Několik úloh z geometrie jednoduchých těles

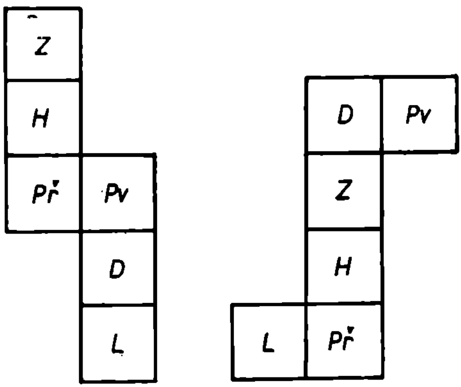
Úlohy ke cvičení

ÚLOHY KE CVIČENÍ

●

(K části I)

1. Na obr. 44 jsou nakresleny dvě sítě krychle. (Stěny jsou označeny takto: Př - přední, Z - zadní, H - horní, D - dolní, Pv - pravá, L - levá). Určete nejdelší úsečku, která se dá umístit do každé z obou sítí a vypočtete její délku. Načrtněte lomenou čáru, v kterou přejde tato úsečka při



Obr. 44

složení krychle. Zjistěte, zda lze spojit koncové body této lomené čáry jinou kratší lomenou čarou vedenou po povrchu krychle.

2. Je dán rotační kužel s vrcholem V, úsečka $AB = 2r$ je průměr jeho podstavy. Na stranách AV, BV kužele jsou zvoleny body C, D tak, že platí $AC = BD$. Zjistěte, která spojnice bodů C, D po povrchu kužele je kratší: zda lomená čára $CABD$ nebo polokružnice ležící v rovině rovnoběžné s podstavou.

3. Dvě místa A, B na severní polokouli mají zeměpisné šířky φ_1, φ_2, jejich zeměpisné délky se liší o 90^0. Vyjádřete, jak závisí nejkratší vzdálenost míst A, B vedená po povrchu Země na číslech φ_1, φ_2. (Povrch Země pokládáme za kulovou plochu.)

4. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$. Oddělte od ní rovinným řezem čtyřstěn $B'XYZ$ tak, aby kružnice vepsané trojúhelníkům $B'XZ$, XYZ se navzájem dotýkaly.

5. Rotační válec s výškou v má za podstavu kruh o poloměru r. Obdélník $ABCD$, jehož rovina prochází středem osy válce, má vrcholy A, B na obvodu dolní podstavy, vrcholy C, D na obvodu horní podstavy. Vyjádřete obsah y obdélníka $ABCD$ jako funkci délky $AB = x$. Zjistěte, který z obdélníků $ABCD$ má největší obsah, a sestrojte ho.

6. Je dán kvádr $ABCDA'B'C'D'$ o rozměrech $AB = a$, $BC = b$, $BB' = c$, pro něž platí $a < b < c$. Do kvádru je umístěna krychle $KLMNK'L'M'N'$, jejíž hrany $K'L'$, MN jsou rovnoběžné s hranou AB a vrcholy K', L', M, N leží po řadě na hranách AA', BB', CC', DD' daného kvádru. Vyšetřete geometrické místo a) vrcholů K', b) středů všech těchto krychlí.

7. Rovinnými řezy byly odděleny rohy dané krychle tak, že ve stěnách krychle vznikly pravidelné osmiúhelníky. Sestrojte jeden z těchto osmiúhelníků a vyjádřete délku jeho strany pomocí délky hrany dané krychle. Vypočtěte objem vzniklého tělesa.

8. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$, M je střed hrany BC. Určete všechny body povrchu krychle, které mají stejné vzdálenosti od bodů B, D', M.

9. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$; střed hrany $A'B'$ je označen P. Určete vzdálenost bodu B od roviny ACP, a to konstruktivně i početně.

10. Je dán kvádr $ABCDA'B'C'D'$ o rozměrech $AB = a$, $BC = b$, $BB' = c$. Sestrojte stranu kosočtverce $AXC'Y$, jehož vrcholy X, Y leží po řadě na hranách BB', DD'. Vypočtěte délky úseček BX, DY. Zjistěte, zda kosočtverec $AXC'Y$ může být čtvercem.

11. Je dán kvádr $ABCDA'B'C'D'$, jehož stěna $ABCD$ je čtverec; E je pata kolmice spuštěné z bodu B na přímku AC'. Sestrojte skutečnou velikost obrazce, který je průsekem kvádru s rovinou BDE. Vyjádřete obsah tohoto obrazce pomocí rozměrů daného kvádru.

12. Je dán kvádr $ABCDA'B'C'D'$. Zjistěte, jaký útvar vyplní střední příčky všech lichoběžníků, v nichž protínají kvádr roviny procházející přímkou BD.

13. Je dána krychle a ostroúhlý trojúhelník **T**. Urče-

te rovinu, která protne danou krychli v trojúhelníku shodném s trojúhelníkem **T**.

14. Podstava kolmého hranolu je rovnoběžník $ABCD$, jehož vnitřní úhel $\sphericalangle DAB$ má velikost 135^0. Zjistěte výpočtem, zda je možné vést vrcholem A rovinu, která protne daný hranol ve čtverci.

(K části III)

15. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ a kulová plocha, která prochází a) všemi vrcholy dané krychle; b) středy všech hran dané krychle; c) středy všech stěn dané krychle. Určete konstruktivně a početně poloměr kružnice, v níž protíná každou z těchto kulových ploch rovina $A'BC'$.

16. Je dána krychle a kulová plocha, která prochází středy všech jejích stěn. V průsečíku tělesové úhlopříčky krychle s danou kulovou plochou vedeme k této ploše tečnou rovinu τ. Sestrojte skutečnou velikost průseku roviny τ s krychlí a vyjádřete jeho obsah pomocí délky hrany dané krychle.

17. Poklop má tvar hlavního vrchlíku kulové plochy o poloměru r.*) Tímto poklopem je přikryta a) co největší krychle, b) co největší čtyřstěn, c) co největší koule spočívající na vodorovné rovině. Které z přikrytých těles má největší objem a které má největší povrch?

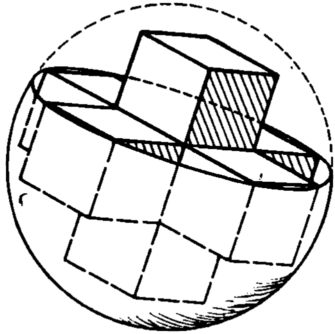
---

*) Hlavní vrchlík je vrchlík, jehož výška je rovna poloměru kulové plochy.

18. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$; trojúhelníku ABD je vepsána kružnice k. Určete početně a konstruktivně poloměr kulové plochy, která obsahuje kružnici k a dotýká se roviny BCB'.

19. Na kulové ploše o poloměru r leží šest shodných kružnic, z nichž každá se dotýká čtyř sousedních. Určete konstruktivně i početně poloměr těchto kružnic.

20. Na hlavním vrchlíku kulové plochy leží tři shodné kružnice, z nichž každé dvě se dotýkají navzájem a z nichž každá se dotýká hlavní kružnice omezující vrchlík. Určete početně i konstruktivně poloměr těchto tří kružnic.



Obr. 45

21. Do koule daného poloměru r má být vepsán (podle obr. 45) „prostorový kříž" složený ze sedmi shodných krychlí. Vyjádřete délku hrany krychle jako funkci poloměru r.