanovte množiny bodů, kterým náležejí neznámé vrcholy $B$, $C$. Využijte k tomu vlastností těžiště nebo vzdáleností bodu $S$ od stran $AB$, $AC$ trojúhelníka, dostanete buď kružnice, oblouky kružnic, přímky nebo polopřímky. Dále postupujte podle úlohy 9.]

**14.** Zobecněte úlohu 11 v tom smyslu, že zvolíte body $P$, $Q$ *libovolně* na kružnici $k$, nikoliv jako body diametrálně protilehlé.

[Při řešení využijte vlastností obvodového úhlu $PZQ$; pamatujte na existenci dvou oblouků dané kružnice s krajními body $P$, $Q$.]