Co víme o přirozených číslech

2. Dělení se zbytkem a dělení beze zbytku

In: Jiří Sedláček (author): Co víme o přirozených číslech. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1961. pp. 9–15.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403438

2.

DĚLENÍ SE ZBYTKEM A DĚLENÍ BEZE ZBYTKU

●

Ve středoškolské aritmetice můžeme sledovat dva směry: můžeme buď více zdůrazňovat numerické počítání, nebo se více přiklonit k teorii. Než přikročíme k numerickým příkladům na dělení dvou přirozených čísel, připomeňme si přesný matematický význam tohoto početního výkonu.

Jsou-li dána libovolná dvě přirozená čísla a, b, potom vždycky je možno najít dvě celá nezáporná čísla k, r tak, že platí

$$a = bk + r\,, \qquad 0 \leqq r < b\,. \tag{1}$$

Dvojice čísel k, r je čísly a, b určena jednoznačně. Úloze, ve které se má k dané dvojici přirozených čísel a, b najít dvojice celých nezáporných čísel k, r splňujících vztahy (1), se říká *dělení;* číslo a je dělenec, číslo b je dělitel. Všimněme si nyní podrobněji čísla r. Je-li $r > 0$, mluvíme o *dělení se zbytkem.* V tomto případě se číslo k nazývá *částečný podíl* a číslo r je *zbytek.* Jestliže je $r = 0$, mluvíme o *dělení beze zbytku*; číslo k se pak nazývá *podíl.*

Příklad 3. Vypočtěte částečný podíl a zbytek, je-li dělenec $a = 100$, dělitel $b = 27$.

Řešení. Pro $a = 100$, $b = 27$ snadno nalezneme, že je $k = 3$, $r = 19$. Platí totiž $100 = 27 . 3 + 19$, přičemž $0 < 19 < 27$. Numerický výpočet jsme ze školy zvyklí vyjadřovat např. ve tvaru $100 : 27 \;|\; \underline{3}\,,$

$\quad 19$

z něhož je též patrno, jak vyšel částečný podíl a jak zbytek.

Dále si všimněme podrobněji dělení beze zbytku. Jestliže platí $a = b.k$, pak říkáme, že číslo b *dělí* číslo a nebo že číslo b je *dělitelem**) čísla a nebo že číslo a je *dělitelné* číslem b nebo konečně též, že číslo a je *násobkem* čísla b. Pro stručnost vyjadřování je účelné rozšířit dělitelnost i na číslo nula: podle této rozšířené definice platí, že každé přirozené číslo dělí číslo 0.

Příklad 4. Které z čísel 1352 a 1757 je dělitelné sedmi?

Řešení. Číslo 1352 není dělitelné sedmi; platí totiž $1352 = 7.193 + 1$. Číslo 1757 je sedmi dělitelné, neboť $1757 = 7.251$.

Vyjádření čísla pomocí částečného podílu a zbytku můžeme někdy s výhodou užít pro zkrácení numerického výpočtu, jak si to ukážeme v dalším příkladě.

Příklad 5. Ukažte, že číslo $2^{100} + 10$ je dělitelné třinácti.

Řešení. Nejprve budeme upravovat mocninu 2^{100}. Platí $2^{100} = (2^4)^{25} = 16^{25} = (13.1 + 3)^{25}$. Další umocňování zde nemusíme až do konce provádět. Podle binomické věty**) je totiž $(13 + 3)^{25} = \binom{25}{0}.13^{25} + \binom{25}{1}.13^{24}.3 + \binom{25}{2}.13^{23}.$ $.3^2 + \ldots + \binom{25}{24}.13^1.3^{24} + \binom{25}{25}.3^{25}$.

*) Prosím čtenáře, aby si uvědomil, že samotné slovo „dělitel" má v našich úvahách dva odlišné významy. Záleží ovšem vždy na spojení, v jakém toto slovo užijeme. To ostatně není celkem nic divného, vždyť i slova „dělení" zde užíváme rovněž ve dvou různých významech.

**) Připomeňme si definici kombinačního čísla. Platí

$$\binom{n}{k} = \frac{n.(n-1).(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}.$$

Posledního členu na pravé straně si na okamžik nevšímejme. Vidíme, že ze všech zbývajících členů na straně pravé je možno vytknout číslo 13, platí tedy $(13 + 3)^{25} = 13a + 3^{25}$, kde a je vhodné přirozené číslo*).

Dále si všimněme mocniny 3^{25}, která se vyskytuje ve výsledku dosud nalezeném. Platí $3^{25} = 3^{24}.3^1 = (3^3)^8.3 = 27^8.3 = (13.2 + 1)^8.3$. Opět budeme používat binomické poučky a užijeme obdobného obratu jako při úpravě mocniny 16^{25}. Výraz $(13.2 + 1)^8$ můžeme vyjádřit ve tvaru $13b + 1^8$, kde b je vhodné přirozené číslo (jehož výpočtem se zde opět nemusíme zabývat). Dostali jsme tedy, že $3^{25} = (13b + 1).3 = 13.3b + 3$. Vrátíme-li se k původně danému číslu $2^{100} + 10$ a použijeme-li všech dílčích výsledků, máme

$$2^{100} + 10 = 13a + (13.3b + 3) + 10 = 13(a + 3b + 1).$$

Odpověď. Číslo $2^{100} + 10$ je skutečně dělitelné třinácti.

Často se vyskytuje úloha, ve které se má dokázat, že daný mnohočlen $f(n)$ je pro všechna přirozená čísla n dělitelný některým pevně daným přirozeným číslem. Tuto problematiku si ukážeme na příkladech 6 a 7.

Příklad 6. Je-li n libovolné přirozené číslo, pak číslo $n^3 - n$ je dělitelné šesti. Dokažte.

Řešení. Dokážeme nejprve, že číslo $n^3 - n$ je dělitelné třemi. Dvojčlen $n^3 - n$ upravujeme postupně takto

$$n^3 - n = n.(n^2-1) = n.(n - 1).(n + 1) = \\ = (n - 1).n.(n + 1).$$

Rozložili jsme tedy výraz $n^3 - n$ v součin tří činitelů;

*) Nebudeme se zde zabývat přesným výpočtem čísla a, neboť to je pro naše účely zbytečné.

tito činitelé jsou tři po sobě jdoucí celá nezáporná čísla $n - 1$, n, $n + 1$. Probíráme-li po řadě všechna celá nezáporná čísla, je známo, že každé třetí z nich je dělitelné třemi. Protože čísla $n - 1$, n, $n + 1$ tvoří trojici po sobě jdoucích celých nezáporných čísel, musí být jedno z nich dělitelné třemi a proto také jejich součin $n^3 - n$ je dělitelný třemi.

Dále dokážeme, že číslo $n^3 - n$ je dělitelné dvěma. Probíráme-li po řadě všechna celá nezáporná čísla, střídá se vždy číslo sudé s číslem lichým.*) Z toho plyne, že alespoň jedno z čísel $n - 1$, n, $n + 1$ je sudé, a tedy také součin těchto čísel je sudý.

Protože pro libovolné číslo n je rozdíl $n^3 - n$ dělitelný jednak třemi, jednak dvěma, je tento rozdíl (jak jistě víte ze školy) nutně dělitelný šesti. To je právě tvrzení, které jsme měli dokázat.

Jiné řešení. Čtenář, který zná princip matematické indukce,**) může naši úlohu řešit takto:

Pro $n = 1$ platí $n^3 - n = 1^3 - 1 = 0$; číslo 0 je dělitelné šesti, takže tvrzení v tomto případě platí.

Předpokládejme, že tvrzení, které máme dokázat, platí pro některé přirozené číslo n, a budeme je dokazovat pro přirozené číslo $n + 1$. Jestliže ve výrazu $n^3 - n$ místo n píšeme $n + 1$, dostáváme $(n + 1)^3 - (n + 1)$. Upravujeme tento výsledek takto:

$$(n + 1)^3 - (n + 1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 =$$
$$= (n^3 - n) + (3n^2 + 3n) = (n^3 - n) + 3n.(n + 1)\,.$$

Výraz $3n.(n + 1)$ je dělitelný třemi, snadno však na-

*) Ze školy víme, že číslo *sudé* je to, které je dělitelné dvěma, a číslo *liché* to, které není dělitelné dvěma.

**) Poučení o matematické indukci najdete např. v knížce I. S. Sominského „Metoda matematické indukce“ (1. sv. Populárních přednášek o matematice, SNTL).

hlédneme, že je dělitelný také dvěma. Je dělitelný tedy šesti. Výraz $n^3 - n$ je dělitelný šesti, neboť to je předpoklad, ze kterého jsme vyšli. Je tedy také součet těchto dvou výrazů dělitelný šesti. Tento součet je však (jak víme) roven $(n + 1)^3 - (n + 1)$. Z předpokladu, že naše tvrzení platí pro některé přirozené číslo n, plyne, že toto tvrzení platí též pro přirozené číslo $n + 1$. Důkaz matematickou indukcí je tím podán.

Příklad 7. je obdobný tomu, který jsme právě rozřešili, avšak při jeho řešení budeme potřebovat složitějších matematických obratů.

Příklad 7. Je-li n libovolné přirozené číslo, pak číslo $n^5 - n$ je dělitelné pěti. Dokažte.

Řešení. Rozdíl $n^5 - n$ upravujme takto: $n^5 - n = n.(n^4 - 1) = n.(n^2 - 1).(n^2 + 1) = n.(n - 1).(n + 1).(n^2 + 1)$. Nepodařilo se nám zde rozložit uvažované číslo v součin pěti po sobě jdoucích celých čísel (pak bychom totiž tvrzení snadno dokázali obdobným postupem, jak to bylo provedeno v předcházejícím příkladě). Pomůžeme si však tímto obratem:

Uvažme, jak se liší součin $(n - 1).n.(n + 1).(n + 2).(n + 3)$ od našeho součinu $(n - 1).n.(n + 1).(n^2 + 1)$.
Jejich rozdíl je

$$(n - 1).n.(n + 1).[(n + 2).(n + 3) - (n^2 + 1)] =$$
$$= (n - 1).n.(n + 1).[n^2 + 5n + 6 - n^2 - 1] =$$
$$= (n - 1).n.(n + 1).(5n + 5) = 5.(n - 1).n.(n + 1)^2.$$

Je vidět, že tento rozdíl je dělitelný pěti. Součin $(n - 1).n.(n + 1).(n + 2).(n + 3)$ je však zřejmě dělitelný pěti, neboť je to součin pěti po sobě jdoucích celých nezáporných čísel. Z úvahy o rozdílu proto vyplývá, že také náš součin $(n-1).n.(n+1).(n^2+1)$ je dělitelný pěti. Tím je důkaz proveden.

Přenecháváme čtenáři, aby i v tomto příkladě podal jiné řešení, při kterém se používá principu matematické indukce.

Poznamenejme, že příklady 6 a 7 jsou vlastně speciálním tvarem jedné slavné číselněteoretické věty, která se nazývá *malá věta Fermatova.* *) Francouzský právník a matematik *Pierre de Fermat* (1601—1665) si dobyl předního místa v matematice svými pracemi z teorie čísel a patří mezi první pěstitele analytické geometrie.

V dalším příkladě budeme opět používat matematické indukce.

Příklad 8. Je-li n libovolné přirozené číslo, pak číslo $6^{2n}-8$ je dělitelné sedmi. Dokažte.

Řešení. Důkaz podáme matematickou indukcí.

Pro $n=1$ dostáváme

$6^{2n}-8=6^2-8=36-8=28$,

takže v tomto případě vychází číslo dělitelné sedmi.

Předpokládejme nyní, že naše tvrzení platí pro jisté přirozené číslo n a dokážeme, že platí také pro přirozené číslo $n+1$. Jestliže ve výrazu $6^{2n}-8$ místo n píšeme $n+1$, dostáváme výraz $6^{2(n+1)}-8$. Upravme

$$6^{2(n+1)}-8=6^{2n+2}-8=6^{2n}.6^2-8=$$
$$=6^{2n}.36-8=(6^{2n}-8)+35.6^{2n}.$$

Podle předpokladu je číslo $6^{2n}-8$ dělitelné sedmi; je vidět, že také číslo 35.6^{2n} je sedmi dělitelné, takže i součet

$$(6^{2n}-8)+35.6^{2n}$$

je dělitelný sedmi. To však znamená, že jsme provedli i druhý indukční krok a důkaz tvrzení je tím podán.

*) Tato věta zní: *Je-li p libovolné prvočíslo a n libovolné přirozené číslo, pak n^p-n je dělitelné číslem p.*

Úlohy

5. Ve škole jste se učili znaky dělitelnosti dvěma, třemi, čtyřmi, pěti, osmi, devíti, desíti a jedenácti. Zopakujte si tyto poučky.

6. Určete nejmenší přirozené číslo dělitelné jedenácti, které je zapsáno číslicemi vesměs různými.

7. Určete všechna přirozená čísla, jimiž je dělitelné číslo 60.

8. Vyhledejte nejmenší přirozené číslo; které je dělitelné každým z čísel 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

9. Každé celé nezáporné číslo je možno vyjádřit v právě jednom ze tvarů $5k$, $5k + 1$, $5k + 2$, $5k + 3$, $5k + 4$, kde k je vhodné celé nezáporné číslo. Dokažte.

10. Ukažte, že číslo $172^4 + 35^{313}$ je dělitelné sedmnácti.

11. Jsou-li a, b libovolná dvě přirozená čísla, pak číslo $a^3 + b^3$ je dělitelné číslem $a + b$; dokažte.

12. Pátá mocnina libovolného přirozeného čísla je zakončena stejnou číslicí jako číslo, které se umocňovalo. Zdůvodněte, proč je tomu tak.

13. Je-li n libovolné přirozené číslo, pak číslo $n^7 - n$ je dělitelné sedmi. Dokažte.

14. Číslo $a_n = 2 . 3^{5n-4} + 5$ je dělitelné jedenácti pro každé přirozené číslo n. Dokažte.