VÝSLEDKY ÚLOH

●

1. $10^{n-1}x + 10^{n-2}y$.

2. Úloha nemá řešení.

3. Pro jednociferné číslo je tvrzení zřejmé, neboť $5^2 = 25$. Je-li uvažované číslo víceciferné, pak je můžeme vyjádřit ve tvaru $10p + 5$, kde p je vhodné přirozené číslo. Platí $(10p + 5)^2 = 100p^2 + 100p + 25 = 100(p^2 + p) + 25$. Číslo $100(p^2 + p)$ je zřejmě zakončeno dvěma nulami, takže součet $100(p^2 + p) + 25$ je zakončen dvojčíslím 25.

4. 1962.

6. 132.

7. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

8. 2520.

9. Je-li celé nezáporné číslo m dělitelné pěti, platí $m = 5k$, kde k je celé nezáporné číslo. Není-li m dělitelné pěti, můžeme najít celé nezáporné k a přirozené číslo r tak, že $m = 5k + r$, $0 < r < 5$. Odtud už plyne naše tvrzení.

10. Platí $172^4 = (17.10 + 2)^4 = 17a + 16$, kde a je jisté přirozené číslo. Podobně $35^{313} = (17.2 + 1)^{313} = 17b + 1$, kde b je též přirozené. Celkem tedy máme $172^4 + 35^{313} = 17(a + b + 1)$, takže uvažované číslo je skutečně dělitelné sedmnácti.

11. Tvrzení plyne ze vzorce

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

12. Plyne z příkladu 7.

13. Důkaz obdobný jako v příkladech 6 a 7.

14. Důkaz se podá matematickou indukcí. Pro $n = 1$

máme $a_1 = 11$. Předpokládejme, že pro některé přirozené číslo n je a_n dělitelné jedenácti; upravujeme $a_{n+1} = 2.3^{5n+1} + 5 = 2.3^{5n-4}.3^5 + 5 = 2.3^{5n-4}.243 + 5 = 2.3^{5n-4} + 5 + 2.3^{5n-4}.242 = a_n + 2^2.3^{5n-4}.11^2$. Číslo a_n je dělitelné jedenácti a číslo $2^2.3^{5n-4}.11^2$ je rovněž jedenácti dělitelné. Proto je i součet obou, tj. číslo a_{n+1} dělitelné jedenácti.

15. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

16. Číslo 2437 je prvočíslo, číslo 2771 je složené, neboť je dělitelné sedmnácti.

17. a) $3248 = 2^4.7.29$; b) $2418 = 2.3.13.31$; c) $3819 = 3.19.67$.

18. 401.

19. 45.

20. Platí $10! + 1 = 3\,628\,801$. Toto číslo je zřejmě dělitelné jedenácti, takže je složené.

21. 997.

22. (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73).

23. Kdyby taková mezera mezi prvočísly p, q existovala, platilo by $q - p = 1001$. Nepřichází v úvahu $p = 2$ takže obě čísla p, q by byla lichá a jejich rozdíl by byl tedy sudý. Náš rozdíl je však 1001, což je spor.

24. Vyhovuje jediná pětice prvočísel, totiž 5, 17, 29, 41, 53.

25. Není to možné.

26. Prvočísla 2 a 3 není možno v uvedeném tvaru vyjádřit. Každé větší přirozené číslo lze vyjádřit v jednom ze tvarů $6k$, $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$, $6k + 5$. Tvary $6k$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$ vedou zřejmě k číslům složeným, takže zbývají jen tvary $6k + 1$ a $6k + 5$.

27. a) Nikoliv. Pro $k = 4$ máme $6k + 1 = 25 = 5^2$. b) Nikoliv. Pro $k = 5$ máme $6k + 5 = 35 = 7.5$.

28. 27.
29. a) 12; b)89; c) 1; d) 4; e) 1.
30. a) 258; b) 1 283 000; c) 180; d) 300.
31. Zdvojnásobí se.
32. Ztrojnásobí se.
33. Tvrzení plyne ze vztahů $n(a, b) = a$, $D(a, b) = b$.
34. $21 = 2 + 2 + 17$, $\quad 21 = 3 + 5 + 13$,
$21 = 3 + 7 + 11$, $\quad 21 = 5 + 5 + 11$,
$$21 = 7 + 7 + 7.$$
35. Označíme-li x, y, z po řadě počet známek v ceně 30 h, 40 h, 60 h, docházíme po malé úpravě k neurčité rovnici $3x + 4y + 6z = 18$. Obdobně jako v příkladě 25 snadno nahlédneme, že x musí být sudé číslo. Počet řešení je pak patrný z této tabulky:

x	y	z
0	0	3
0	3	1
2	0	2
2	3	0
4	0	1
6	0	0

36. Není to možné. Dosadíme-li totiž do levé strany libovolná tři přirozená čísla, dostaneme sudé číslo; na straně pravé je však číslo liché.

37. Obdobně jako v příkladě 28 docházíme k soustavám
a) $x + y = 15$, $\quad$ b) $x + y = 5$,
$x - y = 1$; $\quad x - y = 3$.
Soustava a) má řešení $x = 8$, $y = 7$, soustava b) řešení $x = 4$, $y = 1$. Zkouškou se snadno přesvědčíme, že obě nalezené dvojice vyhovují dané rovnici.

38. Označme x, y velikosti odvěsen; podle Pythagorovy věty platí $x^2 + y^2 = 225$. Tuto neurčitou rovnici budeme řešit „zkusmo“, ale tak, abychom na žádnou dvojici přirozených čísel x, y nezapomněli. Dostáváme buď dvojici $x = 9$, $y = 12$ nebo dvojici $x = 12$, $y = 9$. Obě tyto dvojice ovšem vedou k témuž pravoúhlému trojúhelníku o stranách 9 cm, 12 cm, 15 cm.

Další doporučená literatura

●

a) Knihy určené začátečníkům:

A. O. Gelfond: Neurčité rovnice, Populární přednášky o matematice, sv. 6, Praha 1956.

K. Hruša: Základní věty o dělitelnosti, Brána k vědění, sv. 9, Praha 1950.

J. Vyšín: Neurčité rovnice, Brána k vědění, sv. 3, Praha 1949

b) Knihy pro pokročilejší čtenáře:

V. Kořínek: Základy algebry, Praha 1953.

K. Rychlík: Úvod do elementární číselné teorie, Praha 1950.

c) Publikace cizojazyčné:

А. А. Бухштаб: Теория чисел, Москва 1960.

W. Sierpiński: Co wiemy a czego nie wiemy o liczbach pierwszych, Varšava 1961.