Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách

II. část. Shodná zobrazení v rovině

In: Jaroslav Šedivý (author): Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1962. pp. 14–24.

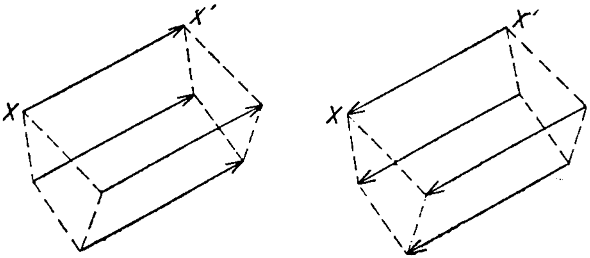
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403449

2. *část*

SHODNÁ ZOBRAZENÍ V ROVINĚ

●

V úlohách minulé kapitoly jsme použili středové souměrnosti a otočení. Znáte jistě i další shodná zobrazení — identitu,*) osovou souměrnost a posunutí. Dříve než budeme řešit pomocí každého druhu shodnosti určité typy úloh, probereme si některé jejich společné vlastnosti.



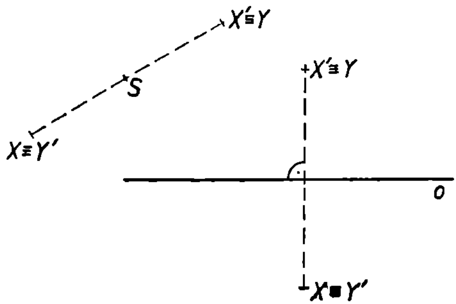
Obr. 6

Shodné zobrazení v rovině budeme označovat velkým polotučným písmenem Z (v rukopise pište velké psací „zet"). Skutečnost, že zobrazení přiřazuje bodu X bod X'

*) Identitou (totožností) rozumíme takové zobrazení v rovině, které přiřazuje každému bodu roviny týž bod. Je možné, že jste užívali termínu identita v jiném významu, v této brožuře však bude mít jen výše uvedený význam.

zapíšeme symbolicky $Z\ (X \to X')$. Směr šipky je podstatný, protože přiřazení $X' \to X$ může představovat jiné zobrazení. Tak např. posunutí znázorněné na obr. 6 vlevo přiřazuje bodu X bod X'. Posunutí přiřazující bodu X' bod X*) je zřejmě inversní (zpětné) posunutí.

Jestliže shodné zobrazení $Z\ (X \to X')$, nazýváme shodné zobrazení přiřazující $X' \to X$ inversním vzhledem ke zobrazení Z a označujeme je $Z^{-1}\ (X' \to X)$.



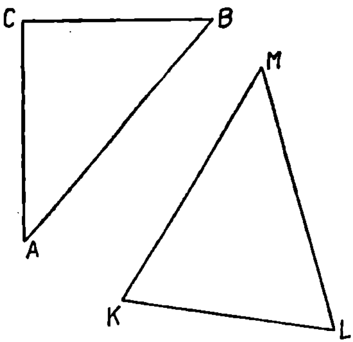
Obr. 7

Je pozoruhodné, že zobrazení inversní k identitě, středové a osové souměrnosti je totožné s původním zobrazením. Všimněte si na obr. 7 středu S a dvojice bodů X, X'. Bod $Y \equiv X'$ má ve středové souměrnosti se středem S obraz Y', který splývá s bodem X. Protože tomu tak je pro všechny body roviny, je středová souměrnost se středem S totožná se zobrazením k ní inversním. Zcela stejnou úvahu můžeme provést pro osovou souměrnost O s osou o (obr. 7).

*) Obrázek vpravo má představovat tytéž body X, X′ jako obrázek vlevo. Vyznačení obou šipek v témž obrázku by bylo nepřehledné.

Slyšeli jste jistě o *útvarech samodružných* v některém zobrazení. Jsou to ty útvary, které splývají se svým obrazem v příslušném zobrazení. V otočení kolem bodu S jsou samodružné všechny kružnice se středem S, v posunutí $P(X \rightarrow X')$ jsou samodružné všechny přímky směru XX'. Každý útvar, o kterém říkáme, že je souměrný podle středu, je samodružný v souměrnosti podle tohoto středu. Přesvědčte se o tom u čtverce, kruhu, elipsy, hyperboly. Osově souměrné jsou rovnoramenné trojúhelníky, deltoidy, kružnice, elipsa, hyperbola, parabola atd. Ověřte si přitom, že útvar může být samodružný, i když žádný jeho bod není samodružný.

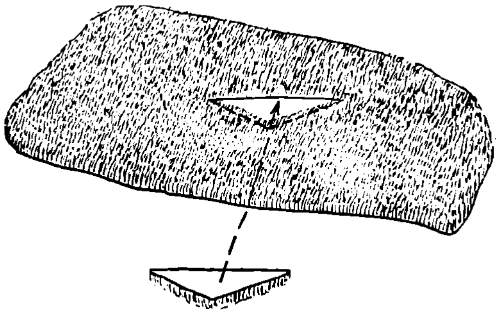
Shodnosti jste dělili na přímé a nepřímé podle toho, zda bylo třeba obracet průsvitku při přemisťování bodů roviny pomocí průsvitky. Z jmenovaných typů shodností je nepřímá pouze osová souměrnost. Na obr. 8 je zobrazen trojúhelník ABC; přesvědčte se, že se tento trojúhelník nemůže ztotožnit sám se sebou, otočíme-li průsvitku na rub. Rovnoramenný trojúhelník KLM však lze přenést tak, že se ztotožní sám se sebou, převrátíme-li průsvitku na rub. Bod K přejde v L, bod L v K, bod M je samodružný.



Obr. 8

Na základě poznatků získaných v minulém odstavci můžete poradit kožešníkovi, který se dostal do nepříjemné situace.

Kožešník chtěl opravit poškozený kabát. Vystřihl opatrně poškozenou část kožešiny, otvor zarovnal na *trojúhelník podobný trojúhelníku ACB na obr. 8. Dále chtěl vystřihnout z náhradního kousku kožešiny shodný trojúhelník, aby jej mohl vsadit do otvoru. Podložil kožešinu pod kabát, ale do srsti si nemohl vyznačit obvod trojúhelníka (obr. 9). Otočil*

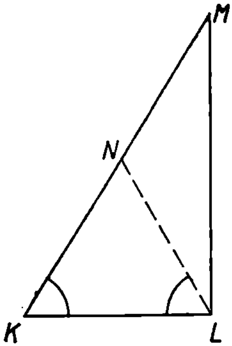


Obr. 9

proto kožešinu na rub a na vydělanou kůži si vyznačil hranici řezu. Pak vystřihl vyznačený trojúhelník a chystal se šít. Ať však dělal co dělal, nemohl vystřižený trojúhelník zasadit tak, aby jeho srst zakryla otvor. Jak byste vysvětlili tuto podivnou věc a jak byste poradili kožešníkovi, který už nemá podobnou kožešinu?

Otvor v kabátě a vystřižený trojúhelník jsou zřejmě nepřímo shodné, proto je nelze ztotožnit bez obracení. Vystřižený trojúhelník je třeba rozstřihnout na rovnoramenné trojúhelníky, protože ty lze ztotožnit po obrácení na rub. Řešení ukazuje obr. 10 pro pravoúhlý trojúhelník KLM. Dokažte, že trojúhelníky KLN, LMN jsou opravdu rovnoramenné. Každý trojúhelník lze složit z rovnoramenných trojúhelníků (použijte rozdělení trojúhelníka na pravoúhlé trojúhelníky).

Zůstaňme ještě krátce u zaměstnání, která pracují



Obr. 10

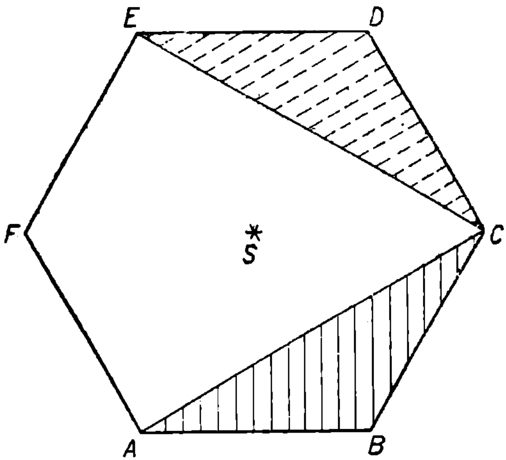
s jehlou. Jaký je vztah mezi kusy kůže vystřiženými do tvaru podrážky pro levou a pravou botu? Všimněte si, jak krejčí nebo švadlena vystřihuje z látky díly obleků, např. levou a pravou část zad kabátu. Jak svým postupem předcházejí tomu, abychom nenosili na jedné straně zad kabátu látku na ruby?

Často se ptáme, v kolika různých shodných zobrazeních je daný útvar samodružný. Každý útvar je samodružný v identitě. Nás ovšem zajímají především další shodná zobrazení. Rovnoramenný trojúhelník KLM se stranou $KM = LM$ na obr. 8 je samodružný v osové souměrnosti, která vyměňuje body K, L. Zapišme si přiřazení vrcholů trojúhelníka KLM ve zobrazeních, která jej reprodukují (ve kterých je samodružný): identita J ($K \to K$, $L \to L$, $M \to M$), osová souměrnost O ($K \to L$, $L \to K$, $M \to M$).

Mějme dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ (obr. 11). Počet shodných zobrazení, která jej reprodukují, je možno určovat zkusmo. Výhodnější však je užít vlastností shodných zobrazení, zejména věty o určenosti.

Jsou-li dány dva shodné trojúhelníky $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, *existuje právě jedno shodné zobrazení v rovině, které přiřazuje* $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$.

Je samozřejmé, že při shodném zobrazení pravidelného šestiúhelníka přejdou sousední vrcholy opět v sousední vrcholy. Počet shodností reprodukujících pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ stanovíme tak, že určíme počet trojic za sebou následujících vrcholů (trojice DEF je různá od

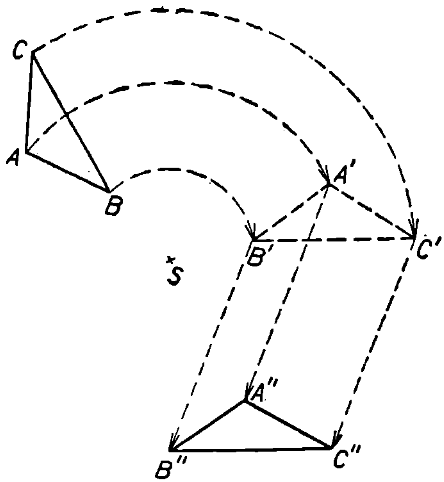


Obr. 11

FED!), které určují trojúhelníky shodné s trojúhelníkem *ABC*. Jsou to po řadě trojice *ABC*, *BCD*, *CDE*, *DEF*, *EFA*, *FAB* a *CBA*, *DCB*, *EDC*, *FED*, *AFE*, *BAF*, celkem dvanáct. Zapište si přiřazení příslušných vrcholů shodných trojúhelníků a určete druh shodnosti, která zobrazuje po řadě vrcholy *A*, *B*, *C* základního trojúhelníka *ABC* do bodů zvolené trojice. Vezmete-li například trojice *ABC* a *CDE*, Z ($A \to C$, $B \to D$, $C \to E$), dostanete otočení (rotaci) o 120° v kladném smyslu. V případě, že vezmete trojici z druhé šestice, jde vždy o osovou souměrnost, stanovte její osu.

Určete počet shodností reprodukujících pravidelný *n*- úhelník. Kolik z nich je osových souměrností, kolik středových a kolik rotací? Proč mezi nimi není nikdy posunutí?

Sestrojíme-li útvar **U**′ jako obraz útvaru **U** v některém shodném zobrazení Z_1 (**U**→**U**′), není samozřejmě zakázáno sestrojit ještě obraz **U**″ útvaru **U**′ v dalším shodném zobrazení Z_2. Chápeme-li shodné zobrazení útvarů jako jejich přemístění, je zřejmé, že i konečný výsledek, kterého jsme dosáhli, tj. přemístění útvaru **U** na útvar **U**″, je shodným zobrazením útvaru **U** na útvar **U**″. Na obr. 12 je zobrazen trojúhelník ABC nejprve na trojúhelník $A'B'C'$ v otočení se středem S o úhel *120°* v záporném smyslu.

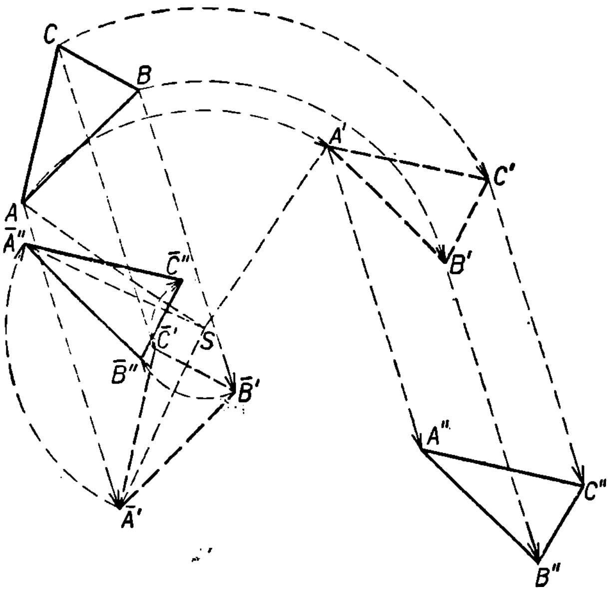


Obr. 12

Tento trojúhelník je pak zobrazen posunutím v trojúhelník $A''\ B''\ C''$. Je zřejmé, že existuje shodné zobrazení v rovině, které převede trojúhelník ABC přímo v trojúhelník $A''\ B''\ C''$. Na obr. 12 je tímto zobrazením otočení se středem S' o úhel 120° v záporném smyslu. Bod S' sestrojte jako průsečík os úseček AA'', BB'', CC''. O výsledném otočení říkáme, že vzniklo složením prvního otočení a uvedeného posunutí.

Jsou-li dána dvě shodná zobrazení Z_1, Z_2 *v rovině a přiřazuje-li* Z_1 $(X \to X')$, Z_2 $(X' \to X'')$, *nazýváme shodné zobrazení* Z_3 $(X \to X'')$ *složením zobrazení* Z_1, Z_2 *v tomto pořadí a zapisujeme* $Z_3 = Z_1 Z_2$.

Zápis $Z_3 = Z_1 Z_2$ má tvar součinu; skutečně se také někdy hovoří o součinu zobrazení. Raději si však nezvykejte na tento termín. Česká terminologie užívá termínů skládání, složení apod.



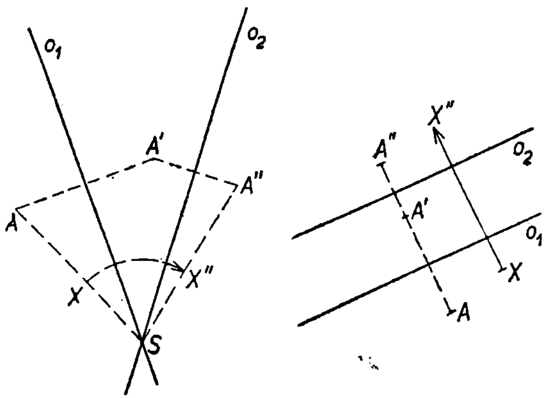
Obr. 13

Proveďte si řadu příkladů na skládání otočení s posunutím podle obr. 12, skládejte dále dvě posunutí. Složte dvě otočení s různými středy, jejichž úhly otočení jsou navzájem opačné, dostanete posunutí.

Zkuste složit zobrazení v uvedených příkladech v opačném pořadí (obr. 13). Přesvědčíte se, že obraz trojúhelníka ABC ve zobrazení $Z_1 Z_2$ je jiný než obraz téhož trojúhelníka ve zobrazení $Z_2 Z_1$. Při skládání dvou posunutí jsou však zobrazení $Z_1 Z_2$, $Z_2 Z_1$ totožná.

Skládání zobrazení není vždy komutativní, může být $Z_1 Z_2 \neq Z_2 Z_1$.

Zatím jsme neskládali osové souměrnosti a středové souměrnosti. Přesvědčte se, že složením dvou osových souměrností O_1, O_2, jejichž osy o_1, o_2 se protínají v bodě S, je otočení kolem středu S (obr. 14). V případě, že osy o_1, o_2 osových souměrností O_1, O_2 jsou rovnoběžné a různé, dostanete posunutí. Jaký je směr tohoto posunutí? Složí-

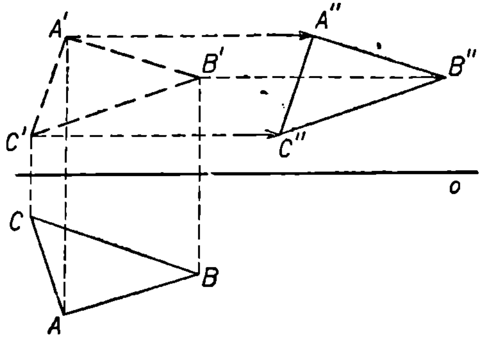


Obr. 14

te-li dvě středové souměrnosti s různými středy, dostanete posunutí.

Jak vidíte, je skládání zobrazení zajímavé. Nemůžeme se bohužel zabývat hlouběji skládáním zobrazení ani obráceně rozkládáním jedné shodnosti na dvě nebo tři složky. Lze dokázat, že *každé shodné zobrazení v rovině je možno vyjádřit jako zobrazení složené z osových souměrností, jejichž počet není větší než tři.*

Zkoušejte si zobrazovat trojúhelníky nebo jiné útvary v zobrazení složeném ze dvou nebo tří osových souměr-



Obr. 15

ností, středové a osové souměrnosti atd. Při systematickém výkladu této partie se dá ukázat, že *existuje celkem pět různých druhů shodných zobrazení v rovině*, a to *identita, otočení a posunutí* jako shodnosti přímé a *osová souměrnost a posunuté zrcadlení* jako shodnosti nepřímé. Posunutým zrcadlením rozumíme zobrazení složené z osové souměrnosti a posunutí ve směru osy (obr. 15). Má posunuté zrcadlení samodružný bod? Je některá přímka samodružná v posunutém zrcadlení?

Cvičení

4. Která shodná zobrazení reprodukují kosočtverec?

5. Ve kterých shodných zobrazeních jsou samodružné útvary mající tvar stojatých tiskacích písmen D, E, H, N, Z?

6. Jestliže každé ze dvou zobrazení reprodukuje daný útvar, reprodukují jej i zobrazení, která vzniknou složením daných zobrazení v libovolném pořadí. Přesvědčte se o správnosti věty na zvolených příkladech (čtverci, šestiúhelníku atd.).

7. Nakreslete si profil přímého schodiště a představte si útvar, který z tohoto profilu vznikne, přidáváme-li bez omezení další schody na oba konce schodiště. Určete shodná zobrazení, v nichž je tento útvar samodružný. Kolik má středů souměrnosti?

8. Zobrazte si podobně jako ve cvičení 7 „nekonečný" žebřík a vyhledejte shodná zobrazení, která jej reprodukují. Jsou mezi nimi posunutá zrcadlení?

9. Zamyslete se nad problémem, které trojúhelníky lze rozstřihnout na tři rovnoramenné trojúhelníky.

(Využijte nejprve středu kružnice opsané trojúhelníku, pak dělení trojúhelníka výškou na dva pravoúhlé trojúhelníky. Kdy je pravoúhlý trojúhelník rovnoramenný?)

10. Přesvědčte se, že složením dvou osových souměrností, jejichž osy jsou navzájem kolmé, vznikne středová souměrnost. Zdůvodněte na základě toho středovou souměrnost elipsy.